

ANALIZA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR

II

Editura  tehnică

Acad. prof. dr. P. S. THEOCARIS, prof. dr. ing. M. BUGA,
dr. ing. C. BURADA, ing. M. BĂLTĂNOIU, dr. ing. I. CONSTANTINESCU,
conf. dr. ing. D. HORBANIUC, dr. ing. N. ILIESCU,
prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU, conf. dr. ing. M. MODIGA,
ing. L. NĂILESCU, dr. ing. I. PASCARIU,
prof. dr. doc. ing. VL. POPOVICI, prof. dr. ing. M. TRIPA

ANALIZA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR

Bazele teoretice ale metodelor tensometrice
și indicații practice privind utilizarea acestora

II

În lucrare, care apare în două volume, sunt prezentate metodele și tehnicile utilizate pentru analiza experimentală a deformațiilor și tensiunilor.

În primul volum sunt date, la început, noțiunile și relațiile generale folosite la analiza experimentală a deformațiilor și tensiunilor, iar în capitolele următoare sunt prezentate, mai întâi, metodele și tehnicile tensometrice devenite clasice (extensometrele mecano-optice, tensometria electrică, fotoelasticitatea) și apoi metodele interferometrice (moiré și holografia).

Sunt prezentate, în continuare, în volumul doi, metoda causticelor (publicată pentru prima oară sub formă integrată), metoda lacurilor casante, metodele de analiză experimentală utilizate la evaluarea tensiunilor remanente, precum și o serie de aspecte teoretice și practice privind măsurările tensometrice pe modele și indicații privind etalonarea tensometrelor și prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor tensometrice.

Ținând seama de dezvoltarea, din ultimii ani, a metodei elementelor finite, care completează, în multe cazuri, metodele tensometrice, în ultimul capitol se dau noțiunile de bază privind aplicarea practică a acestei metode.

La sfârșitul lucrării se prezintă o serie de indicații privind alegerea celor mai adecvate metode și tehnici tensometrice pentru o anumită problemă practică.

Metodele și tehnicile tensometrice prezentate sunt ilustrate de exemple de lucrări practice, în majoritate efectuate de autori.

Colectivul de autori este alcătuit din cadre didactice și cercetători cu experiență, bine cunoscută, în domeniul respectiv. Se remarcă prezența în colectiv a acad. prof. P. S. Theocaris, cercetător cu renume mondial, în domeniul tensometriei.

Lucrarea se adresează inginerilor și cercetătorilor cu preocupări privind analiza experimentală a stării de tensiune și deformație, precum și studenților din institutele de învățământ tehnic superior.

Datorită aplicațiilor și indicațiilor practice pe care le prezintă, lucrarea este utilă și personalului auxiliar, care concurează la pregătirea și efectuarea lucrărilor experimentale.

Prin nivelul științific și caracterul său aplicativ, lucrarea — prima de acest fel, nu numai în țara noastră — constituie un prețios instrument pentru specialiștii preocupați de realizarea unor structuri mai ieftine și, în același timp, mai sigure în exploatare.

Redactor: NATALIA FIUCIUC
Tehnoredactor: ELLY GORUN
Coperta: ELLY GORUN

Bun de tipar: 16.03.1977; Coli de tipar 27; + 1 planșă.
Tiraj: 4100 + 20 + 75 exemplare legate. C.Z. 531.781



C. 573. I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu. nr. 23-25
București

CUPRINS

Volumul II

6. Studiul câmpurilor de tensiuni singulare cu ajutorul causticelor (acad. prof. dr. <i>P. S. Theocaris</i>)	567
6.1. Introducere	567
6.2. Principiul metodei	570
6.3. Curba causticei generată la extremitatea unei fisuri într-o placă din material plastic birefringent	579
6.4. Curba causticei generată la extremitatea unei fisuri într-o placă din material elastic și izotrop optic	582
6.5. Proprietățile curbelor caustice	583
6.6. Forma causticelor experimentale și determinarea coeficientu- lui de concentrare a tensiunilor	592
6.7. Causticele în cazul câmpurilor de tensiuni singulare create de fisuri	597
6.8. Caustice create de singularități ale forțelor	605
6.9. Pseudocausticele	610
6.10. Causticele în cazul câmpurilor de tensiuni nesingulare	614
6.11. Aplicații ale causticelor în plasticitate	618
6.12. Utilizarea causticelor la studiul singularităților complexe în cazul materialelor cvasiizotrope (composite)	626
7. Metoda lacurilor casante (prof. dr. doc. <i>D. R. Mocanu</i> , ing. <i>L. Năilescu</i>)	638
7.1. Noțiuni introductive	638
7.2. Lacuri casante și tehnica utilizării lor	639
7.3. Etalonarea lacurilor	659
7.4. Detectarea fisurilor în stratul de lac	664
7.5. Tensiunile din stratul de lac casant	666

7.6. Exemple de câmpuri de fisuri	669
7.7. Interpretarea cantitativă a câmpului de fisuri	674
7.8. Metoda lacurilor casante auxiliar al tensometriei electrice și al fotoelasticității	677
8. Determinarea experimentală a tensiunilor remanente	681
8.1. Originea și clasificarea tensiunilor remanente (prof. dr. doc. <i>D. R. Mocanu</i>)	681
8.2. Metode distructive și semidistructive (prof. dr. doc. <i>D. R. Mocanu</i> și dr. ing. <i>C. Burada</i>)	683
8.3. Metode distructive și semidistructive utilizate în cazul îmbinărilor sudate (prof. dr. doc. <i>D. R. Mocanu</i> , prof. dr. doc. <i>Vi. Popovici</i> , ing. <i>M. Băltănoiu</i>)	709
8.4. Metode nedistructive (prof. dr. doc. <i>D. R. Mocanu</i>)	725
8.5. Măsurarea tensiunilor remanente din straturile metalice depuse electrolitic (conf. dr. ing. <i>D. Horbaniuc</i>)	727
8.6. Utilizarea razelor X în tensometrie (prof. dr. ing. <i>M. Tripa</i>)	741
9. Utilizarea analogiilor electrice în tensometrie (dr. ing. <i>N. Iliescu</i>)	766
9.1. Elemente de teoria modelării	766
9.2. Modelarea electrică a câmpului fizic	770
9.3. Aplicații	787
10. Măsurări tensometrice pe modele	800
10.1 Noțiuni introductive (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	800
10.2. Bazele teoriei modelării (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i> , dr. ing. <i>N. Iliescu</i>)	802
10.3. Modelarea în problemele teoriei liniare a elasticității (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	809
10.4. Modelarea barelor, sistemelor de bare și a plăcilor (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	813
10.5. Proiectarea modelelor (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	822
10.6. Alegerea materialelor pentru modele (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	827
10.7. Executarea modelelor (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	830
10.8. Solicitarea modelelor (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	832
10.9. Testarea modelelor (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i>)	836
10.10. Aplicații (conf. dr. ing. <i>M. Modiga</i> și dr. ing. <i>N. Iliescu</i>)	837
11. Etalonarea tensometrelor (ing. <i>N. Fîntînaru</i>)	848
11.1. Etalonarea tensometrelor amovibile	848
11.2. Etalonarea traductoarelor rezistive	857
11.3. Etalonarea punților și a amplificatoarelor tensometrice	869
12. Prelucrarea statistică a datelor experimentale (prof. dr. ing. <i>M. Buga</i>, dr. ing. <i>I. Constantinescu</i>)	874

12.1. Generalități	874
12.2. Erori de măsurare	875
12.3. Repartiția normală a erorilor aleatorii de măsurare	876
12.4. Caracteristicile metrologice ale mijloacelor de măsurare	881
12.5. Prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor	883
12.6. Metoda celor mai mici pătrate	896
12.7. Prelucrarea datelor experimentale în cazul repartițiilor multi- dimensionale	898
12.8. Exemple de calcul. Concluzii.	900
13. Introducere în analiza tensiunilor prin elemente finite (dr. ing. I. Pascariu)	906
13.1. Noțiuni introductive	906
13.2. Elemente de algebră matriceală utile analizei prin elemente finite	910
13.3. Bazele teoretice ale analizei tensiunilor prin elemente finite	914
13.4. Etape ale calculului tensiunilor prin elemente finite.	920
13.5. Elemente finite izoparametrice	932
13.6. Aplicarea elementelor finite în cazul încovoierii plăcilor plane. Program de calculator	944
13.7. Probleme ale valorilor proprii (flambaj și vibrații)	953
Încheiere. Indicații privind alegerea metodelor și tehnicilor tenso- metrice (prof. dr. doc. ing. D. R. Mocanu, ing. L. Năilescu)	972
1. Principalele caracteristici ale metodelor și tehnicilor tensometrice	972
2. Indicații privind selectarea metodelor și tehnicilor tensometrice	978
3. Exemple de aplicații	979
Cuprinsul vol. 1	991
Cuprinsul vol. 1 și 2 în limba engleză	992

STUDIUL CÎMPURILOR DE TENSIUNI SINGULARE CU AJUTORUL CAUSTICELOR

Acad. prof. dr. P.S. THEOCARIS

6.1. INTRODUCERE

Analiza experimentală a stării plane de tensiuni în regiunile foarte deformate, cu o variație abruptă a pantei, a constituit întotdeauna o problemă dificilă pentru toate metodele experimentale. Metodele experimentale cunoscute pînă acum dau informații insuficiente asupra variației parametrilor care caracterizează starea plană a tensiunilor în regiunile foarte deformate, cum sînt, de exemplu, vecinătatea punctelor de aplicare a forțelor, vecinătatea punctelor unde există o discontinuitate geometrică a materialului sau în sfîrșit unde se află o discontinuitate a proprietăților mecanice ale materialului (structuri din materiale evasiizotrope *). În ultimul caz, al unui material compozit constituit dintr-un număr oarecare de sectoare de materiale diferite, punctul comun al vîrfurilor sectoarelor reprezintă un punct singular al cîmpului de tensiuni, caracterizat atît printr-o discontinuitate geometrică cît și printr-o discontinuitate a materialului. Soluțiile date de teoria liniară a elasticității, în acest caz, prezintă o comportare asimptotică a tensiunilor de ordin $O(r^{-\lambda})$ în punctul singular considerat, unde coeficientul λ este, în general, un număr complex, avînd partea reală pozitivă. Determinarea coeficientului λ este problema fundamentală a teoriei elasticității pentru punctele singulare.

Singularitatea cîmpului tensiunilor în domeniul elastic poate fi creată în condițiile următoare :

- a) Printr-o discontinuitate geometrică a cîmpului de tensiuni (fisură, creștătură, etc).
- b) Prin modul de încărcare (forțe concentrate sau discontinue).
- c) Printr-o discontinuitate geometrică a caracteristicilor elasto-mecanice ale materialului.

* Este vorba de structuri alcătuite din zone cu proprietăți elasto-mecanice diferite, numite de autor materiale compozite.

6.1.1. SINGULARITĂȚI DATORITE FORMEI GEOMETRICE A CÎMPULUI DE TENSIUNI

Variația asimptotică a tensiunilor în punctul singular care este creat în vârful comun al sectoarelor într-un material compozit este datorată discontinuității geometrice a constantelor elastice ale materialului care are loc la frontiera comună a celor două sectoare în contact. Ordinul de singularitate al cîmpului tensiunilor în punctul singular depinde de constantele elastice ale materialelor constitutive și de forma geometrică a sectoarelor.

Valoarea ordinului de singularitate $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ este determinată de rădăcinile λ_1 și λ_2 ale ecuației caracteristice. În raport cu valorile rădăcinilor λ_1 și λ_2 se pot deosebi următoarele cazuri :

a) Singularitatea de ordinul $O(r^{-1+\lambda_1})$ cînd rădăcina λ_1 a ecuației caracteristice este reală.

b) Singularitate de ordinul $O[r^{-1+\lambda_1} \cos(\lambda_2 \log r)]$ sau $O[r^{-1+\lambda_1} \sin(\lambda_2 \log r)]$, cînd λ este un număr complex.

c) Singularitate de ordinul $O(\log r)$, dacă ecuația caracteristică nu are rădăcini în intervalul $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ și, în plus, $dD/d\lambda = 0$ în punctul $\lambda = 1$.

Acestei categorii îi aparține cazul materialului compozit conținînd un sector de unghi α la vîrf. Pentru un unghi $\alpha = \pi$ valoarea rădăcinii λ este egală cu 1 și nu există singularitate deoarece singularitatea a fost definită ca $r^{(-1+\lambda)} = r^0 = 1$. Dacă unghiul $\alpha > \pi$, λ variază între valorile 1 și 0,5. Această ultimă valoare este atinsă în cazul în care $\alpha = \pi$. Acesta este cazul unei fisuri într-o placă izotropă și elastică unde singularitatea este de ordinul $r^{(-1+\lambda)} = r^{-0.5}$ cînd $r \rightarrow 0$.

6.1.2. SINGULARITĂȚI CREATE DE FORȚE EXTERIOARE APLICATE CÎMPULUI DE TENSIUNI

Este bine știut că o forță concentrată, aplicată unui punct al frontierei corpului elastic, crează o singularitate de ordinul r^{-1} . În același fel, o forță repartizată pe frontiera unui corp elastic după o lege oarecare, crează o singularitate de ordinul r^{-1} , care este datorată fie discontinuității coordonatei forței, fie numai discontinuității pantei forței într-un punct de pe frontiera corpului elastic încărcat.

6.1.3. SINGULARITĂȚI CREATE ÎN MATERIALELE COMPOSITE

În cazul general al unui compozit constituit din mai multe sectoare, singularitatea creată în vârful comun al muchiilor depinde de unghiul muchiilor și de proprietățile mecanice ale sectoarelor. Astfel, în cazul simplu a două sectoare sudate între ele, este bine cunoscut [31], [36], [37], [38], că valoarea coeficientului λ este cuprinsă între 1 (pentru care nu există singularitate) și 0,5 ($r^{-0.5+1} = r^{-0.5}$). Valoarea $\lambda = 0,5$ corespunde cazului unei fisuri într-o placă omogenă și izotropă, ca și cazului unui bisector în care cele două materiale sînt sudate între ele. Din contră,

în cazul în care contactul dintre cele două materiale este de natură coulombiană (frecare), ordinul de singularitate poate fi mai mic decât 0,5, în funcție de valoarea coeficientului de frecare [33], [34], [35]. Singularitatea, în acest caz, este mai accentuată când coeficientul de frecare crește. În cazurile precedente, pentru o formă geometrică dată a bi-sectorului, singularitatea crește (λ scade) în același timp cu diferența dintre caracteristicile elasto-mecanice ale celor două materiale. În cazul unei fisuri într-un bi-sector, fisura fiind cuprinsă într-un singur material și extremitatea sa atingând suprafața de separare a celor două materiale, ordinul de singularitate este mai mic de 0,5.

După cum se știe, metoda fotoelasticității, ca și metodele optice asemănătoare ce utilizează lumină polarizată, prezintă în regiunea puternic deformată a singularității cîmpului tensiunilor o mare concentrare a franjelor izocrome, care împiedică o evaluare precisă a tensiunilor. De asemenea, nu se cunoaște, pînă acum, dacă, în regiunea foarte deformată a singularității caracterizată printr-o variație bruscă a tensiunilor, indicele de refracție al materialului are o variație importantă, sau dacă el rămîne în această regiune, de asemenea, o funcție liniară de valorile tensiunilor principale. Este bine știut că analiza distribuției tensiunilor în regiunea restrînsă din vecinătatea punctului singular este foarte grea și complicată și că metoda de extrapolare a franjelor izocromatiche în vecinătatea acestei regiuni în jurul singularității scade exactitatea evaluării tensiunilor. Observații asemănătoare rămîn valabile pentru metoda holografiei interferometrice (vezi § 5.3), care dă un număr mai mare de franje în jurul punctului singular. În orice caz, această metodă dă și o precizie insuficientă pentru evaluarea coeficientului de concentrare a tensiunilor k în punctele singulare. Asupra metodei celei mai convenabile pentru evaluarea lui K există discuții în lucrările [41] și [42]. În ceea ce privește analiza tensiunilor în jurul punctelor singulare cu ajutorul franjelor moiré (vezi cap. 5), observațiile precedente rămîn valabile. Într-adevăr, ele sînt bine cunoscute datorită cercetărilor făcute în S.U.A., unde s-au folosit franjele moiré pentru determinarea coeficientului K și care au obținut rezultate valabile numai în cazurile cînd este cunoscut dinainte ordinul de singularitate [43].

În sfîrșit, tensometria electrică (vezi cap. 3) și extensometrele mecano-optice (vezi cap. 2) pot fi folosite la determinarea tensiunilor, departe de regiunea punctului singular, iar apoi, rezultatele obținute pot fi extrapolate printr-o metodă convenabilă de extrapolare în regiunea singularității. Smith și colaboratorii săi [39], [40] au aplicat metoda fotoelasticității pentru determinarea coeficientului K , dar nici rezultatele lor nu sînt satisfăcătoare.

Pentru determinarea exactă a parametrilor cîmpului de tensiuni în regiunea singularității, s-a dezvoltat o nouă metodă, numită *metoda causticelor*. După această metodă, regiunea vecină cu singularitatea dintr-o epruvetă transparentă sau opacă este luminată de către un fascicul de raze monocromatice, paralele, convergente sau divergente. Razele care sînt reflectate de suprafețele din față sau din spate ale epruvetei se împrăștie și formează, atunci cînd sînt proiectate pe un ecran paralel cu epruveta,

o curbă foarte luminoasă care se numește *caustică* și care reprezintă *înfășurătoarea urmelor acestor raze pe ecran*.

Reflexia razelor este supusă legilor opticii geometrice și, prin urmare, elementele geometrice ale curbei caustice sunt determinate de caracteristicile regiunii puternic deformate, adică de ordinul de singularitate a cîmpului tensiunilor și de coeficientul de concentrare a eforturilor K . Acești doi parametri caracteristici ai cîmpului de tensiuni pot fi determinați măsurînd elementele geometrice ale caustice (diametru, unghi, rază). Curba caustice care se formează pe ecran reprezintă o imagine exactă a regiunii puternic deformate a cîmpului tensiunilor și, în consecință, determinarea parametrilor caracteristici ai cîmpului tensiunilor cu singularitate, se face cu o mare precizie. Metoda causticelor este caracterizată, printre altele, printr-o mare simplitate care rezultă din principiul însuși al metodei. În afară de studiul punctelor singulare, această metodă este indicată pentru studiul distribuției tensiunilor în toate problemele cîmpurilor elastice de stare plană de solicitare.

În cele ce urmează vor fi înfățișate principiul și relațiile fundamentale ale metodei causticelor ca și o serie de aplicații practice ale acestei metode care vor sublinia superioritatea sa față de celelalte metode tensometrice în studiul punctelor singulare. Experiențele care vor fi prezentate în acest capitol au fost realizate în Laboratorul de rezistența materialelor de la Universitatea tehnică națională din Atena.

6.2. PRINCIPIUL METODEI

Se consideră o placă transparentă dintr-un material birefringent și o rază de lumină monocromatică și coerentă care întilnește placa într-un punct oarecare M , sub un unghi de incidență nul. Figura 6.1 reprezintă reflexiile și refracțiile succesive ale unei raze de lumină i într-o placă transparentă.

Raza de lumină va fi reflectată în mod consecutiv pe cele două fețe ale plăcii și, în același timp, ea traversează placa. Se notează cu k numărul de reflexii consecutive și cu l numărul de refracții consecutive ale aceleiași raze. În cazul razelor reflectate, acestea vor fi notate cu r_{1+0} ; $r_{(1+2)}$; $r_{(3+2)}$; $r_{(5+2)}$, ... etc., iar razele care traversează placa cu $t_{(0+2)}$; $t_{(2+2)}$; $t_{(4+2)}$; etc.

Intensitatea razelor de ordin $(k+1)$ notată cu $I_{(k+1)}$, se exprimă prin [2]

$$I_{(k+1)} = R^k (1 - R)^l I_i \quad (6.1)$$

unde R reprezintă coeficientul de reflexie [2] care este exprimat prin

$$R = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}^2 \quad (6.2)$$

unde n este indicele de refracție al materialului neîncărcat și I_i intensitatea luminii incidente. Este ușor de constatat că pentru plexiglas, de exemplu, care are un indice de refracție $n = 1,5$, $R = 0,04$. Pentru această valoare a lui R intensitatea razei $r_{(1+0)}$ reflectată pe suprafața

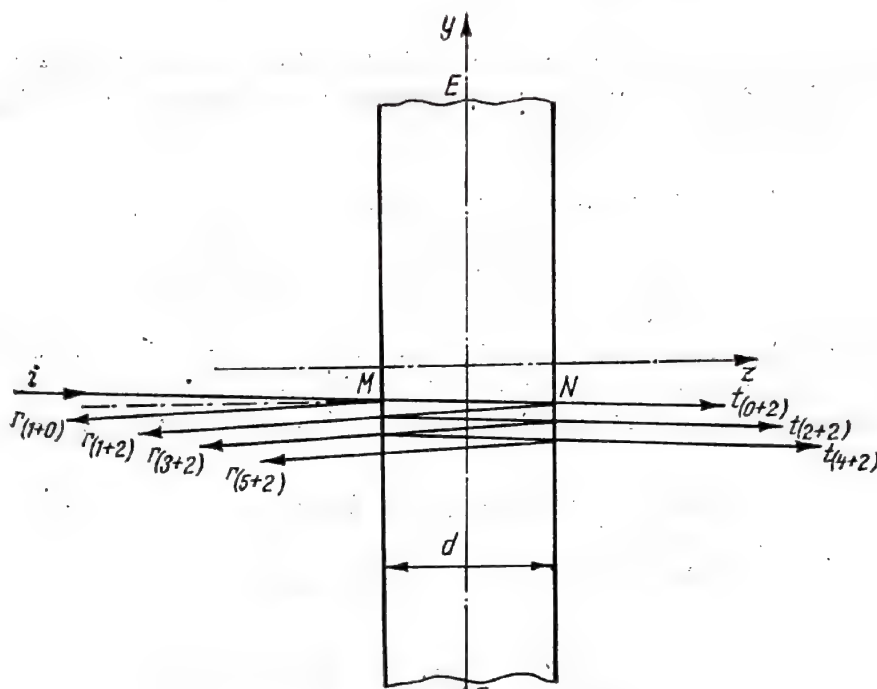


Fig. 6.1.

anterioară a plăcii ia valoarea $I_{r(1+0)} = 0,04 I_i$ și intensitatea razei $r_{(1+2)}$ reflectată pe fața posterioară a plăcii ia valoarea $I_{r(1+2)} = 0,03686 I_i$. Pentru raza de ordin $r_{(3+2)}$ rezultă că $I_{r(3+2)} = 0,00006 I_i$.

Ținând seama de această constatare, vor fi considerate numai razele $r_{(1+0)}$ și $r_{(1+2)}$, iar razele de ordin superior vor fi neglijate fiind nesemnificative.

Variația absolută a drumului optic pentru raza r_{1+2} în direcțiile tensiunilor principale, notate cu indicii 1 și 2 se exprimă prin

$$\Delta s_{r(1,2)} = 2 \left[(n_{1,2} - n) d + \left(n_{1,2} - \frac{1}{2} \right) \Delta d \right]. \quad (6.3)$$

În expresia (6.3) primul termen reprezintă dublul variației absolute a drumului optic pentru raza care traversează placa și al doilea termen reprezintă variația drumului optic datorat variației grosimii plăcii Δd .

Variația grosimii plăcii este dată de

$$\Delta d = -\frac{\mu d}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6.4)$$

în care μ exprimă coeficientul lui Poisson și E este modulul lui Young.

În mod analog, variația drumului optic pentru razele care traversează placa se exprimă după cum urmează

$$\Delta s_{t(1,2)} = (n_{1,2} - n) d + (n - 1) \Delta d. \quad (6.5)$$

Mărimile n_1 și n_2 reprezintă indicii de refracție de-a lungul direcțiilor principale. Variațiile indicilor n_1 și n_2 create de o încărcare a plăcii se exprimă prin legea lui Neumann [2]

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= (n_1 - n) = b_1 \varepsilon_1 + b_2 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \Delta n_2 &= (n_2 - n) = b_1 \varepsilon_2 + b_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (6.6)$$

unde b_1 și b_2 sînt constante optice, iar ε_1 , ε_2 și ε_3 , deformațiile specifice principale într-un punct oarecare M al plăcii.

Substituind în relațiile (6.3) și (6.5) expresiile (6.4) și (6.6) se obține

$$\Delta s_{r,1,2} = 2d (\alpha_r \cdot \sigma_{1,2} + \beta_r \cdot \sigma_{2,1}) \quad (6.7)$$

$$\Delta s_{t,1,2} = d (\alpha_t \cdot \sigma_{1,2} + \beta_t \cdot \sigma_{2,1})$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{1}{E} \left[b_1 - 2\mu b_2 - \mu \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \beta_r &= \frac{1}{E} \left[b_2 - \mu(b_1 + b_2) - \mu \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \alpha_t &= \frac{1}{E} [(b_1 - 2\mu b_2 - \mu(n - 1))] \\ \beta_t &= \frac{1}{E} [b_2 - \mu(b_1 + b_2) - \mu(n - 1)]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Notînd cu ξ coeficientul de anizotropie optică, aceste ultime relații iau forma

$$\Delta s_{r,1,2} = 2dc_r [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r(\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (6.9)$$

$$\Delta s_{t,1,2} = dc_t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t(\sigma_1 - \sigma_2)]$$

unde

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{\alpha_r + \beta_r}{2}; \quad \xi_r = \frac{\alpha_r - \beta_r}{\alpha_r + \beta_r} \\ c_t &= \frac{\alpha_t + \beta_t}{2}; \quad \xi_t = \frac{\alpha_t - \beta_t}{\alpha_t + \beta_t}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Se observă că variația drumului optic (relațiile (6.9)) este o funcție de suma și diferența tensiunilor principale și de constantele optice c_r și ξ_r (sau c_t și ξ_t).

Un material transparent și izotrop din punct de vedere optic este caracterizat prin următoarele condiții

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = b \\ \alpha_r &= \beta_r = c_r = \frac{1}{E} \left[b(1 - 2\mu) - \mu \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \alpha_t &= \beta_t = c_t = \frac{1}{E} [b(1 - 2\mu) - \mu(n - 1)] \\ \xi_t &= \xi_r = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

și, prin urmare,

$$\begin{aligned} \Delta s_{r_1} &= \Delta s_{r_2} = 2 dc_r(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \Delta s_{t_1} &= \Delta s_{t_2} = dc_t(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Razele de lumină, reflectate de către cele două fețe ale plăcii, care traversează placa, formează frontul de undă

$$S(x, y, z) = \text{const.} \quad (6.13)$$

Dacă se notează cu $s(x, y)$ drumul optic al razei cuprinse între cele două fețe ale plăcii, este valabilă relația

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \text{const.} \quad (6.14)$$

Deviația razei, care este produsă prin încărcarea plăcii, este materializată pe un ecran paralel cu placa situată la o distanță z_0 față de placă. Vectorul \bar{w} care exprimă această deviație este dat de teoria eiconalului după cum urmează [2]

$$\bar{w} = -z_0 \text{ grad } s(x, y). \quad (6.15)$$

Deoarece frontul de undă al razelor incidente pe planul median al plăcii este paralel cu acest plan se poate scrie că

$$s(x, y) = s_0 + \Delta s(x, y) \quad (6.16)$$

unde s_0 este o constantă și, prin urmare, $\text{grad } s_0 = 0$. Rezultă

$$\bar{w} = -z_0 \text{ grad } \Delta s(x, y). \quad (6.17)$$

În relația (6.17) trebuie să considerăm pentru variația $\Delta s(x, y)$ a drumului optic, expresia (6.9), pentru un material optic anizotrop și expresia (6.12) pentru un material optic izotrop.

În forma generală, deviația \bar{w} poate fi scrisă

$$\bar{w} = C \text{ grad } \{(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi (\sigma_1 - \sigma_2)\}. \quad (6.18)$$

Se subliniază că constantele C și ξ iau următoarele valori:
 $C = -2z_0 dc_r$; $\xi = \pm \xi_r$ pentru razele care sînt reflectate pe suprafața posterioară a plăcii (deviația notată cu \bar{w}_r).

$C = -z_0 dc_t$; $\xi = \pm \xi_t$ pentru razele care traversează placa (deviația \bar{w}_t).

Deviația razei de lumină reflectată de suprafața anterioară a plăcii și notată cu \bar{w}_f , poate fi determinată plecîndu-se de la unghiul φ , dat de legea lui Snell

$$\varphi = 2\alpha = 2 \text{ grad } \frac{\Delta d}{2} = -\frac{\mu d}{E} \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (6.19)$$

La o distanță z_0 deviația \bar{w}_f ia valoarea

$$\bar{w}_f = -z_0 \frac{\mu d}{E} \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6.20)$$

care rămîne aceeași atît pentru un material izotrop cît și pentru un material anizotrop.

În cazul unui material izotrop, $\xi = 0$, cele trei deviații \bar{w}_r , \bar{w}_t , \bar{w}_f iau forma generală

$$\bar{w} = C \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6.21)$$

unde mărimea C trebuie să fie înlocuită printr-una din valorile următoare

$$C = -2z_0 dc_r, \quad C = -z_0 dc_t$$

$$C = -z_0 dc_f, \quad \text{unde } c_f = \frac{\mu d}{E}. \quad (6.22)$$

Mărimea vectorială $\bar{w}(\bar{w}_r, \bar{w}_t, \bar{w}_f)$ este reprezentată pe ecran prin deviația $P'Q'$ (fig. 6.2) între imaginea P' a punctului P al plăcii înainte de a fi încărcată și poziția sa finală Q' .

Alegînd un sistem de coordonate ortogonale avînd ca origine punctul O_1 (fig. 6.2) și axele O_1x_1 și O_1y_1 situate pe planul ecranului și paralele cu direcțiile axelor principale Ox și Oy ale fisurii, deplasarea totală $\bar{W}(x, y)$ a razei reflectate sau traversînd placa, poate fi scrisă ca

$$\bar{W}(x, y) = x\bar{i}_1 + y\bar{j}_1 + \bar{w}(x, y).$$

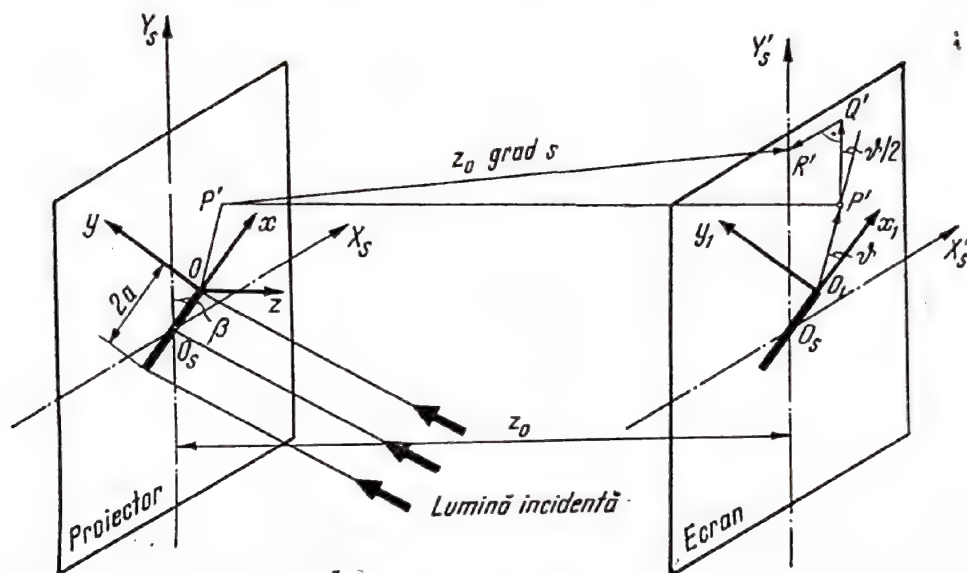


Fig. 6.2i

Folosind variabila complexă $z = x + iy$ unde $i = \sqrt{-1}$, expresia precedentă devine

$$W(z) = z + w(z) \quad (6.23)$$

unde

$$w(z) = C \text{ grad } \{(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 + \sigma_2)\} \quad (6.24)$$

$$w(z) = C \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] + i \frac{\partial}{\partial y} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \right\}. \quad (6.25)$$

Notînd cu x_1 și y_1 proiecțiile lui $W(z)$ pe axele O_1x_1 și respectiv O_1y_1 , cu relația (6.25) se obține

$$\begin{aligned} x_1 &= x + C \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma_1 - \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \right\} \\ y_1 &= y + C \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Dacă se consideră că $W(z)$ este raportat la un sistem de coordonate polare, definit prin relațiile

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

și ținând seama de următoarele formule de derivare

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

expresiile (6.26) devin

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta + C \left\{ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \right\} \\ y_1 &= r \sin \theta + C \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Relațiile (6.23), (6.26) și (6.27) sînt valabile pentru un fascicul de raze de lumină paralele. În cazul în care lumina este divergentă sau convergentă, trebuie să se țină seama de factorul de mărire λ definit prin

$$\lambda = \frac{z_f + z_0}{z_f} \quad (6.28)$$

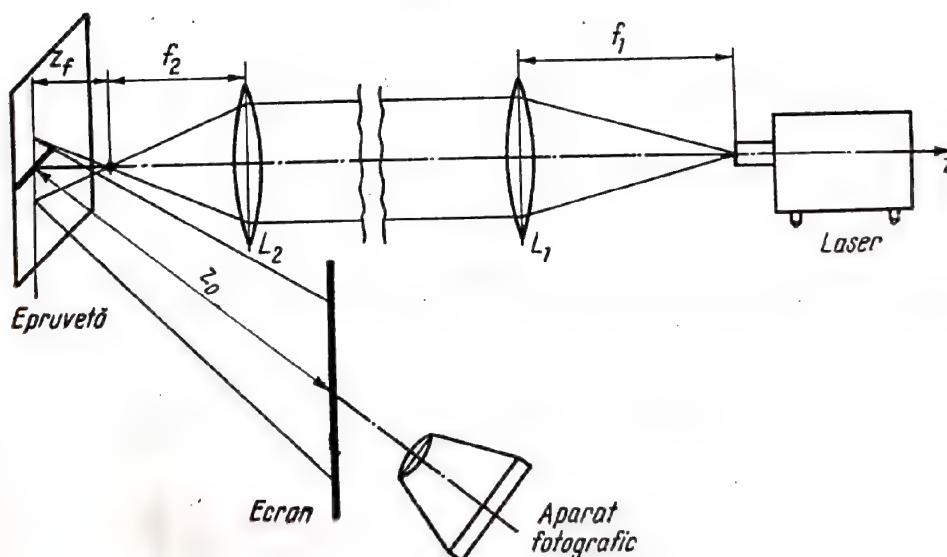


Fig. 6.3.

unde z_f este distanța dintre focarul fascicului și placa încărcată.

În fig. 6.3 este arătată schema sistemului optic.

Factorul λ se aplică relației (6.23) sub următoarea formă :

$$W = \lambda z + w(z). \quad (6.29)$$

Razele reflectate de cele două fețe ale plăcii sau care traversează această placă și care prezintă o deviație $W(z)$ datorată încărcării plăcii, formează pe ecranul receptor o curbă foarte luminoasă care se numește *caustică*. Această curbă este o curbă singulară pentru suprafața $W(z) = W(x, y)$ și condiția de existență a unei singularități se exprimă cu ajutorul determinantului lui Jacobi, care trebuie să fie nul. Acest determinant se exprimă după cum urmează

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.31)$$

Ecuațiile (6.30) sau (6.31) reprezintă *curba generatoare a causticei* care se numește „*curba inițială*” a causticei care se află pe placa încărcată. Ecuația causticei este exprimată prin sistemul fiecăreia dintre relațiile (6.30) sau (6.31) împreună cu relația (6.29).

Se pot distinge trei tipuri de *caustice*. Tipul F care este produs de reflexia razelor pe fața anterioară a plăcii. Tipul R care este produs de reflexia razelor pe fața posterioară a plăcii. Tipul T care este produs de razele care traversează placa.

Ecuațiile curbei inițiale și ale causticei pot fi considerabil prescurtate dacă starea de tensiune a plăcii se exprimă cu ajutorul funcției complexe $\Phi(z)$, dată de Muskhelishvili [27], sau funcția $Z(z)$ dată de Westergaard [28]. Este bine cunoscut că funcțiile $\Phi(z)$ și $Z(z)$ sînt funcții armonice și prin urmare satisfac condițiile Cauchy-Riemann, precum și ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{Re} \Phi(z)] = \frac{\partial}{\partial y} [\operatorname{Im} \Phi(z)], \quad \frac{\partial}{\partial y} [\operatorname{Re} \Phi(z)] = -\frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{Im} \Phi(z)], \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.33)$$

Astfel folosind funcția complexă $\Phi(z)$ și considerind $\xi = 0$, pentru un material izotrop din punct de vedere optic, relațiile (6.26) dau

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda x + C \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_1 + \sigma_2) \\y_1 &= \lambda y + C \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}\quad (6.34)$$

Suma tensiunilor principale se exprimă prin partea reală a funcției $\Phi(z)$ și astfel rezultă

$$(\sigma_1 + \sigma_2) = 4\operatorname{Re} \Phi(z) \quad (6.35)$$

Introducând expresia (6.35) în relațiile (6.34) se obține

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda x + 4C \frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{Re} \Phi(z)] \\y_1 &= \lambda y + 4C \frac{\partial}{\partial y} [\operatorname{Re} \Phi(z)].\end{aligned}\quad (6.36)$$

Ținând seama de ecuațiile (6.32), expresia caustice în variabile complexe ia forma

$$W(z) = x_1 + y_1 i = \lambda z + 4C \frac{[d\bar{\Phi}(z)]}{dz}. \quad (6.37)$$

Substituind relația (6.32) în ecuația (6.30), se obține

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} \lambda + C \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_1 + \sigma_2) & C \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ C \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_1 + \sigma_2) & \lambda + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{vmatrix} = \\&= \lambda^2 + \lambda C \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] + C^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \\& \quad - C^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 = 0.\end{aligned}$$

Ultima ecuație poate fi scrisă sub o formă prescurtată dacă se ține seamă de ecuațiile (6.32) și (6.33). Se obține astfel ecuația curbei inițiale

$$\frac{4}{\lambda} \left| C \frac{d^2 \Phi(z)}{dz^2} \right| = 1. \quad (6.38)$$

6.3. CURBA CAUSTICEI GENERATĂ LA EXTREMITATEA UNEI FISURI ÎNTR-O PLACĂ DIN MATERIAL PLASTIC BIREFRINGENT

Se consideră o placă subțire într-o stare plană de tensiuni din material elastic, avînd o izotropie mecanică și o anizotropie optică, conținînd o fisură de o formă arbitrară. În fig. 6.4 este arătată geometria fisurii

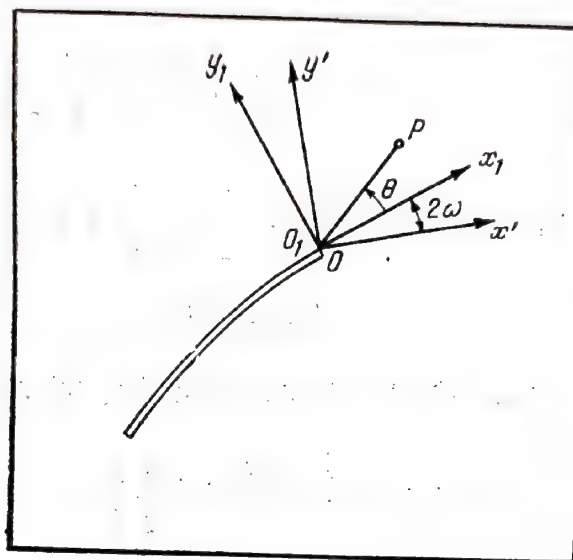


Fig. 6.4.

și a sistemului de coordonate. Se alege un sistem de coordonate carteziene și un alt sistem de coordonate polare avînd originile O în vîrfurile fisurii și direcția axei Ox tangentă la fisură. Este bine cunoscut, din teoria elasticității, că, pentru $r \rightarrow 0$, starea de tensiune în vecinătatea vîrfului fisurii este descrisă pentru primul mod de deformare a fisurii de formulele lui Sneddon [24]

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \sigma_{x_0} \quad (6.39. a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.39. b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (6.39. c)$$

unde K_I este coeficientul de concentrare a tensiunilor conform primului mod de deformare a fisurii și σ_{x_0} este tensiunea aplicată plăcii la infinit.

Folosind relațiile (6.39) se poate calcula expresia

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1 + \sigma_2) + \xi(\sigma_1 - \sigma_2) &= (\sigma_x + \sigma_y) + \xi |(\sigma_x - \sigma_y) - 2i\tau_{xy}| = \\
 &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \left(2 \cos \frac{\theta}{2} + \xi \sin \theta \right)
 \end{aligned} \quad (6.40)$$

care, fiind introdusă în ecuația (6.27), dă ecuațiile caustice

$$x_1 = r \cos \theta - C^* r^{-3/2} \left[\cos \frac{3\theta}{2} + \frac{3\xi}{4} \sin 2\theta \right] \quad (6.41)$$

$$y_1 = r \sin \theta - C^* r^{-3/2} \left[\sin \frac{3\theta}{2} + \frac{\xi}{4} (1 + 3 \cos 2\theta) \right]$$

unde

$$C^* = CK_I / (2\pi)^{1/2}. \quad (6.42)$$

Substituind relațiile (6.41) în relația (6.42), se obține

$$\frac{\partial(x_1 y_1)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta - \frac{3C^*}{2} r^{-5/2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + \frac{3\xi}{4} \sin \frac{\theta}{2} \right); \\ -r \sin \theta - \frac{3C^*}{2} r^{-3/2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} - \xi \cos 2\theta \right) \\ \sin \theta - \frac{3C^*}{2} r^{-5/2} \left[\sin \frac{3\theta}{2} - \frac{\xi}{4} (1 + 3 \cos 2\theta) \right]; \\ r \cos \theta + \frac{3C}{2} r^{-3/2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + \xi \sin 2\theta \right) \end{vmatrix} \quad (6.43)$$

care conduce la relația

$$\begin{aligned}
 r = \left\{ \frac{3C^*}{2} \left\{ -\frac{\xi}{4} \sin \theta + \left[1 + \frac{\xi}{4} \left(7 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + \frac{\xi^2}{32} (25 + 7 \cos 2\theta) \right]^{1/2} \right\} \right\}^{2/5}
 \end{aligned} \quad (6.44)$$

sau la expresia

$$r \equiv r_0 = \left[\frac{3C^*}{2} A \right]^{2/5} \quad (6.45)$$

unde

$$A = -\frac{\xi}{4} \sin \theta + \left\{ 1 + \frac{\xi}{4} \left(7 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{\xi^2}{32} (25 + 7 \cos 2\theta) \right\}^{1/2}. \quad (6.46)$$

Ecuatia curbei inițiale pentru un material birefringent arată influența coeficientului de anizotropie optică ξ asupra razei polare r care descrie curba.

Coordonatele unui punct al curbei caustice se obțin introducând expresia (6.44) pentru r , în relațiile (6.41). Se obține.

$$x_1 = \left(\frac{3C^*}{2} \right)^{2/5} \left\{ A^{2/5} \cos \theta + \frac{2}{3} A^{-2/5} \left[\cos \frac{3\theta}{2} + 3 \frac{\xi}{4} \sin 2\theta \right] \right\} \quad (6.47)$$

$$y_1 = \left(\frac{3C^*}{2} \right)^{2/5} \left\{ A^{2/5} \sin \theta + \frac{2}{3} A^{-2/5} \left[\sin \frac{3\theta}{2} - \frac{\xi}{4} (1 + 3 \cos 2\theta) \right] \right\}.$$

În cazul unui material izotrop din punct de vedere optic, unde $\xi = 0$ și constanta $A = 1$ (relația 6.46), expresia (6.45) a curbei inițiale devine

$$r = r_0 = \left[\frac{3C^*}{2} \right]^{2/5}. \quad (6.48)$$

Relațiile (6.47), care exprimă coordonatele causticei se reduc la

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{3C^*}{2} \right)^{2/5} \cdot \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ y_1 &= \left(\frac{3C^*}{2} \right)^{2/5} \cdot \left(\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Relația (6.48) reprezintă ecuația curbei inițiale, iar ecuațiile (6.49) exprimă coordonatele *causticei*, pentru un material izotrop din punct de vedere optic. În toate relațiile precedente unghiul θ ia valori

$$-\pi < \theta < +\pi$$

și valorile $\theta = \pm \pi$, care corespund celor două fețe ale fisurii.

6.4. CURBA CAUSTICEI GENERATĂ LA EXTREMITATEA UNEI FISURI ÎNTR-O PLACĂ DIN MATERIAL ELASTIC ȘI IZOTROP OPTIC

Se consideră o placă fisurată (fig. 6.4) într-o stare de solicitare plană care produce primele două moduri de deplasare relativă a celor două fețe ale fisurii (openig mode și edge-sliding mode).

Se notează cu K^* coeficientul complex de concentrare a tensiunilor care se exprimă prin

$$K^* = K_I - iK_{II} = |K^*| e^{-i\omega_0} \quad (6.50)$$

unde

$$\operatorname{tg} \omega_0 = K_{II}/K_I = \alpha \quad \text{și} \quad i = \sqrt{-1}. \quad (6.51)$$

K_I și K_{II} exprimă coeficienții de concentrare a tensiunilor pentru cele două moduri de deformare a fisurii.

Starea de tensiune în jurul punctului O (vîrfurile fisurii) este caracterizată, aproximativ, de funcția variabilei complexe [44]

$$\Phi(z) = \frac{K}{2\sqrt{2\pi z}} \quad (6.52)$$

care devine o relație exactă cînd $z \rightarrow 0$. Ecuațiile curbei inițiale și ale caustice generate în jurul punctului O , se obțin substituind primele două derivate ale funcției $\Phi(z)$ în relațiile (6.37) și (6.38).

Se obține astfel ecuația caustice

$$W = z - (\bar{K}C \bar{z}^{-3/2})/(\sqrt{2\pi}) \quad (6.53)$$

și ecuația curbei inițiale

$$\frac{3}{2\sqrt{2\pi}} |K| |C| r^{-5/2} = 1. \quad (6.54)$$

$$\text{Curba inițială este un cerc de rază : } r \equiv r_0 = \left(\frac{3 |K| |C|}{2\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5}. \quad (6.55)$$

Ținînd seama de relațiile (6.50), (6.52) și (6.55), ecuația caustice devine

$$W = r_0 \left[e^{i\theta} + \frac{2}{3} e^{i\left(\frac{3}{2}\theta + \omega\right)} \right] \quad (6.56)$$

unde cantitatea ω este definită ca : $\omega = \arg(-\bar{K}C) = \omega_0 + k\pi$; $(k = 0 \text{ pentru } C > 0 \text{ și } k = 1 \text{ pentru } C < 0)$. (6.57)

Coordonatele x_1 și y_1 ale unui punct oarecare al causticeii sînt exprimate prin

$$x_1 = r_0 \left[\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \left(\frac{3\theta}{2} + \omega \right) \right] \quad (6.58)$$

$$y_1 = r_0 \left[\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \left(\frac{3\theta}{2} + \omega \right) \right]. \quad (6.59)$$

Pentru o fisură în primul mod de deformare ($K_{II} = 0$) coeficientul complex de concentrare a tensiunilor se reduce la partea sa reală $K^* = K_I$.

În acest caz ecuația causticeii se obține considerînd $\omega = 0$ în relațiile (6.58) și (6.59). Astfel se obține

$$x_1 = r_0 \left[\cos \theta + \frac{2}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.60 \text{ a})$$

$$y_1 = r_0 \left[\sin \theta + \frac{2}{3} \sin \frac{3\theta}{2} \right]. \quad (6.60 \text{ b})$$

6.5. PROPRIETĂȚILE CURBELOR CAUSTICE

Ecuația (6.56) arată că curba inițială este un cerc în cazul unei plăci fisurate, alcătuită dintr-un material elastic și izotrop din punct de vedere optic. Ecuația causticeii (6.56), în raport cu sistemul de axe $O_1 x_1 y_1$, (fig 6.4), ia o formă simplificată în raport cu noul sistem de axe $O_1 x' y'$ care este definit de unghiul 2ω . Noua variabilă.

$$\theta' = (2\omega + \theta); \quad (-\pi + 2\omega < \theta' < \pi + 2\omega) \quad (6.61)$$

introdusă în ecuația (6.56), conduce la

$$W' = r_0 \left(e^{i\theta'} + \frac{2}{3} e^{i\frac{3}{2}\theta'} \right). \quad (6.62)$$

Proiecțiile ecuației (6.62) pe axele $O_1 x'$ și $O_1 y'$ dau coordonatele unui punct, care aparține causticeii

$$x' = r_0 \left(\cos \theta' + \frac{2}{3} \cos \frac{3}{2} \theta' \right) \quad (6.63a)$$

$$y' = r_0 \left(\sin \theta' + \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2} \theta' \right). \quad (6.63 \text{ b})$$

Ecuatiile caustice (6.62) sau (6.63) arată că forma causticei nu depinde de geometria și de sarcina plăcii fisurate. Numai dimensiunile caustice depind de acești factori menționați. În plus, se poate deduce din ecuațiile (6.60) că o caustică este simetrică în raport cu axa O_1x' numai în cazul în care $\omega = 0$, adică în cazul în care primul mod de deformare este activ la fisură (opening mode), pentru un material izotrop din punct de vedere optic. Figura 6.5 reprezintă caustica $DCBAB'CD'$ generată în jurul vâr-

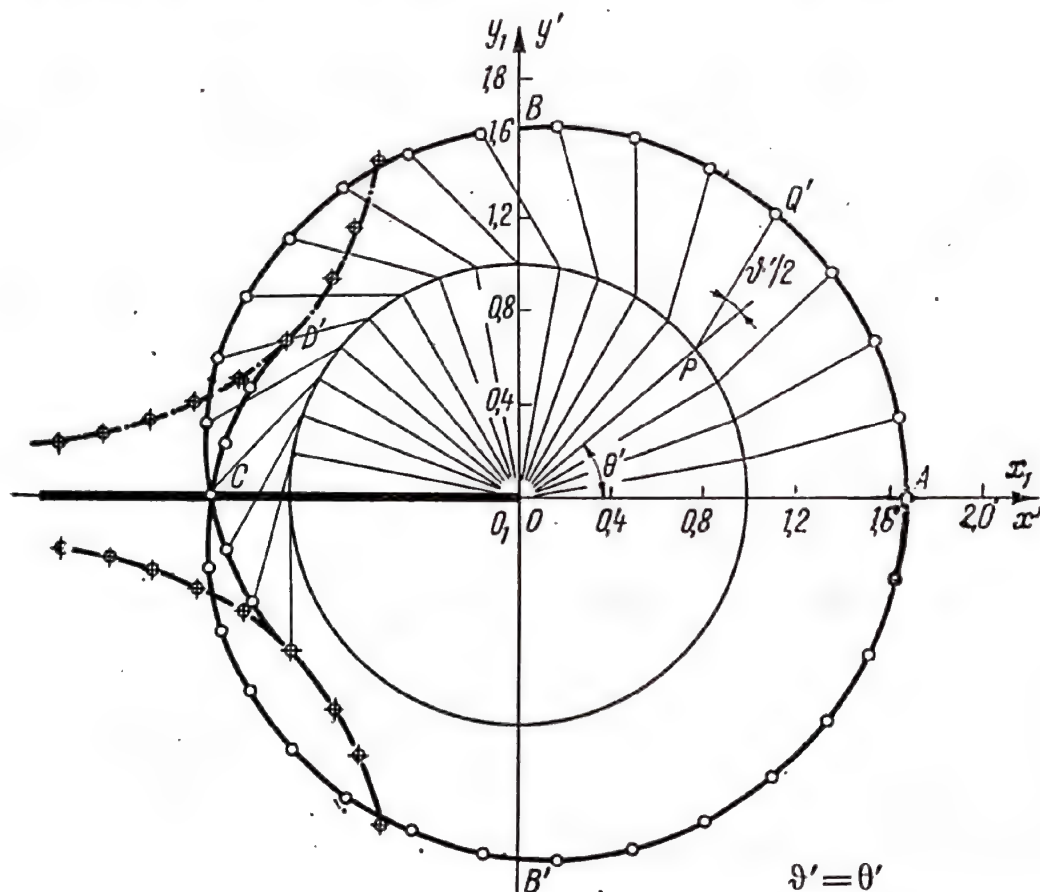


Fig. 6.5.

fului unei fisuri în cazul unui coeficient de concentrare a tensiunilor, K_I , real (unde $\omega = 0$ și $K_{II} = 0$).

Punctele D și D' sînt imaginile celor două fețe ale fisurii proiectate pe ecranul unde caustica este formată. Coordonatele punctelor D și D' sînt determinate de ecuațiile (6.60) considerînd $\theta = \pm \pi$. Rezultă deci

$$x' = -r_0 \quad (6.64)$$

$$y' = \pm (2r_0/3) \quad (6.65)$$

unde raza r_0 este dată de ecuația (6.55). În figura 6.5 valoarea constantei C este considerată ca negativă și coeficientul de concentrare a tensiunilor K este pozitiv și real.

O construcție geometrică ușoară rezultă din expresia (6.62). În fiecare punct P' al curbei inițiale de rază r_0 (relațiile 6.46) determinat de unghiul θ' (fig. 6.5), se trasează vectorul $P'Q'$ de lungime $2r_0/3$ și formînd un unghi $3\theta'/2$ cu axa Ox' .

Valoarea maximă a razei polare OQ' se află în punctul A al caustice pentru care $\theta' = 0$. Această valoare dă o rază ρ_{max} a caustice exprimată prin

$$\rho_{max} = \frac{5r_0}{3}. \quad (6.65)$$

Valoarea minimă a razei caustice se află pentru $\theta' = \pm \pi$ în punctele D și D' pentru care

$$\rho_{min} = \frac{\sqrt{13} r_0}{3}. \quad (6.66)$$

Raza polară a punctului C (fig. 6.4) se obține plecînd de la condiția $y' = 0$ care, prin ecuația (6.63 b), dă

$$\cos \frac{\theta'}{2} = \frac{1}{4}; \quad \theta' = \pm 151^\circ 3' \quad (6.67)$$

și mai departe

$$\rho_{mediu} = \frac{4r_0}{3}. \quad (6.68)$$

Diametrul longitudinal al caustice $D_l = CA$ (fig. 6.5) poate fi calculat și cu expresia :

$$D_l = \rho_{max} + \rho_{mediu} = 3r_0. \quad (6.69)$$

Coordonatele punctelor B și B' se obțin punînd $x' = 0$ în relațiile (6.63 a) și (6.63 b). În acest caz rezultă

$$\theta' = \pm 75^\circ 4' \quad \text{și} \quad \rho_s = 1,582 r_0 \quad (6.70)$$

În consecință diametrul transversal D_t al caustice este egal cu

$$D_t = 3,163 r_0. \quad (6.71)$$

Valorile maxime ale coordonatelor unui punct al caustice se obțin cu ajutorul condițiilor $dx'/d\theta = 0$ și $dy'/d\theta = 0$. Aceste condiții, introduse în relațiile (6.63), dau

$$\sin \theta' + \sin \frac{3\theta'}{2} = 0 \quad (6.72)$$

$$\cos \theta' + \cos \frac{3\theta'}{2} = 0. \quad (6.73)$$

Adăugînd condiția $-\pi < \theta' < \pi$, ecuațiile (6.72) și (6.73) dau următoarele valori pentru unghiul θ' .

$$\theta' = 0^\circ; \quad \theta' = \pm 144^\circ \quad \text{și} \quad \theta' = \pm 72^\circ. \quad (6.74)$$

Înlocuind valorile (6.74) în ecuațiile (6.63) se obține

$$x'_{max} = \frac{5r_0}{3} = \rho_{max}; \quad x'_{min} = 1,348 r_0$$

$$y'_{max} = y'_{min} = 1,585 r_0. \quad (6.75)$$

Dreptunghiul circumscris curbei caustice are următoarele laturi

$$D_i^{max} = x'_{max} - x'_{min} = 3,015 r_0$$

$$D_t^{max} = y'_{max} - y'_{min} = 3,170 r_0 \quad (6.76)$$

care diferă foarte puțin de diametrele longitudinal și transversal date de relațiile (6.69) și (6.71). Diametrele (6.67) reprezintă elemente caracteris-

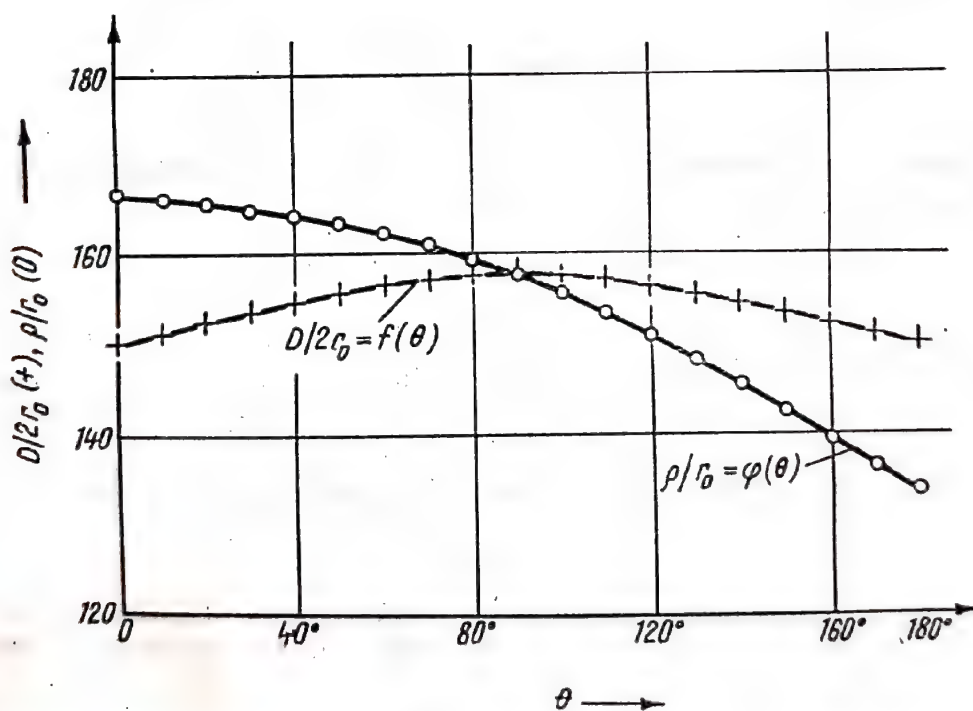


Fig. 6.6.

tice ale caustice care vor fi folosite pentru determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor în vârful fisurii. Figura (6.6) reprezintă grafic, variația diametrului D și a razei polare ρ în funcție de unghiul θ .

Raza ρ este dată de

$$\rho = \frac{r_0}{3} \left(13 + 12 \cos \frac{\theta'}{2} \right)^{1/2}. \quad (6.77)$$

Introducând expresia $W' = \rho' e^{i\varphi'}$, ecuația (6.53) devine

$$\rho' = r_0 \left[e^{i(\theta' - \varphi')} \pm \frac{2}{3} e^{i(3\theta'/2 - \varphi')} \right]. \quad (6.78)$$

Această ecuație poate fi despărțită în două ecuații parametrice

$$\begin{aligned} \rho' &= r_0 \left[\cos(\theta' - \varphi') \pm \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3}{2}\theta' - \varphi'\right) \right] \\ 0 &= r_0 \left[\sin(\theta' - \varphi') \pm \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3}{2}\theta' - \varphi'\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Ultima ecuație dă valoarea unghiului φ'

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{y'}{x'} = \frac{3 \sin \theta' + 2 \sin \frac{3}{2} \theta'}{3 \cos \theta' + 2 \cos \frac{3}{2} \theta'}. \quad (6.80)$$

Se poate pune, de asemenea, $W = \rho e^{i\varphi}$ și din ecuația (6.56) se obține

$$\rho = r_0 \left[e^{i(\theta - \varphi)} + \frac{2}{3} e^{i(3\theta/2 + \omega - \varphi)} \right]. \quad (6.81)$$

Separînd partea reală de partea imaginară a relației (6.81) se obține

$$\begin{aligned} \rho &= r_0 \left[\cos(\theta - \varphi) + \frac{2}{3} \cos(3\theta/2 + \omega - \varphi) \right] \\ 0 &= r_0 \left[\sin(\theta - \varphi) + \frac{2}{3} \sin(3\theta/2 + \omega - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (6.82)$$

Din ultima ecuație se obține

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{3 \sin \theta + 2 \sin(3\theta/2 + \omega)}{3 \cos \theta + 2 \cos(3\theta/2 + \omega)}. \quad (6.83)$$



Ecuatia (6.63) arată coordonatele caustice ca fiind funcție periodică de unghiul θ' avînd perioada egală cu 4π .

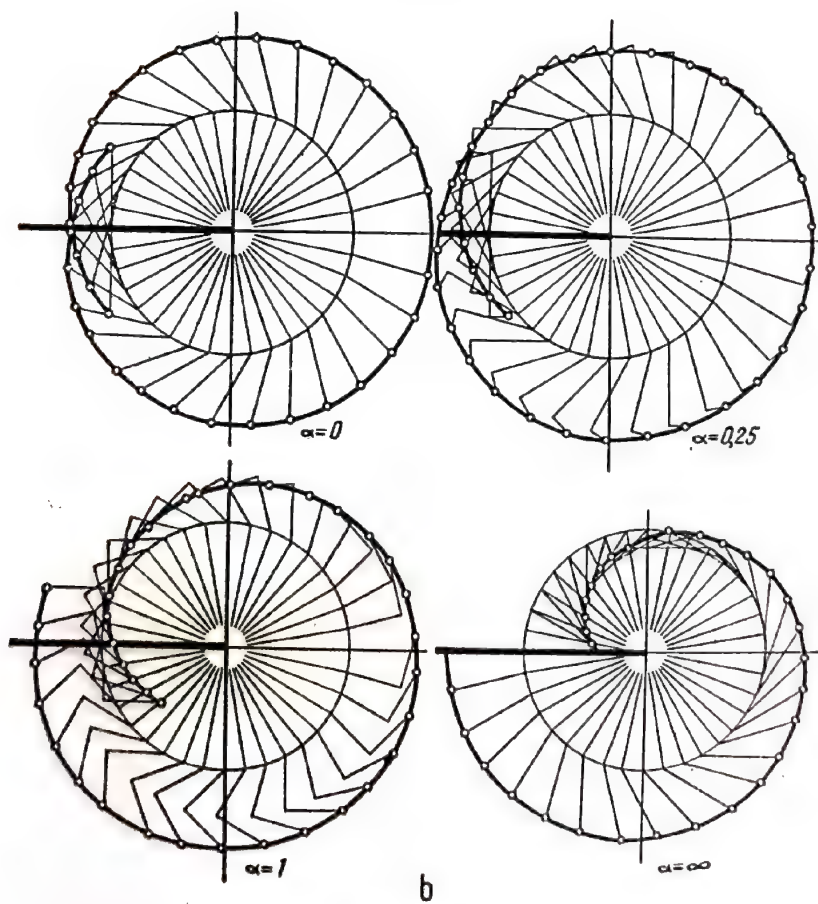
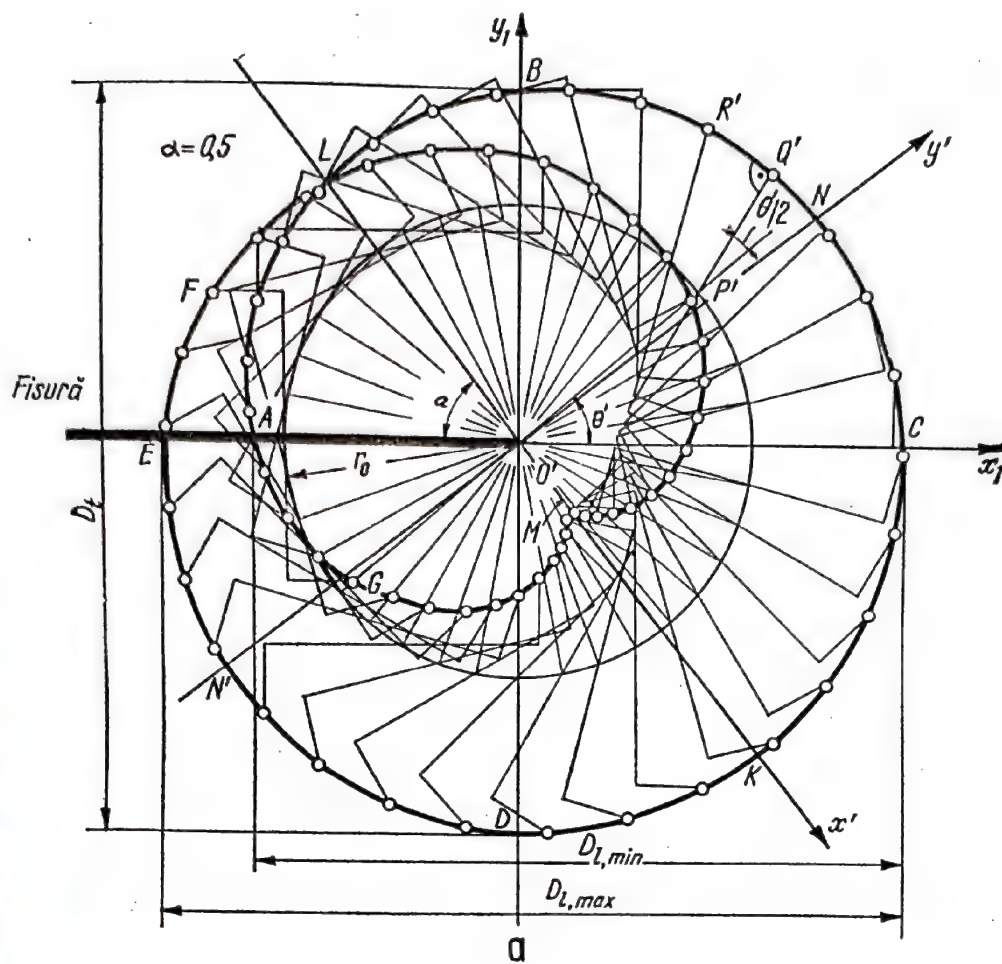


Fig. 6.8.

Valorile maxime și minime ale razei polare se găsesc pentru $\theta' = 0$ (punctul A') și $\theta' = 2\pi$ (punctul A)

$$\rho_{max} = \frac{5r_0}{3}; \quad \rho_{min} = \frac{r_0}{3} \quad (6.84)$$

Valoarea razei mijlocii a punctului C este egală cu

$$\rho_{mediu} = \frac{4r_0}{3} \quad (6.85)$$

Conform relației (6.56) coeficientul $\alpha = \tan \omega = K_{II}/K_I$ influențează dimensiunile și forma causticei și, în plus, unghiul format între axa de simetrie a causticei și tangenta la vârful fisurii.

Figura 6.8 prezintă cinci tipuri de înfășurări principale (caustice) și geometria formării lor pentru diferite valori ale coeficientului α . Curba care corespunde valorii $\alpha = 0$ este simetrică în raport cu direcția tangentei la fisură în vârful ei. Pentru $\alpha \neq 0$ toate curbele sînt asimetrice față de axa fisurii. În plus, pentru o valoare α crescătoare, suprafața conținută de către ramura principală a causticei este descrescătoare.

Această proprietate este, de asemenea, ilustrată prin variația diametrului în funcție de parametrul α , care este reprezentată în figura 6.9. Se poate vedea în această figură că diametrul transversal raportat la raza curbei inițiale r_0 variază între $D_t/r_0 = 3,16$ și $D_t/r_0 = 2,55$ pentru valori ale coeficientului α între $\alpha = 0$ și $\alpha = \infty$. În aceeași figură sînt, de ase-

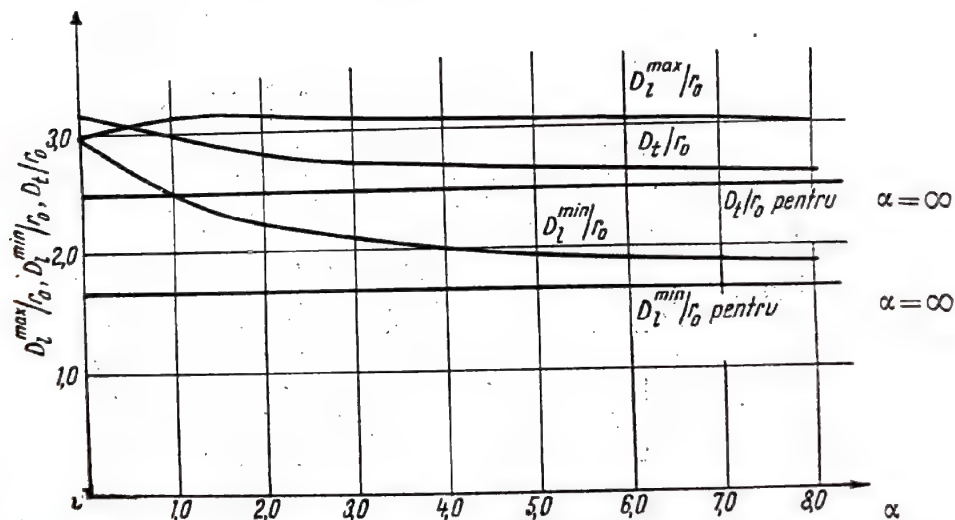


Fig. 6.9.

menea, trasate variațiile rapoartelor D_t^{max}/r_0 și D_t^{min}/r_0 în funcție de α . Fiecare curbă a causticei are proprietăți bine determinate de către valoarea parametrului α și, în consecință, este ușor să se determine valoarea acestui parametru cu ajutorul causticei corespunzătoare. În acest scop este mai indicat să se aleagă raportul $(D_t^{max} - D_t^{min})/D_t^{max}$, care este reprezentat în fig. 6.10 ca funcție de coeficientul α .

Cunoscând raportul precedent, determinat pe fotografia causticei, se poate evalua coeficientul α cu ajutorul curbei din fig. 6.10. Valoarea astfel găsită pentru α , este introdusă în diagrama din figura 6.9 pentru a determina rapoartele $\delta_l^{max} = D_l^{max}/r_0$; $\delta_l^{min} = D_l^{min}/r_0$ și $\delta_l = D_l/r_0$, care sînt utile, în continuare, pentru determinarea razei curbei inițiale r_0 .

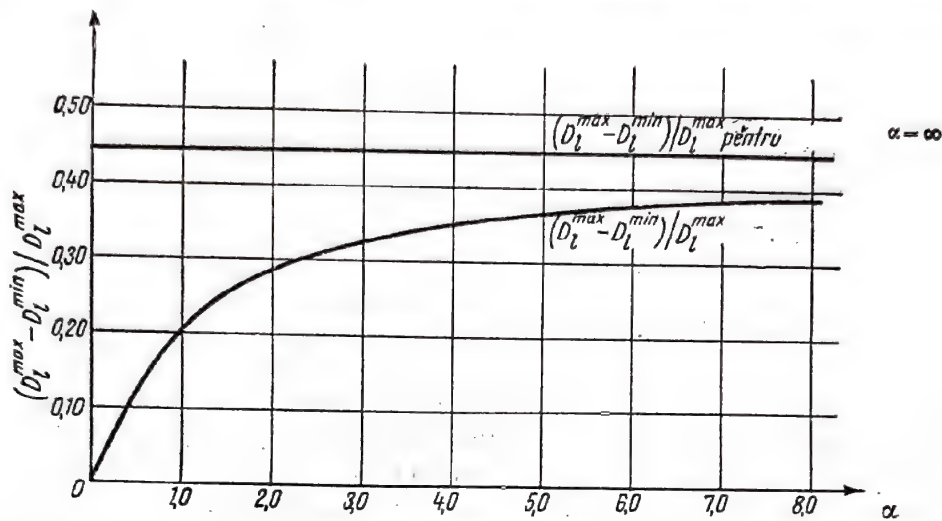


Fig. 6.10.

În plus, este de remarcă că curba causticei care este reprezentată în figura 6.8, a are o construcție geometrică foarte simplă. Într-adevăr, dacă se transformă ecuațiile (6.58) și (6.59) ținând seama de relațiile (6.50) și (6.45) se obțin coordonatele x_1 și y_1 ale fiecărui punct al causticei cu relațiile

$$\begin{aligned} x_1 &= r_0 \left[\cos \theta \pm \frac{2}{3\sqrt{1+\alpha^2}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - \alpha \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ y_1 &= r_0 \left[\sin \theta \pm \frac{2}{3\sqrt{1+\alpha^2}} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \alpha \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Relațiile (6.86) arată că fiecărui punct P' al curbei inițiale care face un unghi θ' cu axa Ox , i se trasează un vector $P'Q'$ de lungime $\frac{2r_0}{3}(1 + \alpha^2)^{-1/2}$ care face un unghi $3\theta/2$ cu axa Ox și, mai departe, un vector $P'Q'$ perpendicular pe acesta, de lungime $\frac{2r_0}{3}|\alpha|(1 + \alpha^2)^{-1/2}$.

În cazul unei fisuri rectilinii de lungime $2a$ și pătrunsă într-o placă încărcată la infinit de o tensiune σ_m care face unghiul β cu fisura, coeficientul de concentrare a tensiunilor se exprimă [3] prin

$$K = -i\sigma_m \sqrt{\pi a} \sin \beta e^{i\beta} \quad (6.87)$$

care poate fi scrisă sub forma

$$K_I = \sigma_m \sqrt{\pi a} \cdot \sin^2 \beta; \quad K_{II} = \sigma_m \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (6.88)$$

sau sub forma

$$|K| = \sigma_m \sqrt{\pi a} \sin |\beta|; \quad \alpha = \frac{K_{II}}{K_I} = \operatorname{ctg} \beta. \quad (6.89)$$

Pentru $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 0$ coeficientul K este un număr real. Introducând formula (6.89) în relația (6.55) se obține

$$r = r_0 = \left(\frac{3}{2} \sigma_m \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot |\sin \beta| \cdot |C| \right)^{2/5}.$$

Această formulă arată că pentru $\beta = 0$ nu există caustică. Curba caustică are forma completă pentru $\beta = 90^\circ$. Pentru $\beta \neq 0$, curba caustică se rotește în jurul axei fisurii cu un unghi $(180^\circ - 2\beta)$ în sens negativ (fig. 6.7). Se mai poate observa că axa de simetrie a causticei și a fisurii sînt două drepte simetrice față de direcția tensiunii σ_m aplicată plăcii la infinit.

6.6. FORMA CAUSTICELOR EXPERIMENTALE ȘI DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE CONCENTRARE A TENSIUNILOR

Se consideră o placă de plexiglas fisurată, pentru care, cu ajutorul sistemului optic reprezentat în figura 6.3 s-au obținut cele trei tipuri de caustice notate prin F , R și T (vezi § 6.2).

Ținînd seama că pentru plexiglas constantele optice care intră în relațiile (6.22) au valorile [5]

$$\begin{aligned} c_t &= -1,01 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{daN} \\ c_r &= -3,24 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{daN} \\ c_f &= -1,21 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{daN} \end{aligned} \quad (6.90)$$

relația (6.55) dă pentru razele curbilor inițiale rapoartele

$$r_t : r_r : r_f = 1,024 : 1,596 : 1,039 \quad (6.91)$$

Dacă ecranul este așezat între sursa de lumină și placa fisurată, se pot observa două caustice, adică tipurile F și R . Pentru a observa tipul T , ecranul trebuie să fie așezat în spatele plăcii. Figura 6.11 arată cele trei tipuri de curbe inițiale și de caustice. Astfel, curba inițială și caustica

($H'I'AIH$) formată prin reflexia razelor pe fața anterioară a plăcii (C negativ) sînt însemnate prin semnul (\times). Curba inițială și caustica ($E'CD'A'DCE$) formată prin reflexia razelor pe fața posterioară (C pozitiv) sînt însemnate prin semnul ($+$) și curba inițială și caustica ($GC'F'A''FC'G'$) formată prin razele care traversează placa (C pozitiv) sînt însemnate prin semnul (\circ). Se poate observa, pe această figură, că curba cea

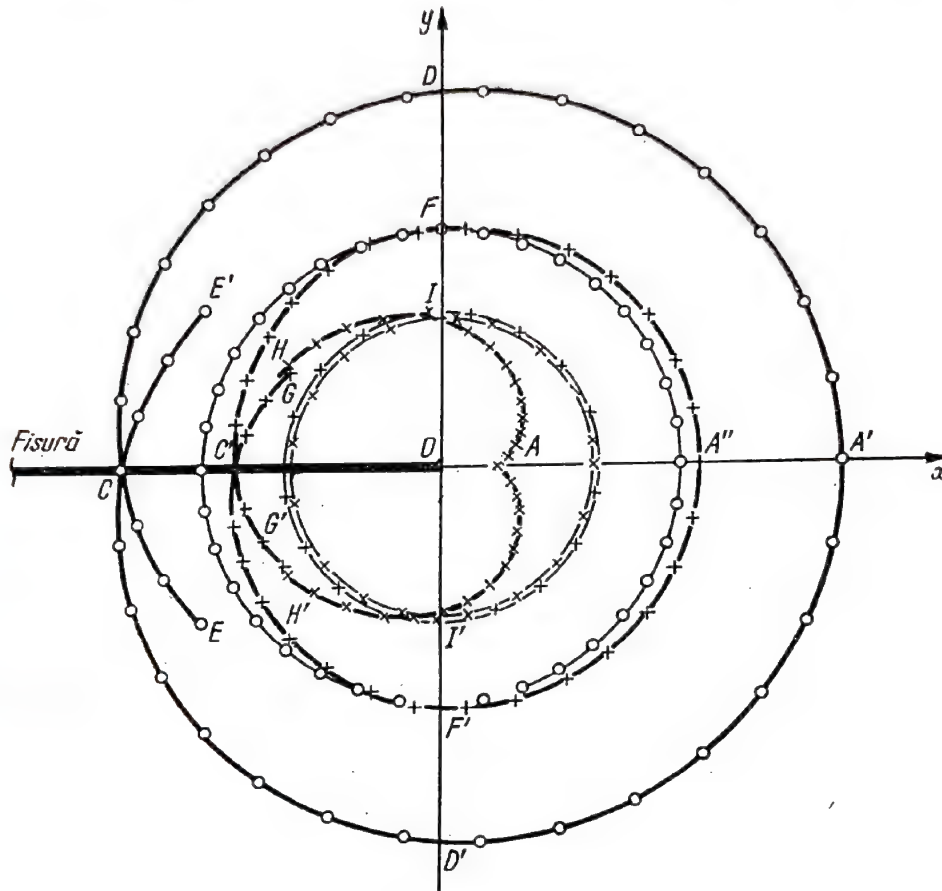
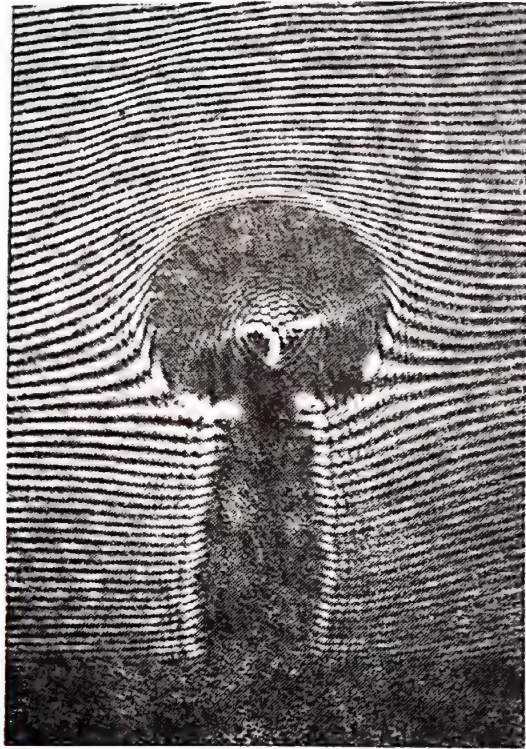


Fig. 6.11.

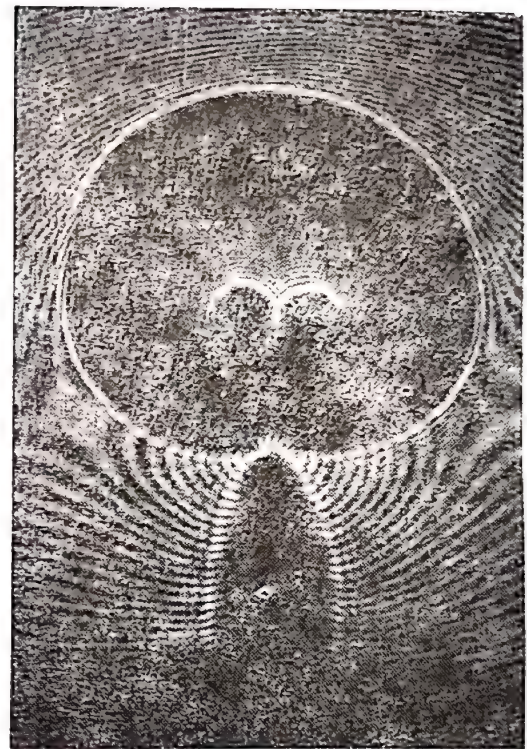
mai mare a causticei este produsă de razele reflectate de suprafața posterioară a plăcii (tip R). Prin urmare, această curbă este cea mai sensibilă la variația condițiilor de încărcare a plăcii și ea este indicată a fi folosită. Pentru razele polare δ'_{min} , ρ_{max} și ρ'_{mediu} și, de asemenea, pentru diametrele celor trei tipuri de caustice sînt îndeplinite următoarele condiții

$$\begin{aligned} (\rho'_{min,t}) &= (r_{0,t})/3; & (\rho'_{mediu,t}) &= 4_0(r_{0,t})/3 \\ (\rho'_{max,t}) &= -5(r_{0,t})/3; & (D_{l,t,t}) &= 3(r_{0,t,t}); & (D_{t,t,t}) &= 3,163(r_{0,t,t}). \end{aligned} \quad (6.92)$$

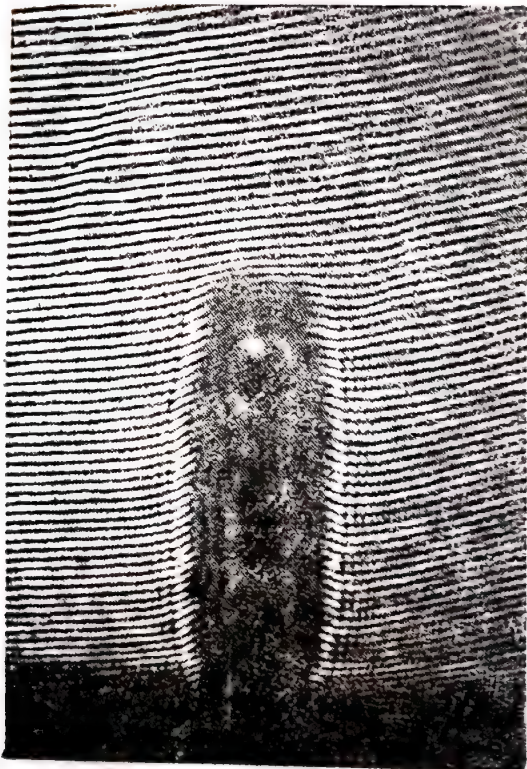
Este interesant de observat că, deși curba causticei teoretice este o curbă continuă de perioadă 4π , unde partea exterioară aparține reflexiilor de pe fața posterioară a plăcii și partea inferioară aparține reflexiilor de



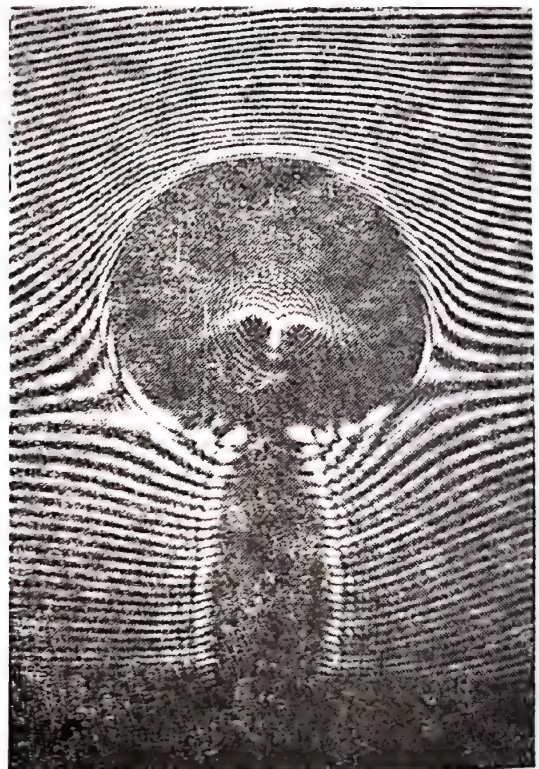
a)



b)



c)



d)

Fig. 6.12.

pe fața anterioară a plăcii. Caustica obținută experimental se împarte în două părți separate care se termină în punctele E și E' pentru partea exterioară și punctele H și H' pentru partea interioară.

În diferite cazuri curbele caustice experimentale au fost obținute folosind montajul experimental din figura 6.3. Astfel, în figura 6.12 se prezintă interferograma și causticele formate la vârful unei fisuri într-o placă de plexiglas supusă la o tensiune de întindere σ într-o direcție perpendiculară pe fisură, pentru diferite valori ale tensiunii aplicate. Caracteristicile plăcii sînt: lărgimea $b = 47,6$ mm, grosimea 2,8 mm, lungimea fisurii $a = 5$ mm. Lungimea fisurii este considerată mică față de lungimea plăcii, în așa fel ca distribuția tensiunilor în jurul vârfului fisurii să nu fie influențată de marginea din față a plăcii. Distanța între maginile fisurii este de ordinul a 0,3 mm. Caracteristicile dispozitivului optic utilizat sînt: distanța focală a lentilelor $f_1 = f_2 = 110$ cm, $z_f = 15,5$ cm și $z_0 = 116,5$ cm (fig. 6.3).

În figura 6.13 curba causticei generată pe o placă din bronz este prezentată ca avînd caracteristici geometrice identice cu placa de plexiglas, dar la care sistemul optic din figura 6.3 a fost schimbat în felul următor: placa a fost așezată la o distanță z_f negativă față de lentila L_2 și ca urmare factorul de mărire λ este negativ. Pe ecran se observă numai caustica produsă prin reflexia razelor pe suprafața anterioară a plăcii, care are forma curbei exterioare din figura 6.12.

În sfîrșit, în figura 6.14 sînt reprezentate causticele generate la extremitatea unei fisuri create într-o placă de plexiglas sub acțiunea unei forțe de tracțiune, pentru o valoare a unghiului $\beta = 45^\circ$. Se poate evalua în această figură unghiul de rotație a axei de simetrie a curbei caustice față de direcția fisurii.

Proprietățile causticelor dau posibilitatea determinării coeficientului de concentrare a tensiunilor la extremitatea unei fisuri într-o placă oarecare supusă la o stare plană de tensiune. Determinarea coeficientului global K cere cunoașterea celor două mărimi, fie valoarea sa absolută $|K|$ și raportul $\alpha = (K_{II}/K_I) = \tan \omega$ (relațiile (6.50) și (6.51)), fie componentele sale: reală K_I și imaginară K_{II} . Pentru a rezolva problema, din punct de vedere practic, trebuie să se măsoare pe curba causticei două mărimi în dependente. Aceste mărimi pot fi fie diametrele D_t^{max} și D_t^{mi} , fie diametrul D_t^{max} și unghiul care este format de direcția fisurii cu axa de simetrie a causticei (vezi § 6.5). Mărimile care sînt măsurate pe curba causticei trebuie să fie reduse la parametrul λ al sistemului optic, care a fost folosit în timpul experiențelor.

Aplicînd formulele de la paragraful 6.5, se poate găsi raza curbei inițiale cu ajutorul diametrului transversal D_t^{max}

$$r_0 = D_t^{max}/3,163 \quad (6.93)$$

și modulul coeficientului K .

$$|K| = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3|C|} \cdot \left(\frac{D_t^{max}}{3,170} \right)^{5/2} = \frac{0,0934 (D_t^{max})^{5/2}}{|C|} \quad (6.94)$$

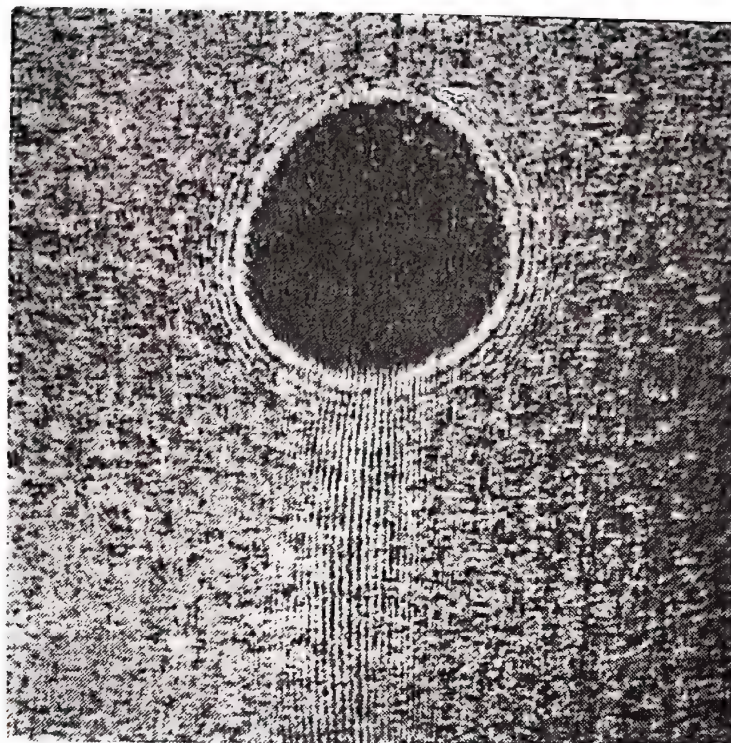


Fig. 6.13.



Fig. 6.11.

Cu ajutorul celor două diametre D_t^{max} și D_t^{min} se poate determina pe diagrama din figura 6.10 raportul $K_{II}/K_I = \alpha$ și, mai departe, cu ajutorul relației (6.94), partea reală K_I și imaginară K_{II} a coeficientului de concentrare a tensiunilor. Într-adevăr, deoarece $K = K_I - iK_{II}$ se poate scrie.

$$|K| = [(K_I)^2 + (K_{II})^2]^{1/2} = K_I(1 + \alpha^2)^{1/2} = K_{II} \frac{(1 + \alpha^2)^{1/2}}{\alpha} \quad (6.95)$$

Înlocuind (6.95) în (6.94) se obține

$$K_I = \frac{0,0934 (D_t^{max})^{5/2}}{|C| (1 + \alpha^2)^{1/2}} \quad (6.96)$$

$$K_{II} = \frac{0,0934\alpha (D_t^{max})^{5/2}}{|C|(1 + \alpha^2)^{1/2}} \quad (6.97)$$

În felul acesta, cu ajutorul elementelor geometrice ale caustice obținute experimental, se pot determina coeficienții de concentrare K la extremitatea unei fisuri într-o placă oarecare.

6.7. CAUSTICELE ÎN CAZUL CÎMPURILOR DE TENSIUNI SINGULARE CREATE DE FISURI

În acest capitol sînt prezentate rezultatele cercetărilor experimentale efectuate pentru stabilirea coeficientului de concentrare a tensiunilor la extremitatea fisurilor, folosind metoda causticelor pentru diferite cazuri de plăci fisurate. În acest scop s-a folosit curba caustice formate prin reflexia razelor de către fața posterioară a plăcii. Rezultatele experimentale au fost comparate cu datele teoretice furnizate de alte cercetări, în cazurile în care existau soluții pentru probleme particulare.

6.7.1. PLĂCI CONȚINÎND O FISURĂ CENTRALĂ

Geometria plăcii este prezentată în figura 6.15. Unghiul β al axei fisurii cu direcția forței aplicată plăcii ia următoarele valori: $\beta = 90^\circ$; 75° ; 60° ; 45° ; 30° și 15° . Grosimea plăcii $d = 1,81$ m și lățimea $b = 50$ mm. Lungimea fisurii $2a = 10$ mm. Dimensiunile plăcii și ale fisurii au fost alese în așa fel ca raportul b/a să nu aibă influență sensibilă asupra distribuției tensiunilor în jurul vîrfului fisurii. Factorul de mărire λ al sistemului optic a fost $\lambda = 6$. În cazul reprezentat în figura 6.15 coeficientul de concentrare a tensiunilor este complex (relațiile 6.50). Dacă axa OX coincide cu direcția fisurii, partea reală K_I a coeficientului K corespunde primului

mod de deplasare a celor două fețe ale fisurii și K_{II} celui de-al doilea mod. Soluția teoretică pentru o placă fisurată de dimensiuni limitate cu un raport dintre lungimea fisurii și lărgimea plăcii egal cu $\frac{2a}{b} = 0,2$ dă următoarele valori pentru componentele coeficientului K [25]

$$K_I = 1,02 \sigma_m (\pi a)^{1/2} \sin^2 \beta \quad (6.98 \text{ a})$$

$$K_{II} = 1,02 \sigma_m (\pi a)^{1/2} \sin \beta \cos \beta. \quad (6.98 \text{ b})$$

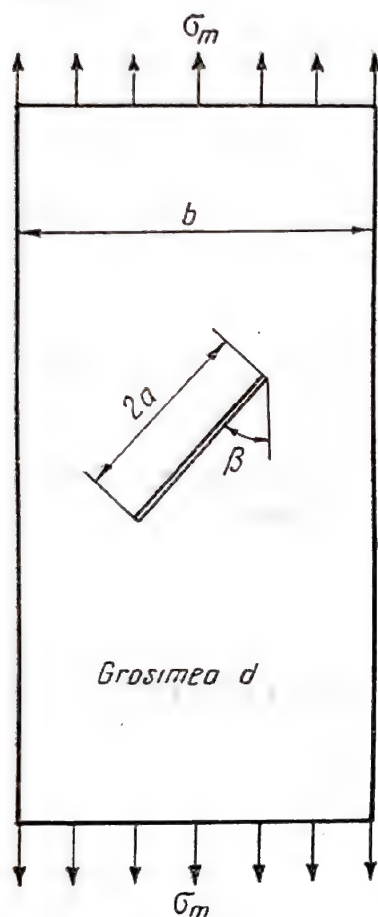


Fig. 6.15.

Valorile pentru K_I și K_{II} calculate [12] cu relațiile precedente, ca și valorile obținute măsurînd diametrele causticelor din figura 6.16 sînt reprezentate grafic în diagrama din figura 6.17 pentru diferite valori ale unghiului β ($\beta = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ și 15°). Figura 6.16, a arată variația coeficientului K_I , în funcție de σ_m , iar figura 6.16, b variația coeficientului K_{II} .

6.7.2. PLĂCI CONȚINÎND FISURI RAMIFICATE

a) *Fisuri cu ramificație asimetrică.* Caracteristicile geometrice ale plăcii fisurate sînt alese în așa fel încît distribuția tensiunilor la extremitatea fiecărei ramuri să nu fie influențată de dimensiunile plăcii (fig. 6.18) [7].

Au fost examinate plăci de plexiglas avînd o grosime $d = 2$ mm și o lățime $w = 160$ mm, ce conțineau o fisură centrală de lungime $c + a = (60 + 80)$ mm, care se bifurca în punctul D , prezentînd o ramură secundară de lungime b variabilă. Unghiul θ între ramura principală a fisurii și ramura secundară a fost variabil. În timpul experiențelor au fost realizate următoarele valori. Pentru rapoartele $\frac{c}{a} = 4 \div 6$; $\frac{b}{a} = 0,2 \div 3$ și pentru unghiul θ valori diferite ($\theta = 15^\circ$, fig. 6.18, a; $\theta = 30^\circ$; fig. 6.18, b și $\theta = 45^\circ$, fig. 6.18, c). Lungimea c a fisurii principale este uneori mai mare decît fiecare din cele două ramuri (b și a) și prin urmare caustica punctului C nu este perturbată de causticele punctelor A și B . De aceea coeficientul de concentrare a tensiunilor în jurul vîrfului C (K_{IC}) este ales ca valoare de comparație pentru ceilalți doi coeficienți K_A și K_B corespunzători punctelor A și B . Existența ramurii DB produce o redistribuție a tensiunilor în jurul vîrfului A și, de asemenea, forma și dimensiunile caustice în acest punct depind de variația raportului $\frac{b}{a}$ și de unghiul θ .



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6.16.

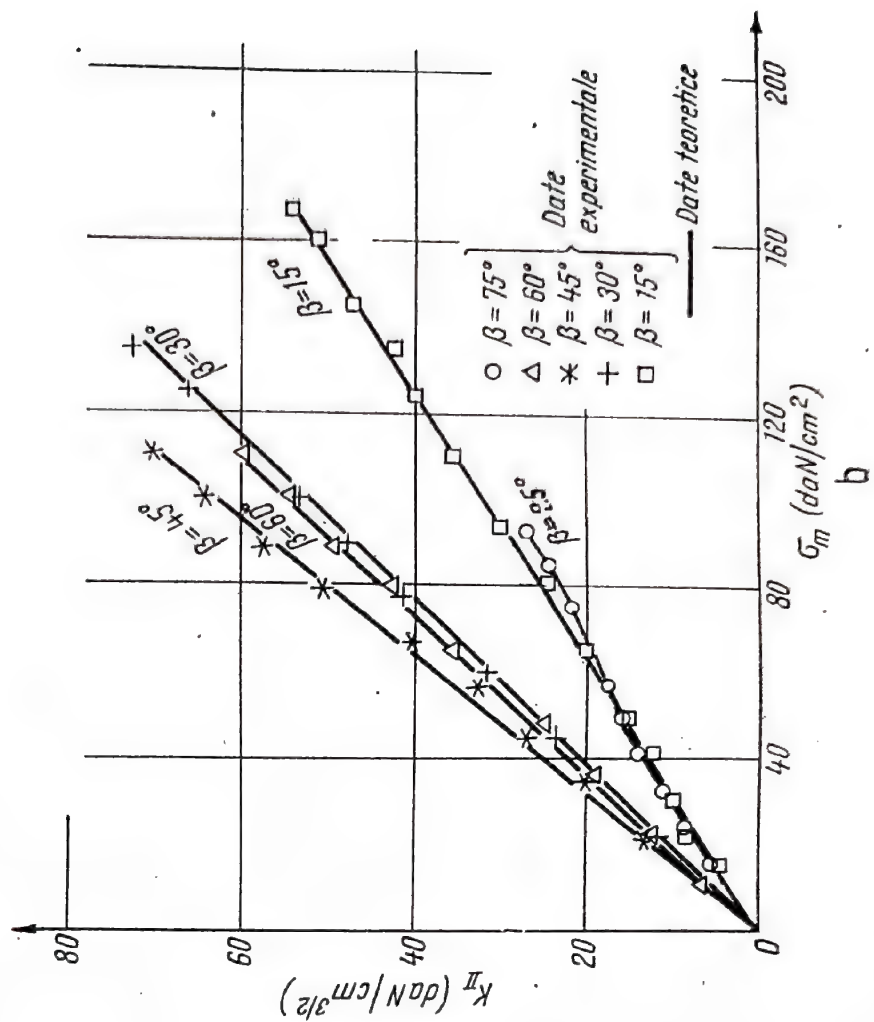
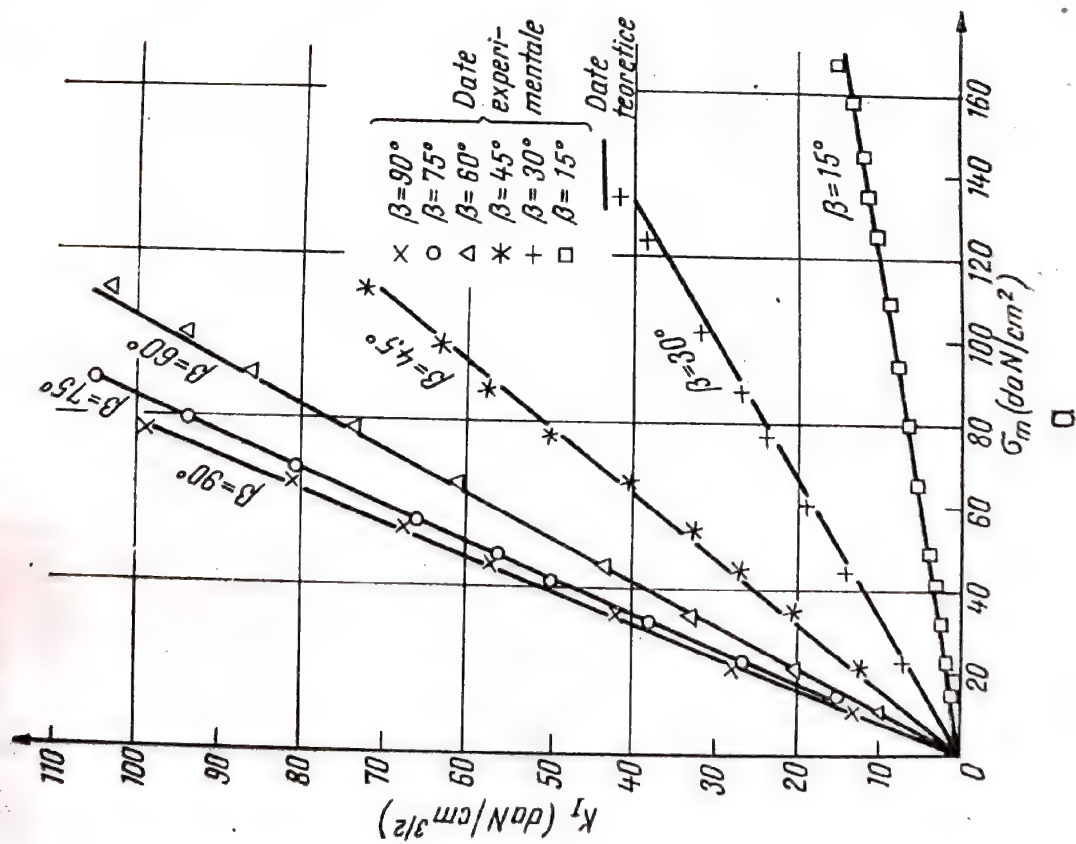


Fig. 6.17.

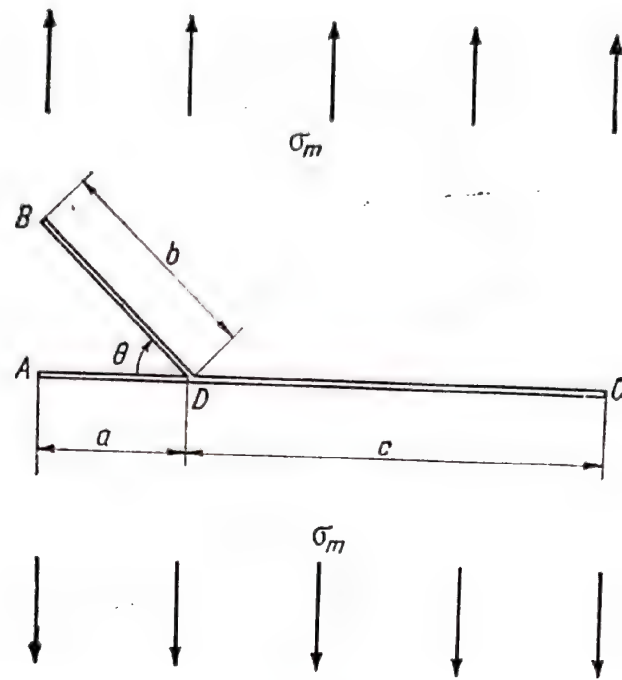
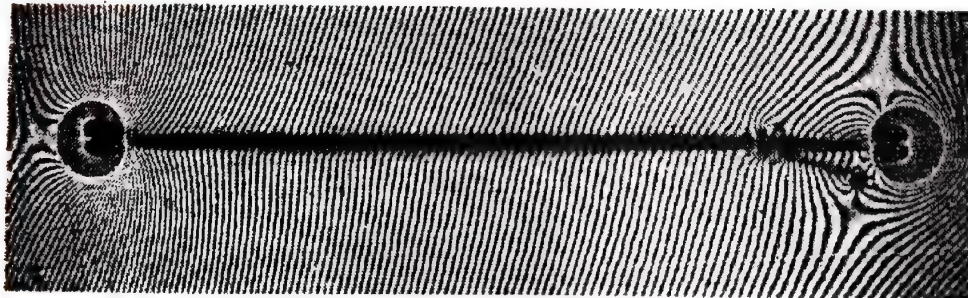
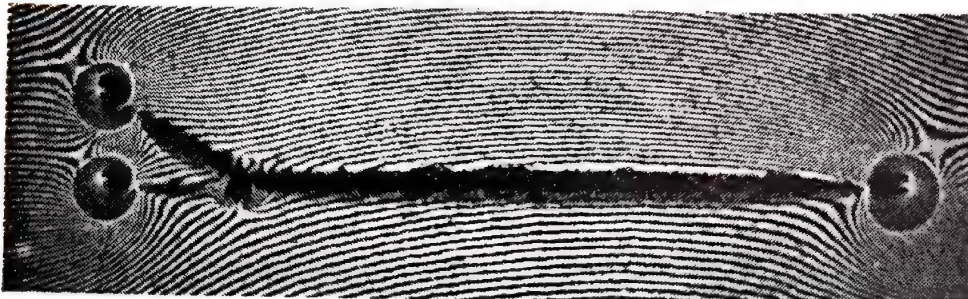


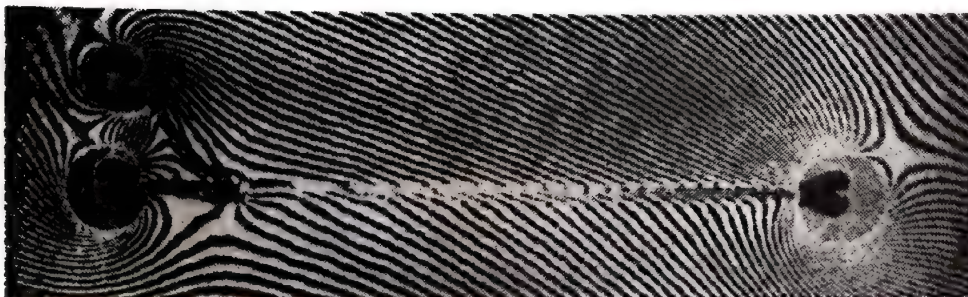
Fig. 6.18.



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.19.

Sistemul optic folosit în experiențe este caracterizat de $\lambda = 2,7 \div 2,9$, care corespunde unei valori a lui z_0 între 130 cm și 180 cm. În figura 6.19 se poate observa influența raportului $\frac{b}{a}$ asupra formei și dimensiunilor causticelor punctelor A, B și C. În figura 6.20 variația rapoartelor

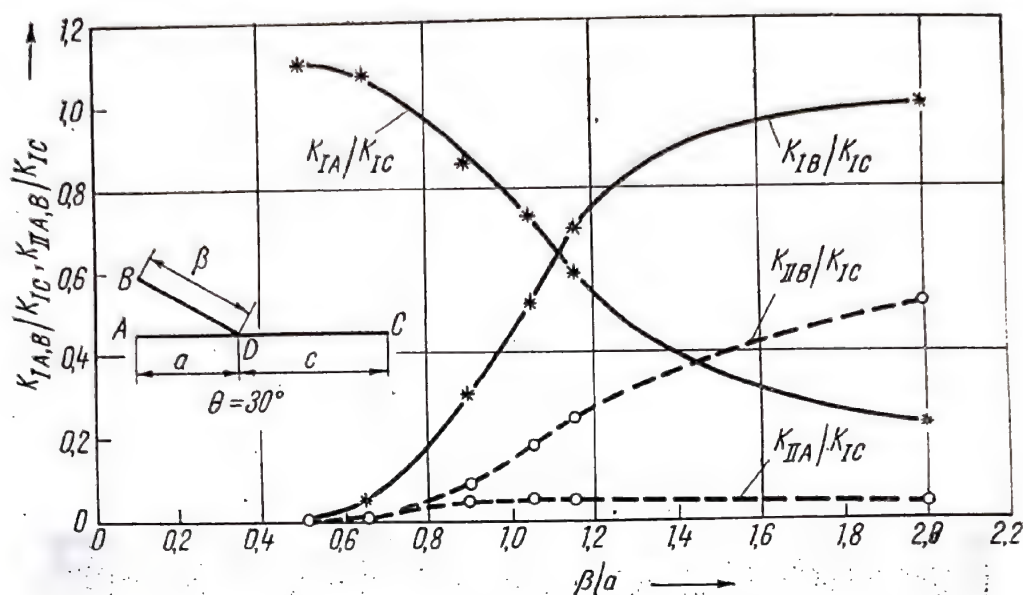


Fig. 6.20.

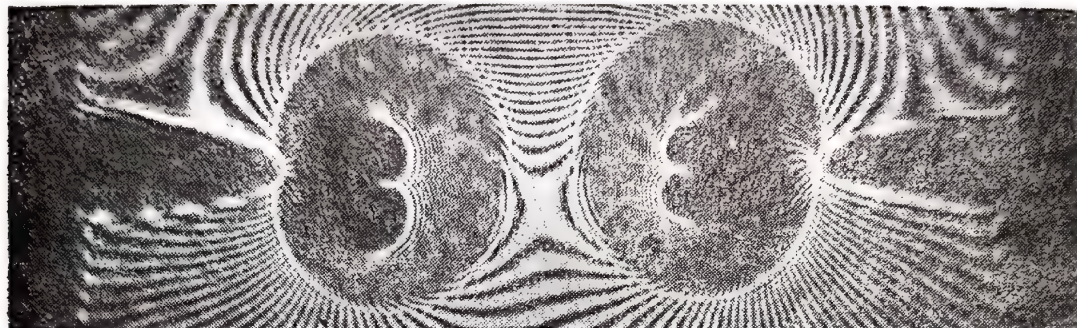
$K_{I,AB}/K_{IC}$ și $K_{IIA,B}/K_{IC}$ este reprezentată în raport cu parametrii $\frac{b}{a}$ și θ , folosind pentru calculul relațiile (6.95) pînă la (6.99). Rapoartele precedente nu sînt influențate de mărimile caracteristice ale experienței deoarece toate trei causticele depind în același fel de aceste mărimi.

b) *Fisuri cu ramificații simetrice.* Într-un mod analog s-a tratat problema unei plăci cu o fisură transversală care se împarte în două ramificații simetrice [17]. Dimensiunile și caracteristicile epruvetelor și dispozitivului optic sînt următoarele: $c = 48$ mm; $d = 1,96 - 2,06$ mm; $b = 160$ mm; $z_0 = 111$ și 178 cm; $\lambda = 2,11$ și 5,51; $\frac{b}{a} = 0,1 - 2,33$;

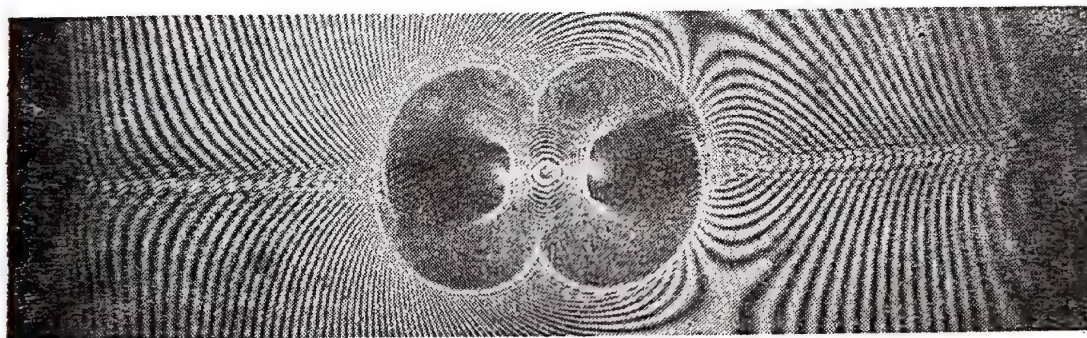
$\frac{c}{a} = 4$; $\theta = 10^\circ, 15^\circ, 22^\circ 30', 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. În figurile 6 și 7 din lucrarea [17] sînt date interferograma și caustica obținute experimental, iar în figura 8 a aceluiași articol, diagramele variației rapoartelor K_{IA}/K_{IC} și K_{IIA}/K_{IC} , ca funcții de raportul $\frac{b}{a}$ și de unghiul θ .

c) *Fisuri laterale.* S-au examinat benzi subțiri de plexiglas conținînd o fisură exterioară începînd de la una din marginile benzii, sau două fisuri exterioare simetrice și coliniare care au fost supuse la un efort de tracțiune aplicat la infinit. Causticele obținute experimental pentru diferite valori ale raportului $\frac{b}{a}$ (1, 1/2, 1/3, 1/4) sînt prezentate în figura 6.21. Figura

6 din lucrarea [10] arată variația coeficientului de concentrare K_I ca funcție de valoarea σ_m a tensiunii de tracțiune aplicată plăcii fisurate. În figura 6.22 se prezintă raportul K_I/σ_m în funcție de raportul $a/(a+b)$, așa cum a fost dat de Bowie și Niel [26] și cum a fost dedus de autor cu metoda causticelor. Se poate observa că pentru valori mici ale raportului b/a există o coincidență a rezultatelor celor două metode și că diferența



$$\frac{b}{a} = 1$$



$$\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$$

Fig. 6.21.

între cele două grupe de valori crește cu raportul b/a . Această diferență este datorată influenței unei ramuri asupra celeilalte care a fost bine pusă în evidență cu ajutorul metodei causticelor.

În sfârșit, trebuie menționat că același studiu a fost efectuat pentru două fisuri exterioare asimetrice [16].

6.7.3. CAUSTICE FORMATE LA EXTREMITATEA FISURILOR DISPUSE PERIODIC ÎN SERII PARALELE

O analiză teoretică și experimentală [18] cu ajutorul metodei causticelor a arătat acțiunea reciprocă a fisurilor apropiate în ceea ce privește valoarea instantanee a coeficientului K de concentrare a tensiunilor la extremitățile unei fisuri. În figura 6.23 se arată geometria unei serii de fisuri coliniare.

În acest studiu [18] forma funcției complexe $\Phi(z)$ a lui Muskhelishvili a fost dedusă pentru o serie de fisuri, arătate în figura 7.12 din lucrarea menționată. Folosind expresiile (6.37) și (6.38) s-au putut obține ecua-

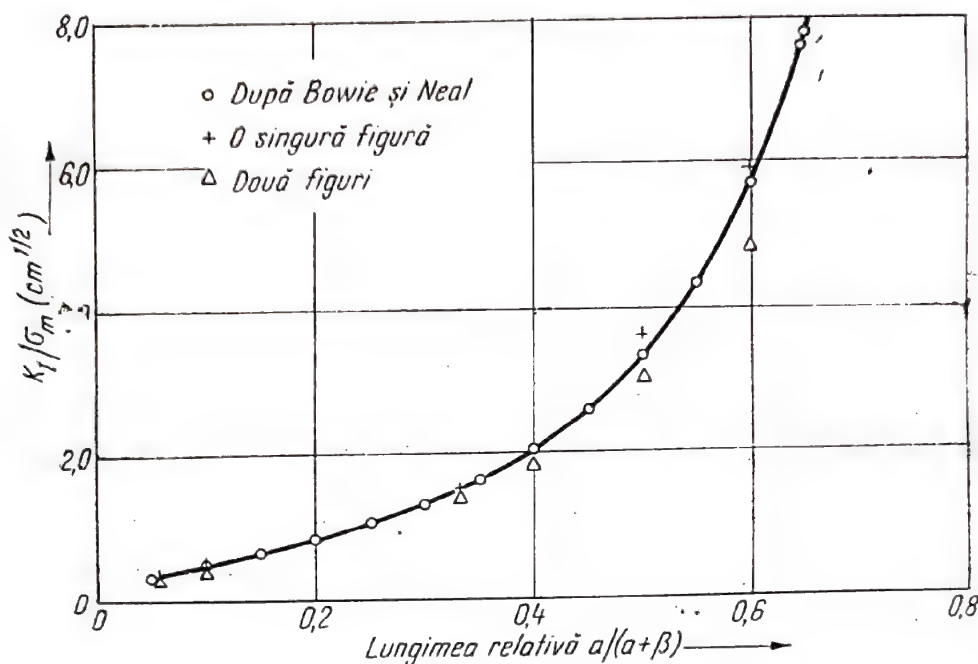


Fig. 6.22.

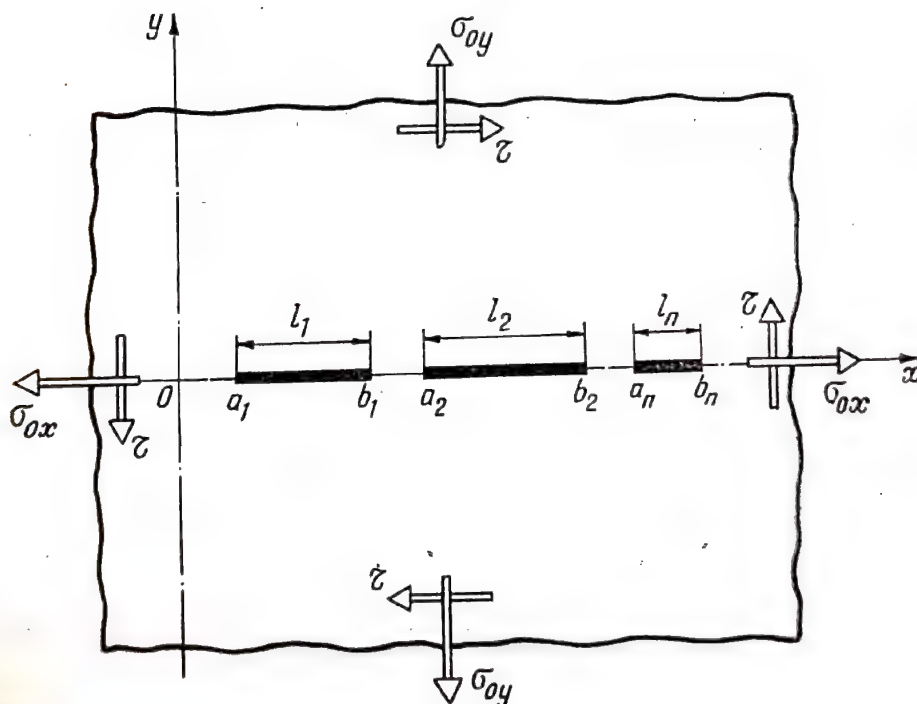
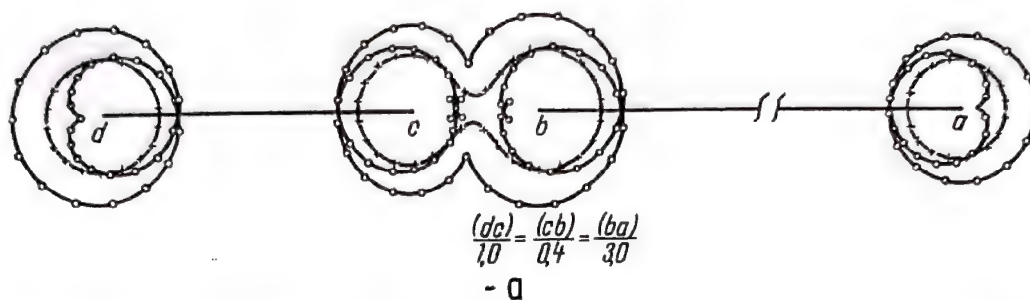


Fig. 6.23.

țiile curbei inițiale și ale caustice pentru două fisuri transversale asimetrice situate în interiorul unei plăci (fig. 6.24, a) pentru diferite valori ale lungimii fisurilor (fig. 6.23). În figura 6.24 b, sînt prezentate interferograma și causticele pentru cazul teoretic precedent. Se poate observa,

după analiza făcută în lucrarea [18], că influența unei fisuri asupra formei și dimensiunilor causticei generată de o fisură vecină, poate fi neglijată. Astfel, coeficientul de concentrare K poate fi determinat cu ajutorul metodei causticelor numai pentru o singură fisură.



b

Fig. 6.24.

Metodologia precedentă este aplicată în lucrarea [9] pentru determinarea lui K într-o placă subțire, care conține două fisuri interioare, coliniare și simetrice față de centrul plăcii.

6.8. CAUSTICE CREATE DE SINGULARITĂȚI ALE FORȚELOR

6.8.1. SINGULARITĂȚI CREATE DE FORȚE CONCENTRATE

Singularitatea de ordinul n^{-1} creată în câmpul tensiunilor sub acțiunea unei forțe concentrate, aplicată la marginea unui semiplan elastic, este transformată prin metoda causticelor într-o singularitate de natură optică. O forță concentrată produce într-un semiplan elastic (fig. 6.25) un câmp al tensiunilor care este descris în lucrarea [14]

$$\Phi(z) = \frac{P}{2\pi z} (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (6.99)$$

Cu ajutorul relațiilor (6.37) și (6.38) se obține *curba inițială*

$$\left| \frac{C^* P}{\pi} \cdot \frac{1}{z^3} \right| = 1$$

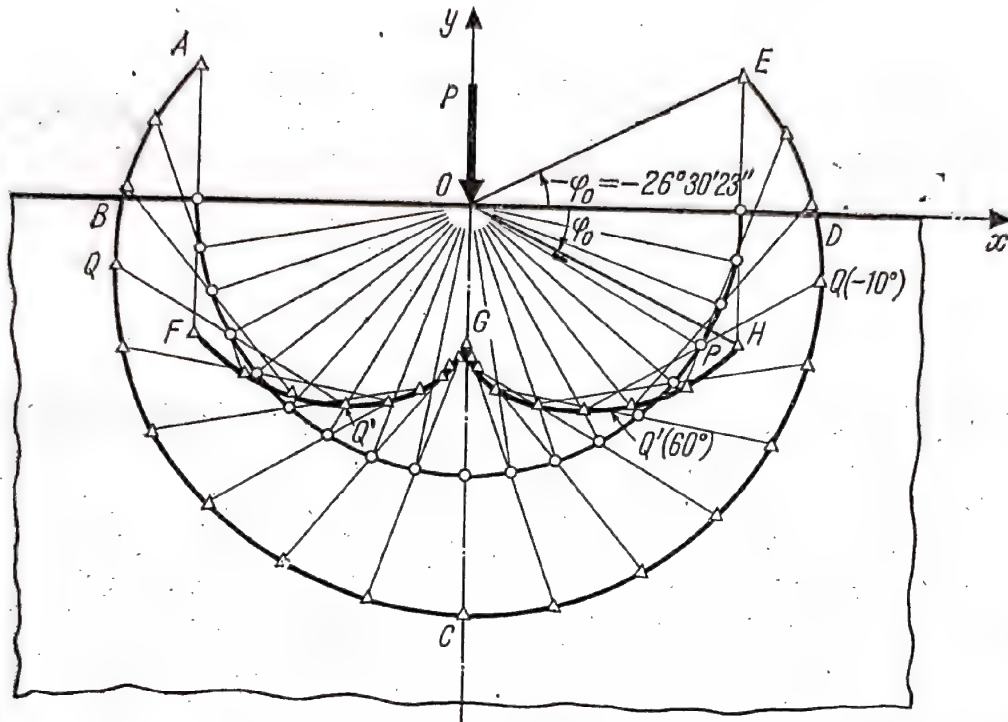


Fig. 6.25.

care, substituind $z = r_0 e^{i\theta}$, devine

$$r_0 = |z| = (C^* P / \pi)^{1/3} \quad (6.100)$$

unde $C^* = 4C/\lambda$. Ecuația causticei este

$$W = r_0 e^{-i\theta} - i \frac{C^* P}{2\pi r_0^2} e^{-i(\theta + \varphi)} \quad (6.101)$$

care, în coordonate carteziene, dă următoarele două ecuații parametrice

$$\begin{aligned} x &= r_0 \{ \cos \theta \pm [\cos (2\theta + \varphi)]/2 \} \\ y &= -r_0 \{ \sin \theta \pm [\sin (2\theta + \varphi)]/2 \} \end{aligned} \quad (6.102)$$

Ecuația (6.100) arată că curba inițială este un cerc care nu depinde de unghiul φ al forței, față de axa Ox . Punind $\alpha = (\theta + \varphi - \pi/2)$ se obțin coordonatele causticei față de sistemul de axe $Ox'y'$ avînd axa Oy' în direcția forței

$$\begin{aligned} x' &= r_0 \left(\cos \alpha \pm \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \\ y' &= r_0 \left(\sin \alpha \pm \frac{\cos 2\alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.103)$$

Sistemul (6.103) arată că curba caustice este simetrică față de direcția forței (axa Oy'). În figura 6.11 se pot vedea causticele generate de cele două suprafețe ale unei plăci de plexiglas pentru $\varphi = 90^\circ$.

Figura 6.26 prezintă causticele obținute experimental pentru un semiplan de plexiglas solicitat de o forță concentrată normală la margi-



a



b

Fig. 6.26.

nea sa (fig. 6.26, a) și de o forță oblică făcînd un unghi $\varphi = 30^\circ$ cu marginea (fig. 6.26, b). În mod practic caustica este folosită pentru determinarea intensității și direcției forței P măsurînd diametrul caustice și unghiul de rotire a axei sale de simetrie față de axa de aplicație a forței la infinit.

6.8.2. SINGULARITĂȚI CREATE DE FORȚE DISTRIBUITE

În starea plană de tensiune care este creată într-un semiplan elastic de o forță distribuită pe conturul său rectiliniu (fig. 6.27), discontinuitățile distribuției forțelor produc puncte singulare care pot fi studiate cu ajutorul metodei causticelor.

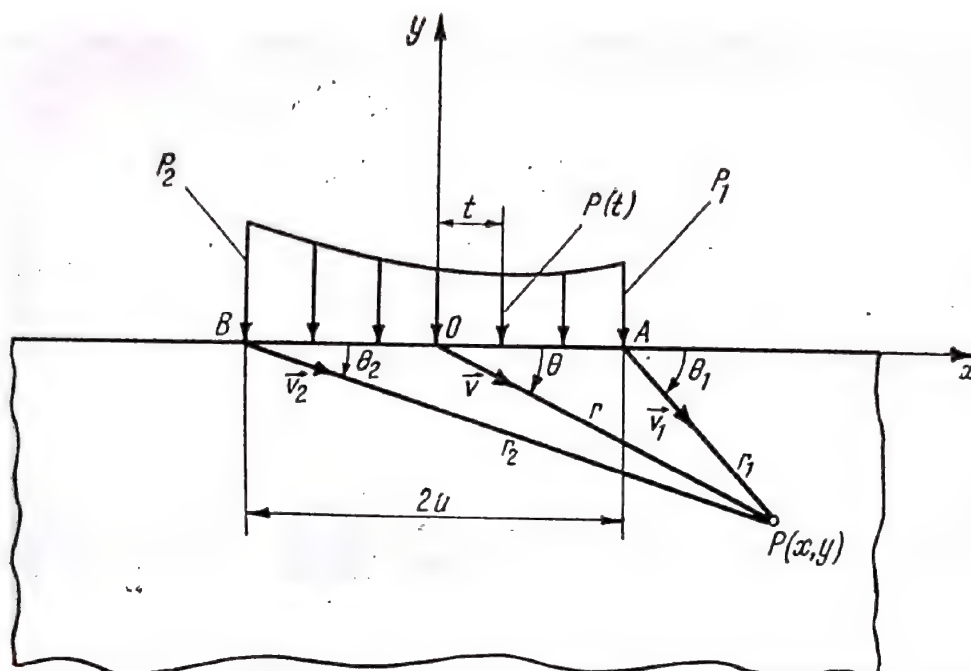


Fig. 6.27.

Starea de tensiuni într-un semiplan încărcat cu o distribuție oarecare a forțelor normale de-a lungul unei părți $2a$ din conturul său rectiliniu, este exprimată de funcția complexă dată de [27]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(t)}{t-z} dt \quad (6.104)$$

unde $t \in (-a, a)$ se găsește pe marginea semiplanului (fig. 6.27).

Exprimând legea distribuției forței sub forma unei funcții integrabile în sensul lui Cauchy, printr-un polinom de ordin m , rezultă

$$P(t) = S_0 + S_1 t + S_2 t^2 + \dots + S_m t^m \quad (6.105)$$

unde S_m sînt coeficienți definiți de forma distribuției și valorile limită ale forțelor la extremitățile regiunii încărcate. În acest caz funcția complexă $\Phi(z)$ poate fi exprimată după cum urmează

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{m+1} S_{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{z^{i-1}}{n-i} (a^{n-i} - (-a)^{n-i}) \right] + z^{n-1} \ln \frac{z-a}{z+a} \right\} \quad (6.106)$$

Introducând relația (6.106) în sistemul (6.37) și (6.38), se găsesc ecuațiile causticelor și ale curbelor inițiale care se formează în jurul punctelor singulare A și B (fig. 6.27).

În cazul simplu al unei distribuții liniare a forței (gradul polinomului (6.105) este $m = 1$) curba inițială este reprezentată de un polinom de gradul 8

$$r_0^8 - 4r_0^6 \cos 2\theta + 2r_0^4(1 + 2 \cos^2 2\theta) - r_0^2[4 \cos 2\theta + (C^*)^2] + 2r_0 p (C^*)^2 \cos \theta - (C^* p)^2 + 1 = 0 \quad (6.107)$$

$$\text{unde } r_0 = r/a, C^* = \frac{8CS_0}{\pi\lambda a^2} \text{ și } p = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \text{ (vezi fig. 6.27).} \quad (6.108)$$

Coordonatele carteziene normale $x_0 = x/a$ și $y_0 = y/a$, ale unui punct al caustice în același caz al distribuției liniare a sarcinii sînt date de

$$x_0 = \lambda \left\{ r_0 \cos \theta - \frac{C^*}{2} \left[\frac{1}{r_{01}r_{02}} \sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{r_0 p}{r_{01}r_{02}} \sin(\theta - \theta_1 - \theta_2) + \frac{p}{2}(\theta_1 - \theta_2) \right] \right\} \quad (6.109)$$

$$y_0 = \lambda \left\{ r_0 \sin \theta + \frac{C^*}{2} \left[\frac{1}{r_{01}r_{02}} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{p r_0}{r_{01}r_{02}} \cos(\theta - \theta_1 - \theta_2) - \frac{p}{2} \ln \frac{r_{01}}{r_{02}} \right] \right\}$$

unde $r_{01} = r_1/a$, $r_{02} = r_2/a$ și θ , θ_1 , θ_2 , se exprimă în funcție de r_0 și θ cu ajutorul relațiilor metrice din triunghiurile OAP și OBP (fig. 6.27) iar r_0 este definit ca o funcție de θ prin relația (6.106) a curbei inițiale.

În lucrarea [29] se face o analiză completă a causticelor generate în jurul punctelor singulare A și B (fig. 6.27) și a variației formei causticelor pentru cazuri limită cînd forța distribuită tinde către o forță concentrată sau către o distribuție uniformă de-a lungul întregului contur.

Cu ajutorul elementelor caustice [29] se pot determina valorile forțelor P_1 și P_2 în punctele singulare A și B cu următoarea relație

$$P = \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2C\lambda} \quad (6.110)$$

unde λ se exprimă prin relația (6.28), C prin (6.22) și x_0 , y_0 sînt coordonatele unui punct care aparține caustice generate în jurul punctului considerat A , respectiv B .

În lucrarea [29] sînt determinate de asemenea limitele aplicațiilor metodei precedente cu ajutorul parametrilor C^* și p (relația 6.108).

S-a arătat că metoda determinării valorilor P_1 și P_2 este aplicabilă pentru $C^* < C_{cr}^*$, unde C_{cr}^* este o funcție de parametrul p , reprezentat grafic în figura 6.28. Pentru $P = 0$ (cazul unei forțe distribuite uni-

form, $P_1 = P_2$) se regăsesc rezultatele cunoscute din lucrarea [23].

În figura 6.29, a sînt prezentate curbele inițiale (cu cruci) și causticele (cu cercuri) pentru cele două fețe ale plăcii (indicele r se referă la fața anterioară și f la fața posterioară a plăcii), în cazul unei distribuții uniforme a sarcinii [23] de-a lungul conturului plăcii. Figura 6.29, b reprezintă causticele corespunzătoare aceluiași caz de încărcare, obținute experimental. Se poate vedea că forma și dimensiunile causticelor dau toate informațiile esențiale pentru evaluarea singularităților produse de sarcină.

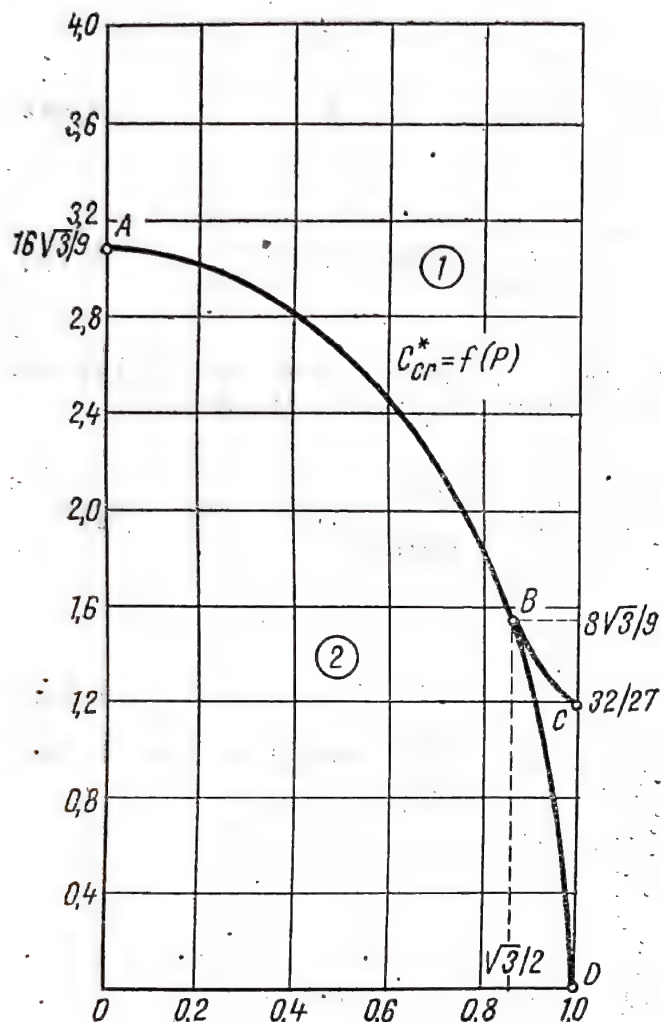


Fig. 6.28.

unui semiplan elastic care există în afara causticelor formate în jurul punctelor singulare A și B (fig. 6.27) și care se numește pseudocaustică.

Într-adevăr, legea deviației pe ecran (fig. 6.2 și 6.3) a unei raze incidente într-un punct oarecare $P(x, y)$ al semiplanului (fig. 6.27), care se exprimă prin relația cunoscută (6.37), este dată de

$$W = \lambda z + 4C\bar{\Phi}'(z) \quad (6.111)$$

Această expresie dă caustica produsă de către marginea deformată, dacă z este înlocuit cu ζ , care reprezintă poziția unui punct de pe marginea deformată. Poziția punctului $P(\zeta)$ este dată de

$$\zeta = (z + u + iv) \quad (6.112)$$

unde ε reprezintă poziția inițială a punctului P pe marginea liberă și $(u + iv)$ sînt componentele deplasării aceluiasi punct în timpul deformării conturului încărcat.

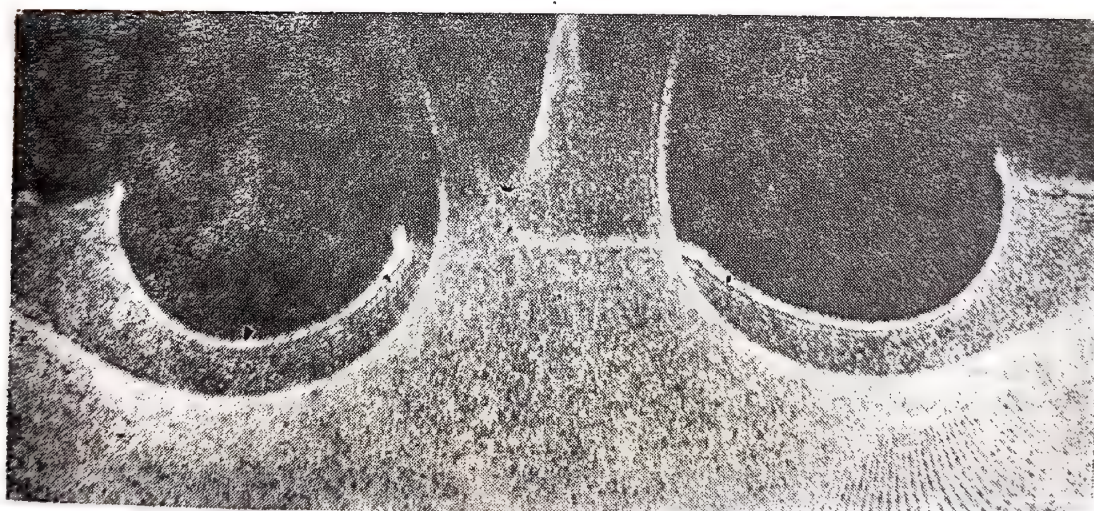
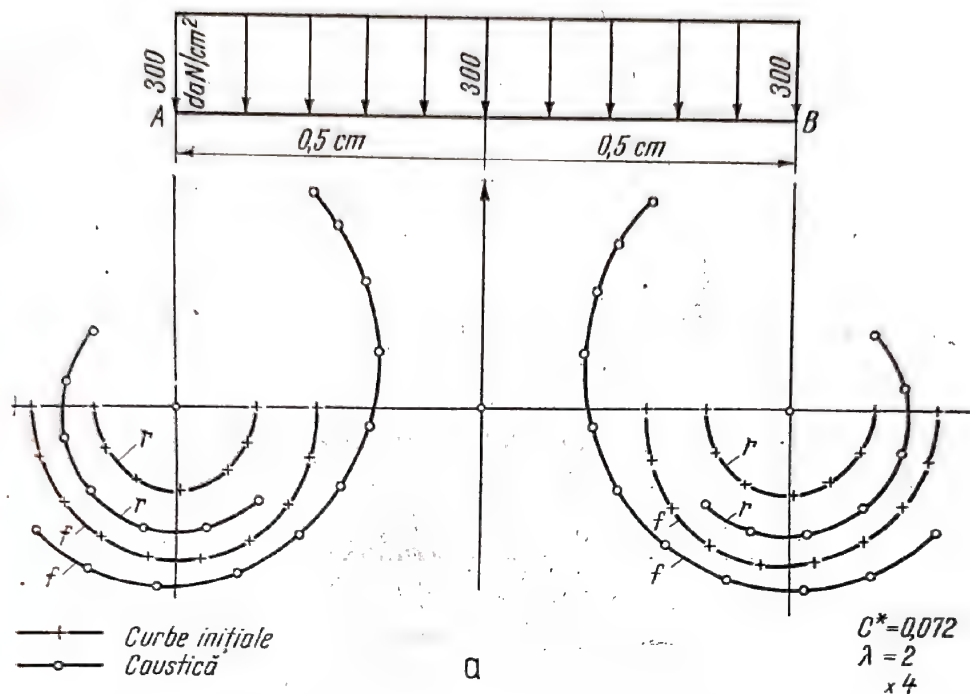


Fig. 6.29.

Relația $\zeta = \zeta(x, y)$ reprezintă ecuația curbei inițiale a pseudocaustice iar conturul deformat joacă rolul curbei inițiale a caustice generate de ea însăși.

În cazul general al unei distribuții oarecare (relația 6.105) a forței normale pe un contur rectiliniu ($y = 0$, fig. 6.27), componentele u și v se exprimă în modul următor [30]

$$v = -\frac{1+k}{4\pi\mu} \sum_{n=1}^{m+1} S_{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{a^{n-i} - (-a)^{n-1}}{i(n-i)} x^i \right] + \frac{1}{n} x^n \ln \frac{x-a}{x+a} - \right. \\ \left. - \frac{a^n}{n} [\ln(x-a) + (-1)^{n+1} \ln(x+a)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x^{n-k+1} a^{k-1}}{(n-k+1)} [(1-)^{2k-1} + (-1)^{k+1}] \right\} \quad (6.113)$$

unde k și μ sînt binecunoscutele constante ale lui Lamé.

Ecuatia pseudocaustice este dată în cazul menționat de

$$W = \lambda\tau + 4C\bar{\Phi}'(\tau), \quad (6.114) \\ \zeta = x + iv(x),$$

unde $v(x)$ este dat de relația (6.113).

S-a pus în evidență [30] că pseudocaustica este tangentă la curba caustice formată în jurul punctelor singulare. Cele două tipuri de curbe prezintă pe ecran o singură curbă continuă, la care punctele de inflexiune sînt chiar punctele de contact între cele două tipuri de curbe.

În figura 6.30, a sînt reprezentate curbele caustice generate în jurul punctelor singulare A și B , și ale pseudocaustice, care corespund celor două fețe laterale ale plăcii (indicele f este folosit pentru suprafața interioară și r pentru suprafața posterioară a plăcii). În figura 6.30, b sînt prezentate causticele și pseudocausticele obținute experimental pentru același caz de încărcare.

Porțiunea pseudocaustice cuprinsă între cele două caustice, reprezentată pe ecran, punct cu punct, imaginea părții din marginea deformată a plăcii cuprinsă între regiunile foarte deformate din jurul punctelor singulare A și B .

Existența pseudocaustice generată pe o suprafață oarecare a plăcii, corespunzînd părții încărcate $A-B$ a conturului epruvetei, este determinată de forma causticelor în jurul punctelor singulare în felul următor: ← dacă cele două caustice din jurul punctelor A și B , generate de suprafața considerată, sînt separate în direcția conturului (axa $x-x$, fig. 6.30) există pseudocaustice care corespund părții de contur încărcat.

Condiția separării causticelor pe ecran este exprimată teoretic cu ajutorul a doi parametri C^* și p ai diagramei din fig. 6.28 care trebuie să se afle în regiunea (2) a acestei diagrame [29].

Aşa cum a fost enunţat mai înainte, fiecare punct care aparţine conturului deformat are un singur punct corespunzător pe pseudo-caustică şi, prin urmare, pseudocaustica dă informaţii preţioase, atât calitative cât şi cantitative pentru deformaţiile conturului. În cazul general al unei distribuţii arbitrare a forţei normale, exprimată prin legea $P = P(t)$,

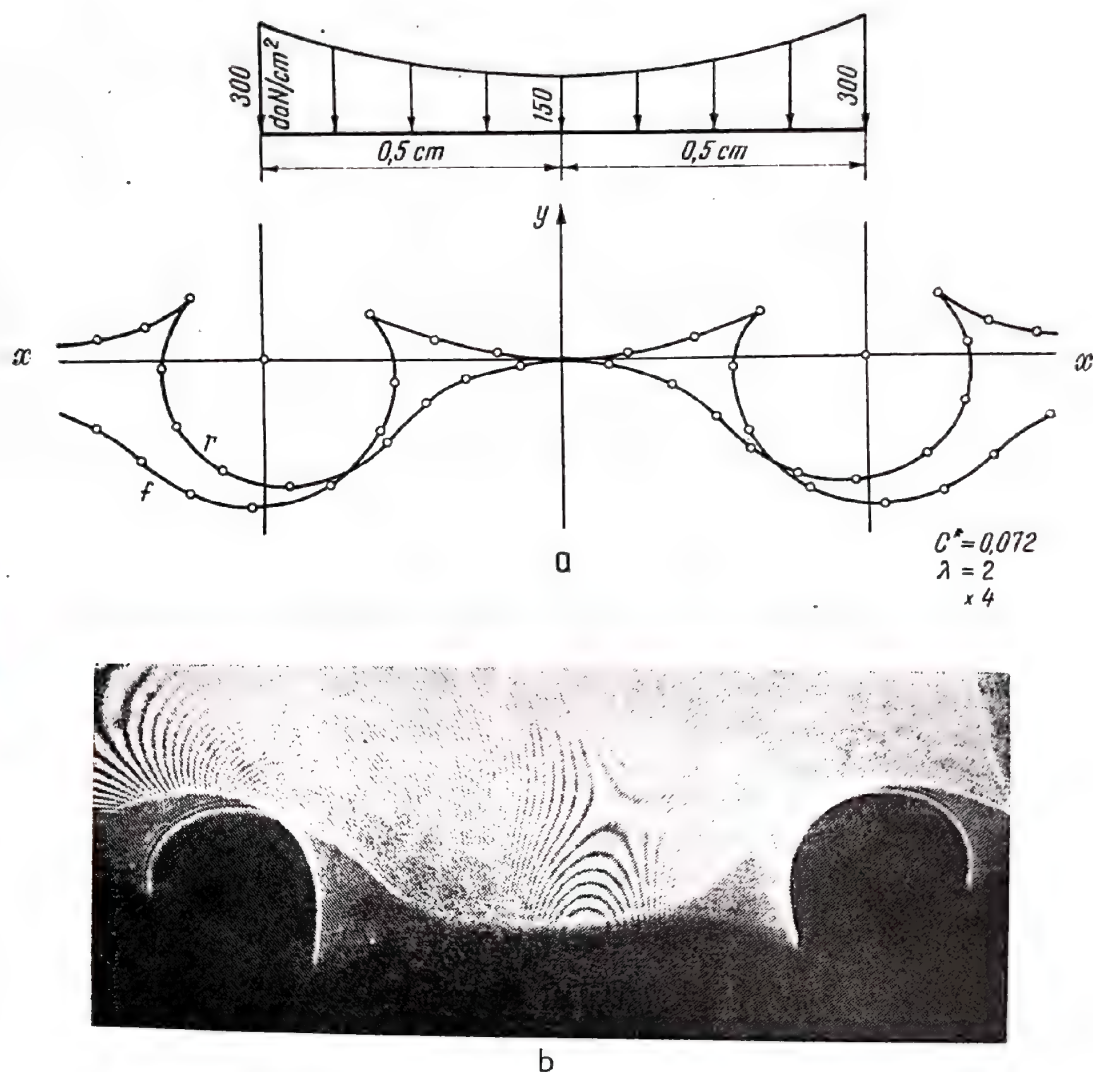


Fig. 6.30.

pe marginea rectilinie a semiplanului elastic, ecuaţiile pseudocaustice au următoarea formă

$$W = \lambda \tau + \frac{2Ci}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(t)}{(t-\tau)^2} dt \quad (6.114)$$

$$\tau = x + \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{k+1}{2\pi i} \int_0^x \left[\int_{-a}^a \frac{P(t)}{t-x} dt \right] dx \right\}. \quad (6.115)$$

Bazîndu-se pe ecuațiile pseudocaustice (6.114) și (6.115) se poate stabili o metodă de determinare a legii de distribuție a forțelor pe marginea semiplanului. Ecuațiile pseudocaustice de mai sus reprezintă un sistem de ecuații integrale de tip Cauchy în funcție de următoarele necunoscute:

a) funcția care descrie distribuția tensiunilor pe conturul semiplanului;

b) componentele deplasării unui punct care aparține conturului.

Se poate arăta la fel că pseudocaustica reprezintă o curbă de-a lungul căreia integrala de tip Cauchy ia valori finite, deoarece pseudocaustica se formează în afara punctelor singulare. Pentru a rezolva sistemul de ecuații s-a folosit metoda de identificare prin aproximații succesive a unui număr de parametri care caracterizează legea de distribuție a tensiunilor pe contur. S-a ales un număr de parametri care reprezintă valorile tensiunilor în puncte discrete ale conturului și s-a exprimat legea variației tensiunilor în funcție de acești parametri. Apoi s-au evaluat integralele sistemului, obținându-se un sistem de ecuații algebrice liniare în funcție de parametrii necunoscuți, care a fost rezolvat prin metoda aproximațiilor succesive. Pentru diferite cazuri de distribuții ale sarcinilor pe contur, pentru care s-a determinat distribuția tensiunilor, eroarea nu a depășit 3%.

6.10. CAUSTICELE ÎN CAZUL CÎMPURILOR DE TENSIUNI NESINGULARE

Metoda causticelor a fost folosită pînă acum la studiul regiunilor puternic deformate în jurul punctelor singulare. În orice caz, se pot, de asemenea, obține caustice în toate condițiile existenței unui câmp de eforturi plan nesingular. Suprafața deformată a plăcii supuse acțiunii unei forțe oarecare prezintă o variație a pantei, care produce prin reflexia luminii pe ecran, o caustică, dacă este îndeplinită condiția (6.30).

Acesta este, de exemplu, cazul unei plăci infinite conținând o gaură circulară [13], care este supusă la o stare plană de tensiune cu σ_1 și σ_2 aplicate la infinit (fig. 6.31).

Dacă raza găurii este R , funcția variabilei complexe $z = (x + iy)$, care exprimă starea de tensiune în placă este dată de Muskhelishvili [27] sub forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2) + R^2(\sigma_1 - \sigma_2)/2z^2. \quad (6.116)$$

Introducînd primele două derivate ale funcției în relațiile (6.37) și (6.38), corespunzînd curbei inițiale și caustice sale, se obține ecuația curbei inițiale

$$r = r_0 = (12OR^2|\sigma_1 - \sigma_2|)^{1/4}. \quad (6.117)$$

Ecuția causticei generate de regiunea deformată în jurul orificiului este

$$W = z + 4CR^2[(\sigma_2 - \sigma_1)/\bar{z}^3] \quad (6.118)$$

unde C ia una dintre valorile date de relațiile (6.22).

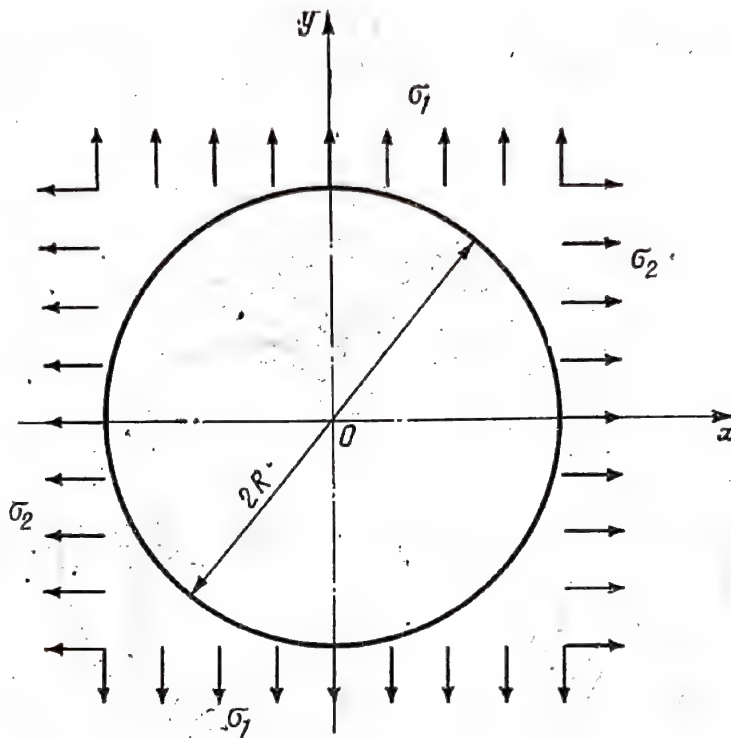


Fig. 6.31.

Coordonatele unui punct al causticei se obțin proiectând ecuația (6.118) pe axele Ox și Oy (fig. 6.31)

$$\begin{aligned} x &= r_0 \left(\cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \right) \\ y &= r_0 \left(\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta \right). \end{aligned} \quad (6.119)$$

Relațiile (6.119) arată că toate ramurile causticelor sînt curbe asemănătoare. O analiză amănunțită [13] arată că față de origine, caustica este simetrică și, în plus, este o curbă continuă și închisă. Curba inițială este un cerc a cărui rază depinde de constanta C , de raza găurii R și de diferența tensiunilor σ_1 și σ_2 considerate aplicate la infinit. Relațiile (6.119) dau

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = \rho = \frac{r_0}{3} (10 + 6 \cos 2\theta)^{1/2} \quad (6.120)$$

de unde se obține

$$\rho_{max} = 4r_0/3, \text{ pentru } \theta = 0 \text{ sau } \theta = \pi \quad (6.121)$$

$$\rho_{min} = 2r_0/3, \text{ pentru } \theta = \pi/2 \text{ sau } \theta = 3\pi/2. \quad (6.122)$$

Folosind relațiile (6.117) și (6.119), unde constanta C este exprimată prin relația (6.22) se pot construi causticele și curbele inițiale pentru o

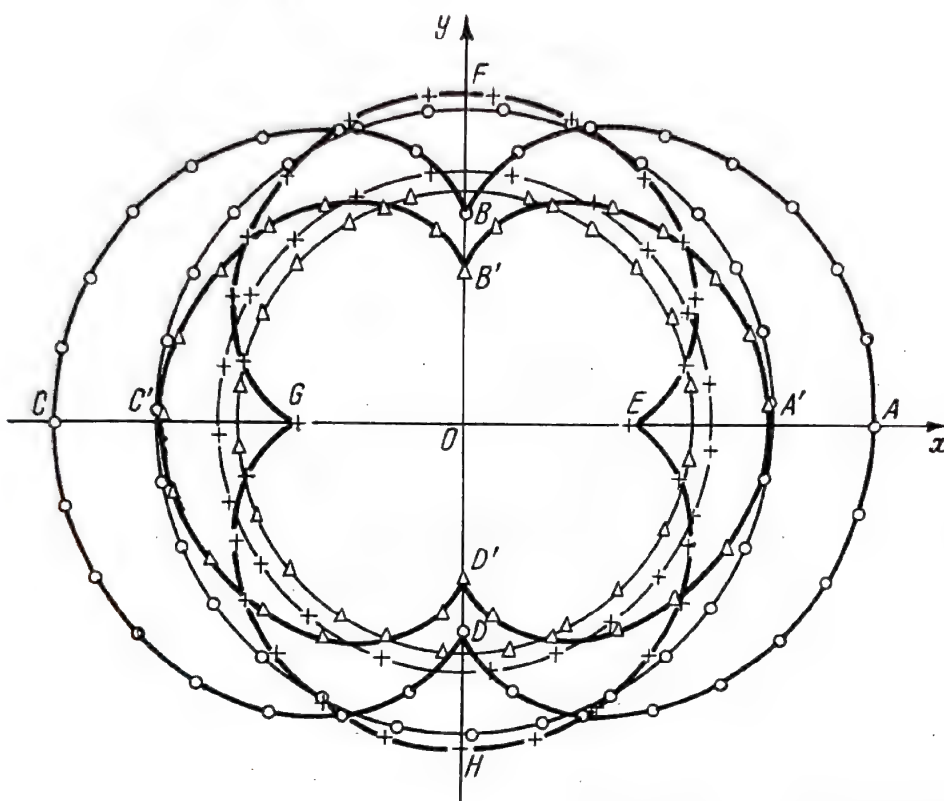


Fig. 6.32.

placă de plexiglas. Cele trei curbe inițiale și causticele corespunzătoare, pentru o placă de plexiglas cu o gaură centrală, sînt prezentate în fig. 6.32.

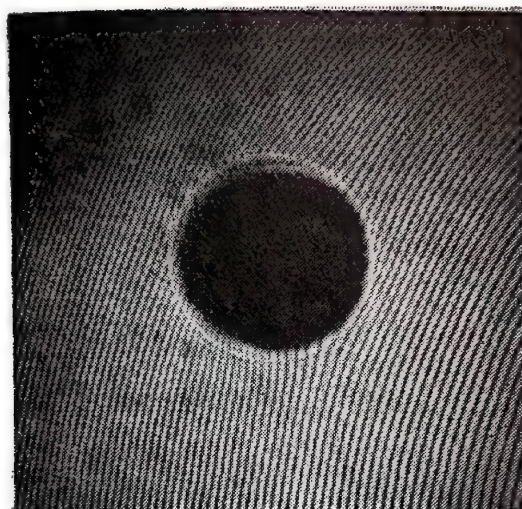
Din ecuația (6.121) se obține diametrul maxim al causticei

$$D_{max} = \frac{8}{3} (12|C|\lambda^3 R^2 |\sigma_1 - \sigma_2|)^{1/4} \quad (6.123)$$

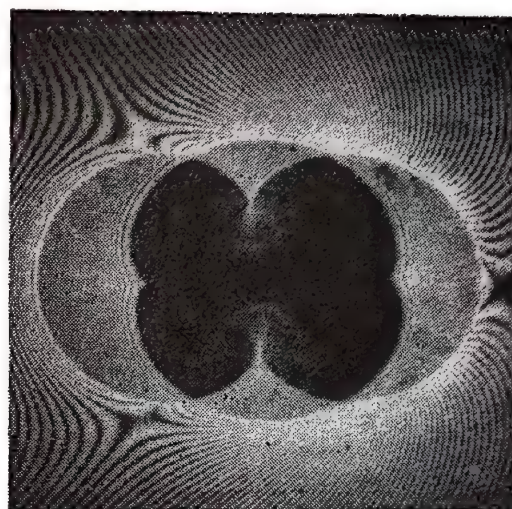
unde λ este factorul de mărire al sistemului optic. În figura 6.33 sînt prezentate interferograma și caustica generată în cazul unei plăci avînd o gaură circulară centrală care este supusă unei perechi de forțe P_1 și P_2 perpendiculare între ele (cazul a, $P_1 = P_2 = 0$; cazul b, $P_1 = 0$; cazul c, $P_1 = P_2$ și cazul d, $P_2 = 0$). Se poate observa că orientarea diametrelor

principale ale causticelor indică direcțiile tensiunilor principale. În plus, diferența tensiunilor principale poate fi obținută prin relația (6.123)

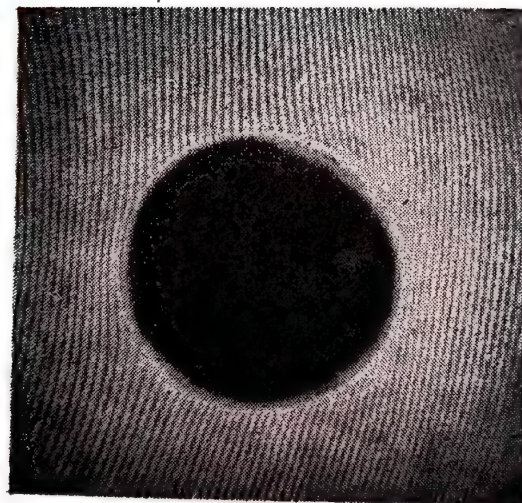
$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \left(\frac{3}{4\lambda} \right)^3 \left(\frac{D_{max}}{4\sqrt{R}} \right)^4 \left(\frac{1}{|C|} \right). \quad (6.124)$$



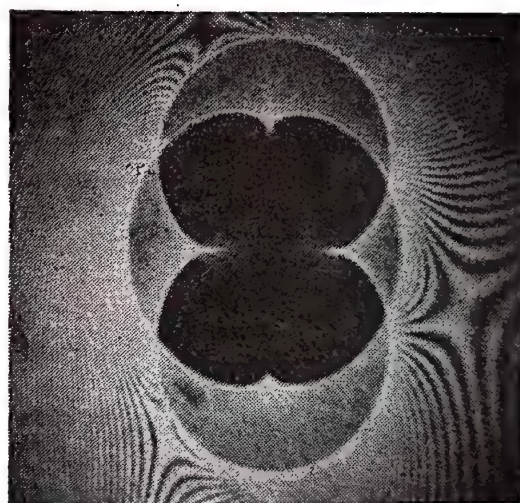
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6.33.

Astfel, se pot folosi, în aplicații, proprietățile causticelor în jurul unui orificiu de un diametru infinitesimal pentru determinarea direcțiilor tensiunilor principale precum și diferența valorilor acestor tensiuni. În figura 6.34 se poate observa orientarea tensiunilor principale cu ajutorul unei serii de mici perforații circulare într-o placă avînd un orificiu central,

solicitată la tracțiune monoaxială. Micile perforații joacă rolul rozetelor optice bazate pe metoda causticelor care dau direcțiile principale și dife-

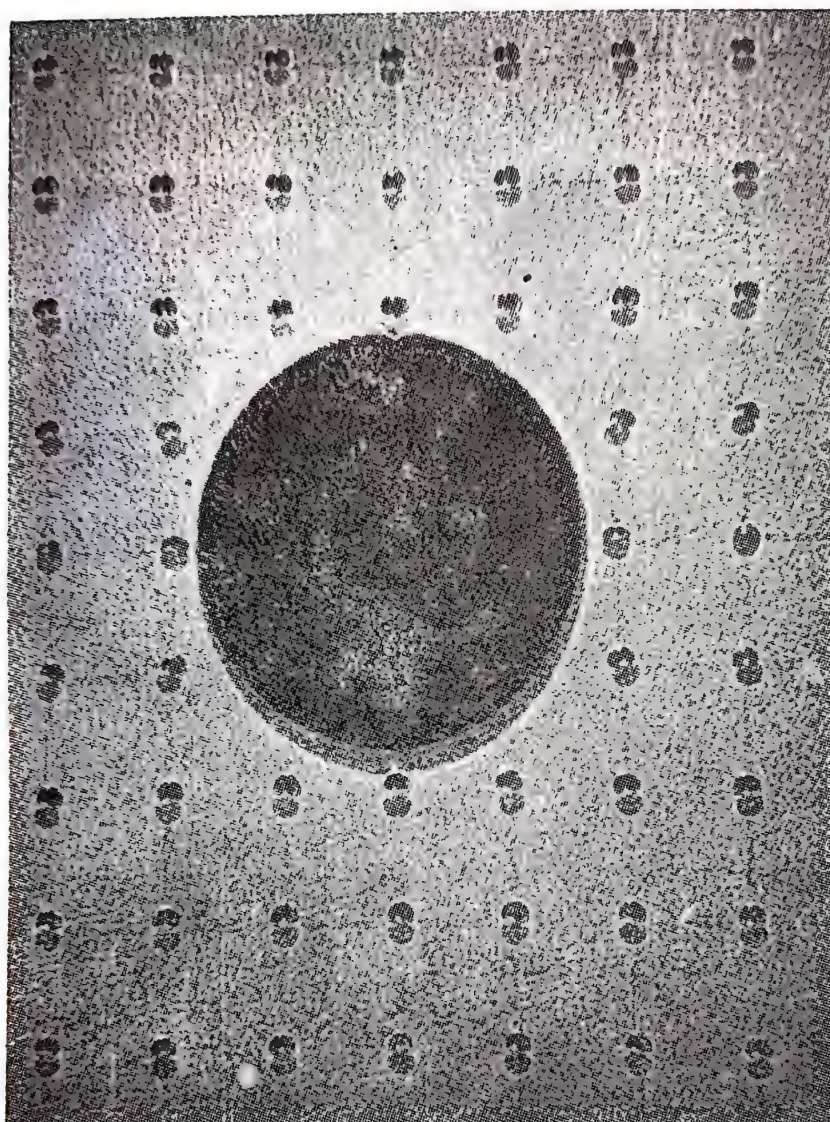


Fig. 6.34.

rența tensiunilor principale $\sigma_1 - \sigma_2$ în câmpul de tensiuni. Această rozetă optică este un mijloc experimental care indică direcțiile principale într-un câmp de tensiuni în domeniul elastic.

6.11. APLICAȚII ALE CAUSTICELOR ÎN PLASTICITATE

6.11.1. CAUSTICELE PENTRU MODELUL DUGDALE – BARENBLATT

În acest paragraf se extinde teoria dezvoltată pentru cazul solicitărilor elastice, la cazul unui material prezentînd o curgere plastică în vecinătatea extremității fisurii. În cazul în care o zonă plastică se desfășoară în jurul vârfului fisurii, problema elasto-plastică nu are o soluție riguroasă. În orice caz problema poate fi reprezentată, aproximativ, prin modelul forței

coezeive a lui Dugdale — Barenblatt în cazul în care curba caracteristică a materialului seamănă cu aceea a unui material perfect plastic.

Se consideră o placă subțire dintr-un material elasto-plastic perfect, care conține o fisură transversală de lungime $2a$ (fig. 6.35), supusă

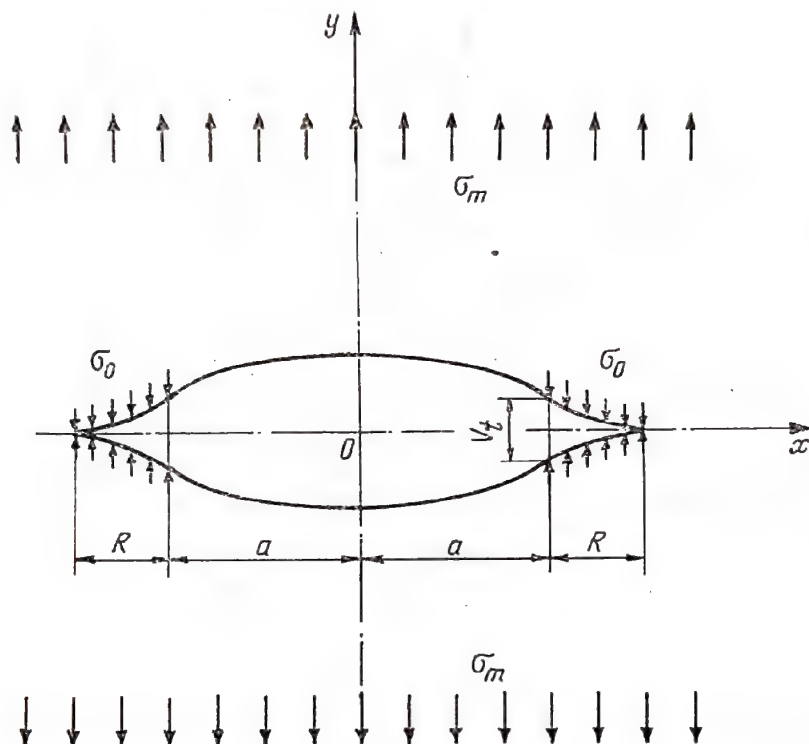


Fig. 6.35.

acțiunii unui câmp de tensiuni aplicat la infinit, caracterizat de tensiunile σ_{ox} și σ_{oy} .

Se alege un sistem de axe xOy în așa fel încît direcția axei Ox să coincidă cu direcția fisurii (fig. 6.35). Dacă placa este sollicitată pînă la apariția unei curgeri plastice, aceasta va avea loc într-o zonă situată în jurul vîrfului fisurii. Modelul lui Dugdale-Barenblatt introduce efectul curgerii plastice considerînd o lungime a fisurii mărită cu raza zonei plastice R , care se produce în jurul vîrfului fisurii. De-a lungul fisurii considerate, întinsă pe o lungime $2(a + R)$, acționează forțe coezive, care se opun extinderii fisurii. Forța aplicată și forța coezivă produc singularități de ordin invers proporțional cu rădăcina pătrată a distanței. Aceste singularități sînt de semn contrar și au tendința de a limita valorile tensiunilor în vecinătatea fisurii.

Pentru un material elasto-plastic perfect această limită este limita de curgere la tracțiune simplă σ_c . Punînd condiția că tensiunile la extremitatea fisurii trebuie să fie finite, rezultă

$$K = \frac{a}{a + R} = \cos \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_c} \quad (6.125)$$

de unde se poate calcula valoarea razei plastice R , în funcție de lungimea $2a$ a fisurii, de tensiunea σ_m aplicată la infinit și de limita de curgere plastică, la tracțiune simplă, σ_c . Starea de tensiune într-o placă este definită de funcția complexă a lui Westergaard [28]

$$Z(z) = \frac{2\sigma_c}{\pi} \operatorname{ctg}^{-1} \left\{ \frac{K}{2} \left[\frac{z^2 - (a + R)^2}{1 - K^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (6.126)$$

unde constanta K este dată de relația (6.125).

Pentru a obține ecuațiile curbei inițiale și caustice, se pleacă de la relația (6.35) în care se ține seama că

$$\operatorname{Re} Z(z) = 2\operatorname{Re} \Phi(z). \quad (6.127)$$

Se obține deci

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = 2\operatorname{Re} Z(z) \quad (6.128)$$

Introducând relația (6.126) în ecuația (6.38) se găsește

$$2 \left| C \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \right| = 1 \quad (6.129)$$

unde constanta C se exprimă prin relația (6.22 c). Calculând cea de-a doua derivată $Z''(z)$ a funcției complexe $Z(z)$ și introducând în relația (6.129) se obține ecuația curbei inițiale sub forma

$$\left| \frac{4\sigma_c C}{\pi} \cdot \frac{(1 - K^2)^{1/2}}{K} (a + R)^2 z [z^2 - (a + R)^2]^{-3/2} \left[\left(\frac{z}{K} \right)^2 - (a + R)^2 \right]^{-2} \cdot \left[3 \left(\frac{z}{K} \right)^2 - \left(1 + \frac{2}{K^2} \right) (a + R)^2 \right] \right| = 1 \quad (6.130)$$

Folosind relațiile (6.127) și (6.36) se obține ecuația caustice

$$W = \left[z - \frac{2z_0 d\nu}{E} \bar{Z}'(z) \right] \quad (6.131)$$

și în sfârșit, introducând în această relație prima derivată $Z'(z)$, se obține

$$W = z + \frac{4\sigma_c C}{\pi} \cdot \frac{(1 - K^2)^{1/2}}{K} \cdot \frac{(a + R)^2}{\left(\frac{\bar{z}}{K} \right)^2 - (a + R)^2} \cdot \frac{1}{[\bar{z}^2 - (a + R)^2]^{1/2}} \quad (6.132)$$

Ecuatiile (6.130) și (6.132) determină forma și dimensiunile causticelor la extremitatea fisurii, cu condiția valabilității modelului Dugdale-Barenblatt. Figura 6.36, a prezintă curba inițială teoretică (marcată prin cruci) și caustica (marcată prin cercuri), pentru o fisură exterioară creată într-o

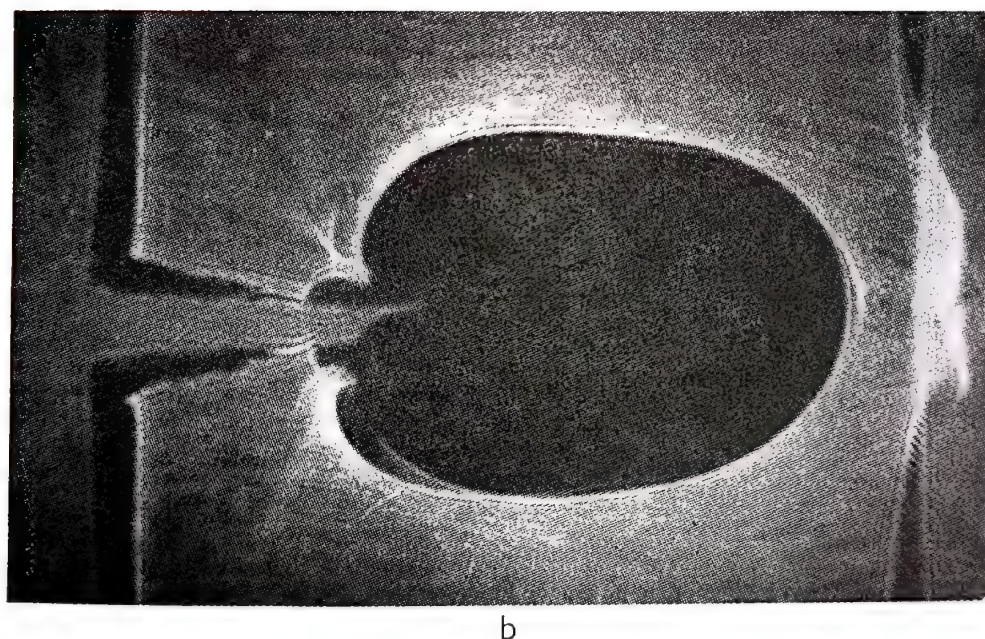
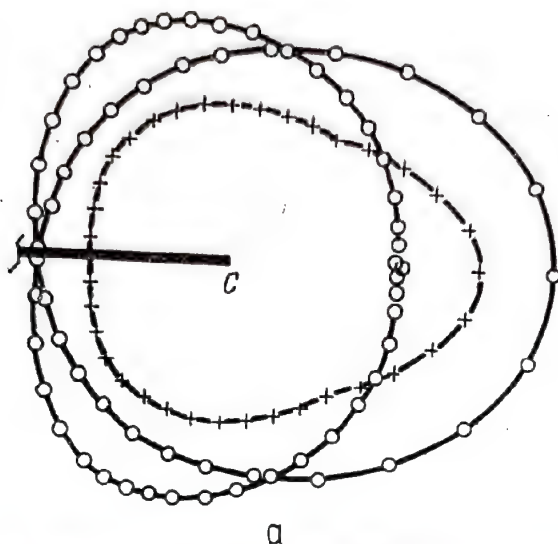


Fig. 6.36.

placă de plexiglas în cazul în care raportul dintre tensiunea aplicată σ_m și limita de curgere plastică la tracțiune simplă σ_c este $\sigma_m/\sigma_c = 1,6$, iar figura 6.36, b reprezintă causticele obținute experimental pentru același caz. În figura 6.36, c se pot vedea în plus, causticele generate într-o placă de oțel fisurată (DIN St 45) [20], solicitată la tracțiunea monoaxială. Cele patru fotografii ale acestei figuri arată clar etapele de dezvoltare ale zonei plastice care corespund modelului simplu al lui Dugdale-Barenblatt.

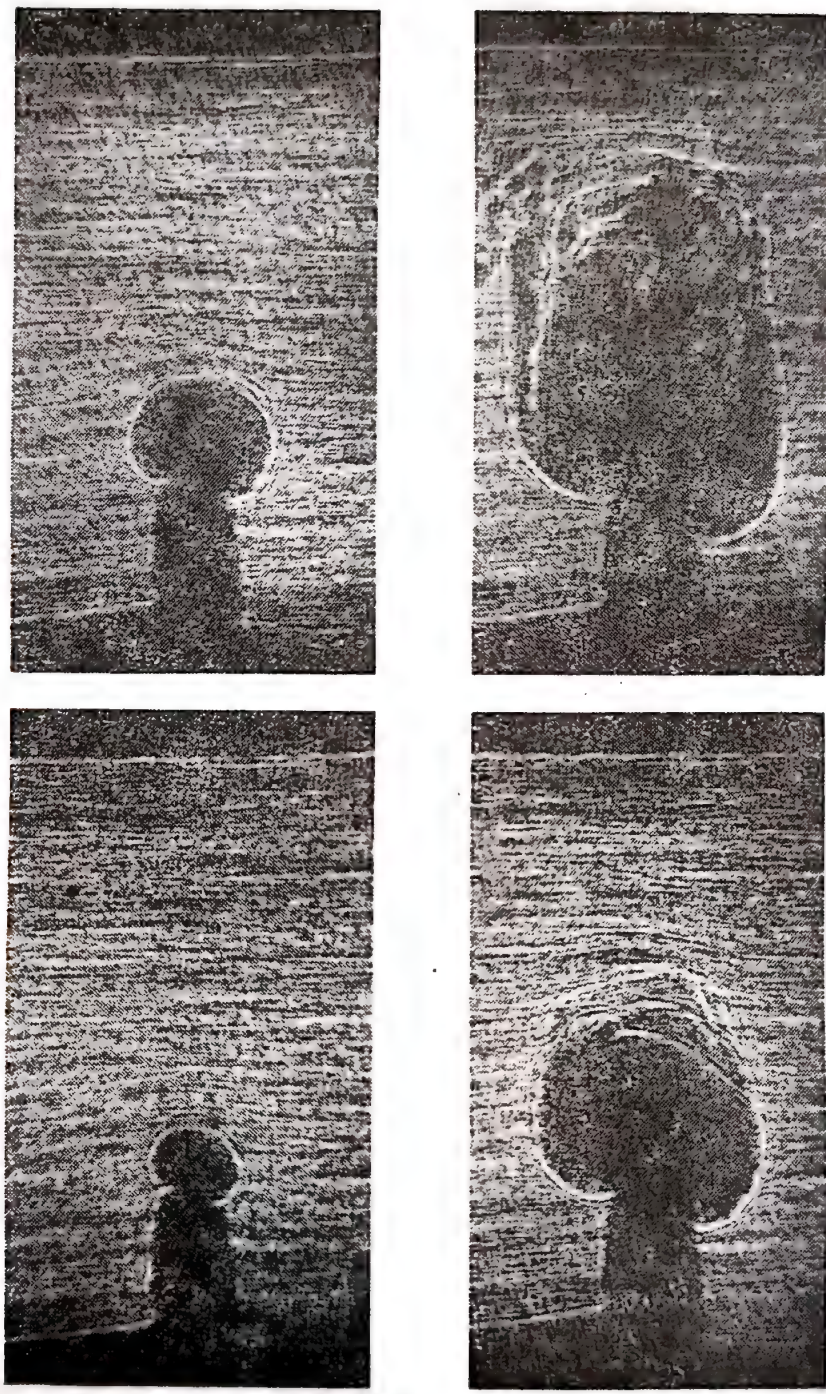


Fig. 6.36 c.

Cu ajutorul causticeei obținute experimental se pot determina dimensiunile zonei plastice și mai ales raza sa notată cu R . Cu ajutorul relației (6.130) notînd $z' = (z - a)$, se obține

$$\frac{2C\sigma_c}{\lambda_m a^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K}{(1 - K^2)^{1/2}} \left| \left(\frac{z}{a} \right)^{-1} \left(\frac{a}{a+R} \right)^2 \left[\left(\frac{z}{a} \right)^2 - \left(\frac{a+R}{a} \right)^2 \right]^{3/2} \left[\left(\frac{z}{Ka} \right)^2 - \left(\frac{a+R}{a} \right)^2 \right]^2 \times \left\{ 3 \left(\frac{z}{Ka} \right)^2 - \left(1 + \frac{2}{K^2} \right) \left(\frac{a+R}{a} \right)^2 \right\}^{-1} \right|. \quad (6.133)$$

Această expresie reprezintă o relație între mărimile normate $2C\sigma_c/\sigma_m a^2$, z/a și $a/(a+R)$ (sau σ/σ_c). Dacă în relația (6.132) se consideră $\theta = 0$, $\Phi = 0$, $z' = x' = r$, $y' = 0$, se obține

$$\frac{\delta}{\lambda_m \alpha} = \frac{r}{a} + \frac{2C\sigma_c}{\lambda_m a^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1 - K^2)^{1/2}}{K} \left(\frac{a+R}{a} \right)^2 \left[\left(\frac{z}{Ka} \right)^2 - \left(\frac{a+R}{a} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{z}{a} \right)^2 - \left(\frac{a+R}{a} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (6.134)$$

unde δ reprezintă lungimea causticeei de-a lungul direcției axei Ox .

În figura 6.37 sînt trasate diagramele care arată variația mărimii $2C\sigma_c/\lambda_m a^2$ în funcție de $\delta/\lambda_m a$ pentru diferite valori ale raportului $a/(a+R)$ (linii continue) și pentru diferite valori ale lui z/a (linii întrerupte), pentru valorile particulare $a = \pi/4$, $C = 1$, $\sigma = 0,5$. Măsurînd pe figură lungimea δ a causticeei după direcția axei Ox și cunoscînd proprietățile materialului, se poate deduce valoarea razei R din figura 6.37.

În lucrarea [21] s-a dezvoltat o analiză amănunțită a valabilității modelului lui Dugdale-Barenblatt cu ajutorul metodei causticelor pentru a rezolva problemele elasto-plastice în plăci fisurate din oțel. S-a tras concluzia în acest studiu că aplicarea modelului simplu depinde de limita superioară și inferioară de curgere a materialului ca și de existența fenomenului de ecrisare în timpul curgerii. În studiul [22] s-a extins modelul simplu al lui Dugdale-Barenblatt cu scopul de a se include influența ecrisajului asupra dezvoltării locașurilor plastice la extremitățile fisurii într-o placă solicitată la tracțiune la infinit. În timp ce în modelul simplu al lui Dugdale-Barenblatt, distribuția tensiunilor în zona plastică, în amonte de fisură, este considerată ca fiind constantă și egală cu limita de curgere, în versiunea sa modificată s-a considerat că această distribuție este variabilă între o valoare minimă egală cu limita de curgere σ_c și o valoare maximă σ_{max} , care depinde de nivelul sarcinii exterioare și de gradul de ecrisare al materialului.

S-au considerat în acest studiu șase configurații diferite pentru distribuția tensiunilor în zona plastică, cu diferite valori ale raportului σ_{max}/σ_c . Pentru fiecare dintre aceste configurații și pentru diferite nivele de încărcare exterioară, forma caustice corespunzând singularității în vecinătatea vârfului fisurii a fost calculată adaptînd, într-un fel apropiat teoria lui Dugdale-Barenblatt la fiecare dintre aceste șase configurații. De altfel

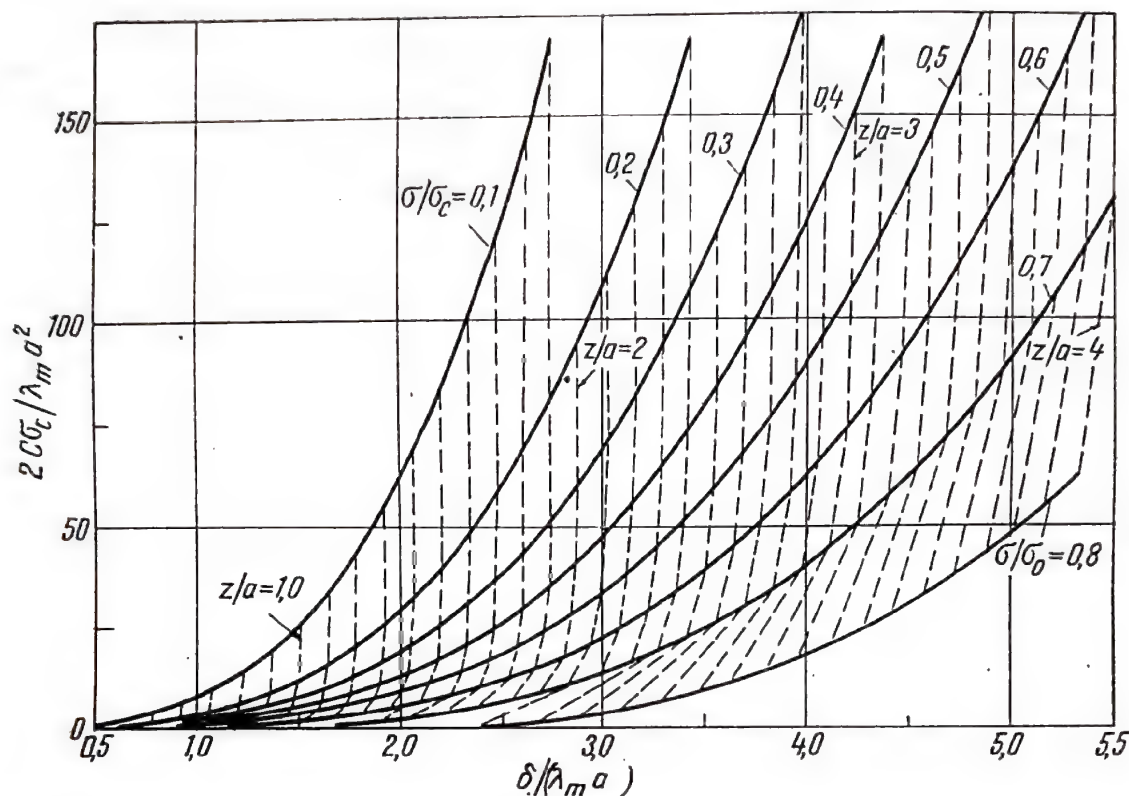


Fig. 6.37.

causticele pentru diferitele cazuri studiate au fost stabilite experimental prin reflexii ale razelor unui fascicul luminos paralel și coerent în vecinătatea vârfului fisurii. Au fost examinate trei tipuri diferite de oțeluri avînd diferite sarcini de tracțiune simplă, ca și la diferite grade de ecrusare. Comparînd formele causticelor obținute pe cale teoretică cu acelea obținute pe cale experimentală pentru aceleași nivele de sarcină exterioară s-a putut adapta modelul Dugdale-Barenblatt pentru fiecare caz din materialele considerate, în vederea sublinierii influenței ecrusajului asupra modului de rupere a fiecăruia dintre acestea și pentru a indica legea de distribuție a tensiunilor în zona plastică, în timp ce sarcina exterioară crește și deformațiile plastice suplimentare din epruvetă se dezvoltă.

6.11.2. DEFORMAȚIILE PLASTICE ÎN VECINĂTATEA CRESTĂTURILOR ASCUȚITE ÎN PLĂCI SUBȚIRI STUDIAȚE CU AJUTORUL CAUSTICELOR

Se presupune că în regiunea din jurul vârfului creștăturii (fig. 6.38) se află o distribuție liniară a tensiunilor, care depinde de ordinul singularității în vîrf și care nu depinde de unghiul creștăturii. Dacă unghiul creștă-

turii este mai mic de 90° se pot folosi relațiile date de Sneddon [24], care exprimă distribuția tensiunilor în vârful unei fisuri sub forma ecuațiilor (6.39). Folosind aceste relații și cu aceeași metodă utilizată în cazurile

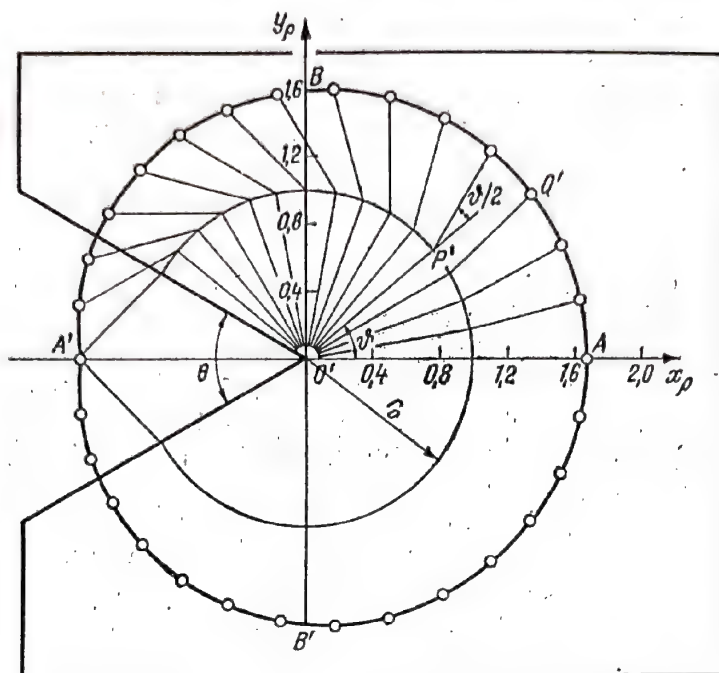


Fig. 6.38.

fisurilor, s-a stabilit [6] că curba inițială în vârful creștăturii este un cerc de rază

$$r_0 = (3C/2)^{1/5} \quad (6.135)$$

unde

$$C = z_0 dc \Delta \sigma_m (a/2)^{1/2} \quad (6.136)$$

iar c ia una din valorile următoare: c_r , c_i , c_f . Caustica este înfășurătoarea cercului precedent. Amîndouă sînt prezentate în figura 6.38 pentru o valoare a razei curbei inițiale $r_0 = 1$ și pentru un unghi al creștăturii de 60° . Celelalte caracteristici ale epruvetei confecționată din plexiglas și ale sistemului optic experimental (fig. 6.3) sînt: $a = 5$ mm, $z_f = 15,5$ cm, $z_0 = 116,5$ cm, $\lambda = 8,5$. Coeficientul de concentrare a tensiunilor, exprimat prin relația $K = \sigma_m(a)^{1/2}$, poate fi calculat cu ajutorul diametrului transversal al caustice cu relațiile (6.135) și (6.136). Curbele $K = f(\sigma_m)$, pentru diferite valori ale unghiului creștăturii φ , au aceeași alură cu curba $K = f(\sigma_m)$ pentru fisuri.

Concluziile trase, în baza acestui studiu, arată că pentru materiale fragile zona puternic deformată din jurul vârfului creștăturii are o formă circulară avînd centrul în vârful creștăturii. În plus, influența unghiului creștăturii este neglijabilă pentru valori ale unghiului cuprinse între

0° și 90°. De altfel, curbura vârfului creștăturii și raportul dintre adâncimea creștăturii și lățimea plăcii au o influență deosebită asupra valorii diametrului caustice. Cîmpul tensiunilor în jurul creștăturii depinde numai de valoarea tensiunii σ_m aplicată la infinit și de geometria plăcii.

6.12. UTILIZAREA CAUSTICELOR LA STUDIUL SINGULARITĂȚILOR ÎN CAZUL MATERIALELOR CVASIZOTROPE (COMPOSITE)

6.12.1. SINGULARITĂȚILE CU MULTISECTOARE

O altă categorie de singularități se formează la interfețele materialelor composite, dacă există extremități colțuroase.

Comportarea asimptotică a tensiunilor în vecinătatea punctelor singulare este prescrisă de doi parametri, anume: de ordinul de singularitate p și de coeficientul de concentrare a tensiunilor K_i . Rezultă că potențialul complex $\Phi(z)$, cu ajutorul căruia se poate exprima cîmpul

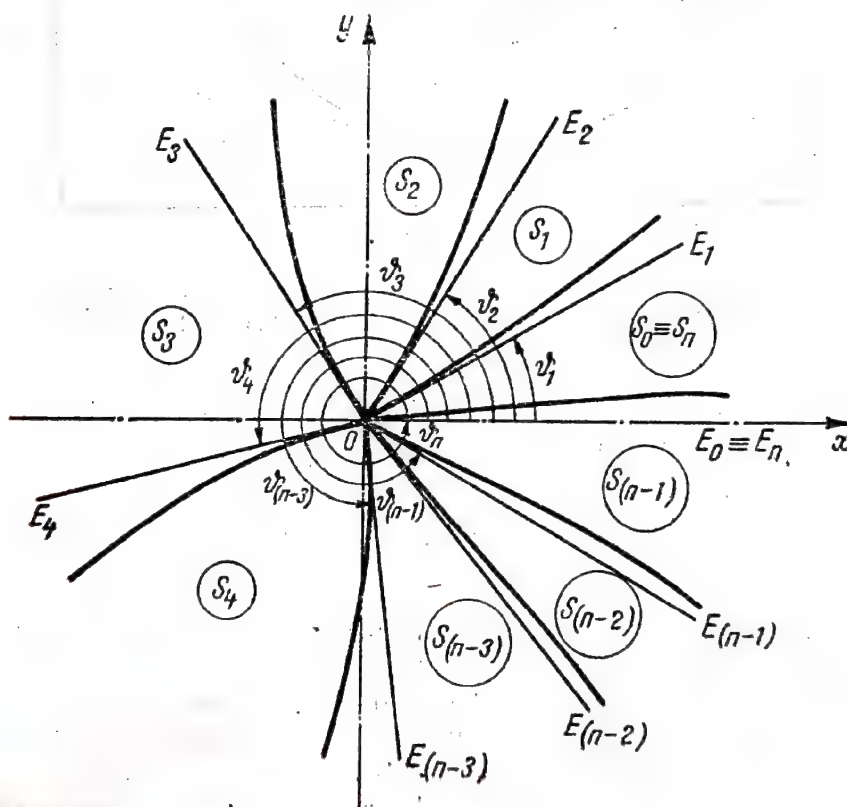


Fig. 6.39.

tensiunilor, folosind formulele bine cunoscute ale lui Kolosov-Muskhelishvili [27], are forma următoare

$$\Phi(z) = K_i z^{-p}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.137)$$

unde K_i este coeficientul de concentrare a tensiunilor pentru materialul i (fig. 6.39) și p ordinul de singularitate.

După dezvoltarea teoretică a acestei probleme [31], ordinul de singularitate p nu depinde de sistemul de încărcare, ci numai de geometria din jurul muchiei cu multe faze și de caracteristicile elasto-mecanice ale sistemului cvasiizotrop. Este posibil ca pentru diferite combinații ale materialelor, ordinul de singularitate p să fie un număr real și negativ și în consecință câmpul tensiunilor nu are puncte singulare. Din contră, coeficientul K_i , de concentrare a tensiunilor este o funcție de geometrie, de constantele elasto-mecanice și de forța aplicată sistemului cvasiizotrop.

Folosind potențialul complex pentru starea plană de tensiuni, autorul [32] a putut să determine ordinul de singularitate și coeficientul de concentrare K_i , într-o placă formată dintr-un număr oarecare N de sectoare din diferite materiale cimentate între ele (fig. 6.39). O placă avînd aceeași geometrie, dar pentru un contact de natură coulombiană (cu frecare) între sectoarele sale, a fost studiată în lucrarea [33]. În acest studiu au fost evaluați coeficientul K_i de concentrare a tensiunilor și ordinul de singularitate p . Exemple numerice sînt date, de asemenea, în lucrarea [34] pentru două sectoare cimentate între ele, iar în lucrările [35], [36] și [37], K_i și p au fost evaluați pentru două sectoare în contact coulombian. Din aceste studii se poate deduce că ordinul de singularitate este un număr complex, avînd partea sa reală cuprinsă între 0 și 1. Variația celor doi parametri p și K_i în funcție de geometria și de constantele elastice ale materialului cvasiizotrop este dată în figurile 6.40 și 6.41, unde sînt reprezentate atît partea reală cît și partea imaginară a singularității complexe p . Figurile 6.40 și 6.41, a, b, și c arată diagramele variației ordinului și singularității complexe p , în raport cu geometria materialului cvasiizotrop, pentru materialul composite cu frecare la suprafață.

Metoda causticelor poate fi folosită nu numai pentru determinarea parametrilor K_i și p în materiale cvasiizotrope, dar și pentru determinarea dependenței celor doi parametri. Într-adevăr, din expresia potențialului complex (6.135) se poate obține raza r_i a curbei inițiale, sub următoarea formă

$$r_i = [4C_i K_i p(p+1)e^{p2\vartheta_i}]^{1/(p_1+2)} \quad (6.138)$$

unde C_i se exprimă printr-una din relațiile (6.22) pentru materialul considerat i , ϑ_i reprezintă unghiul sectorului i (fig. 6.39) și este ordinul complex al singularității, dat de relația

$$p = p_1 + ip_2. \quad (6.139)$$

Ecuția corespunzătoare curbei caustice este dată de relația (6.37), în care trebuie ținut seamă de relația (6.135). Astfel se obține

$$W_i = r_i [e^{i\vartheta_i} \pm 4 C_i \bar{K}_i \bar{p} r_i^{-(p+2)} e^{i(\bar{p}+1)\vartheta_i}]. \quad (6.140)$$

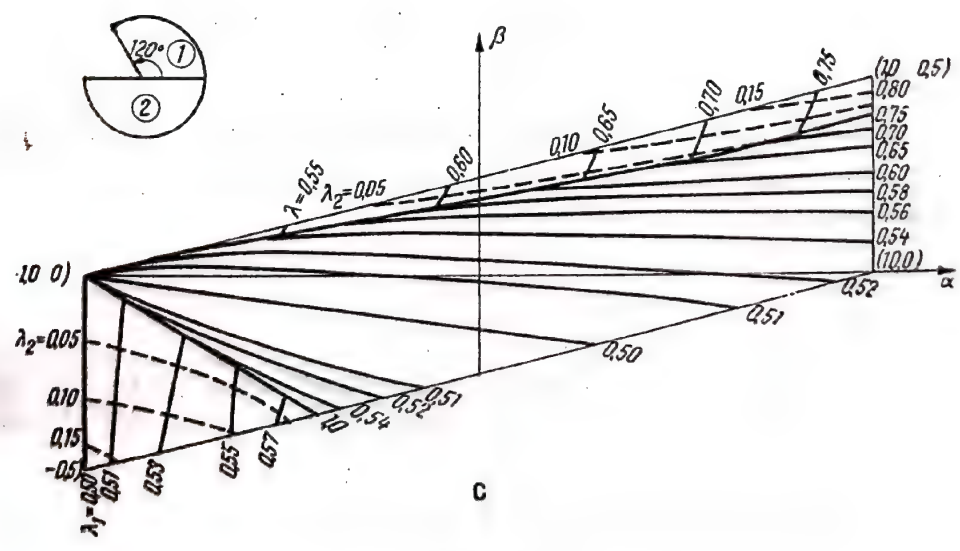
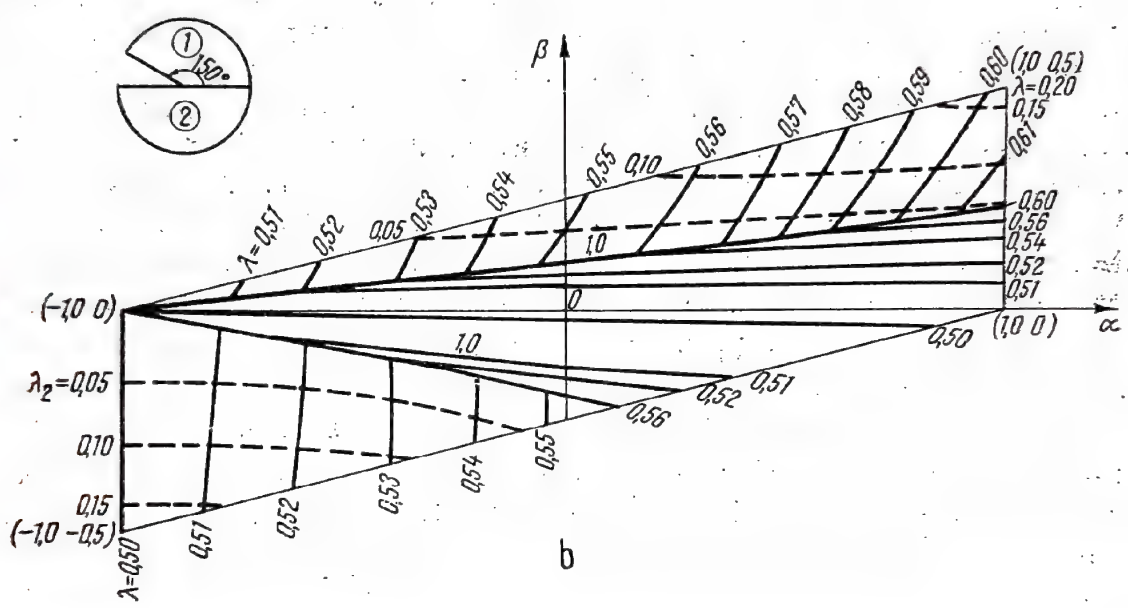
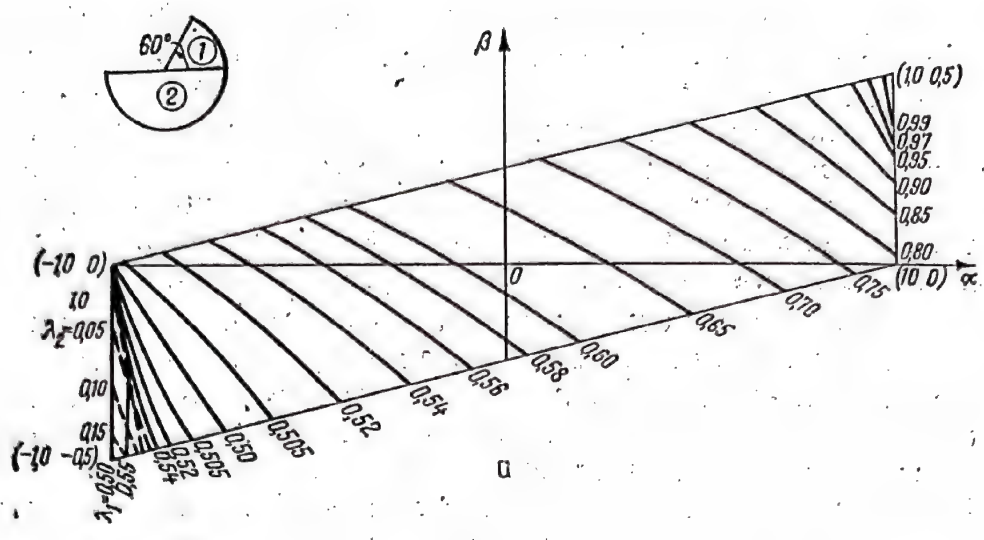


Fig. 6.40.

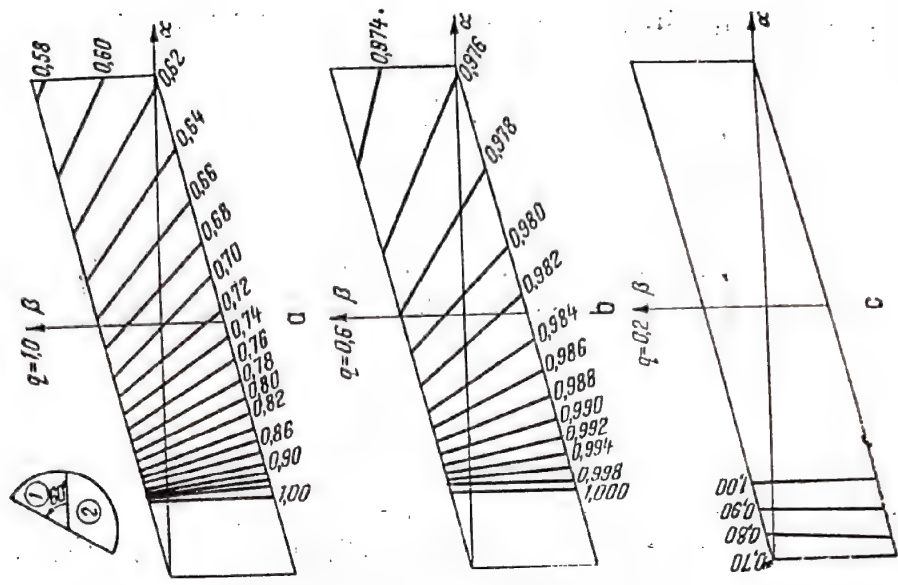
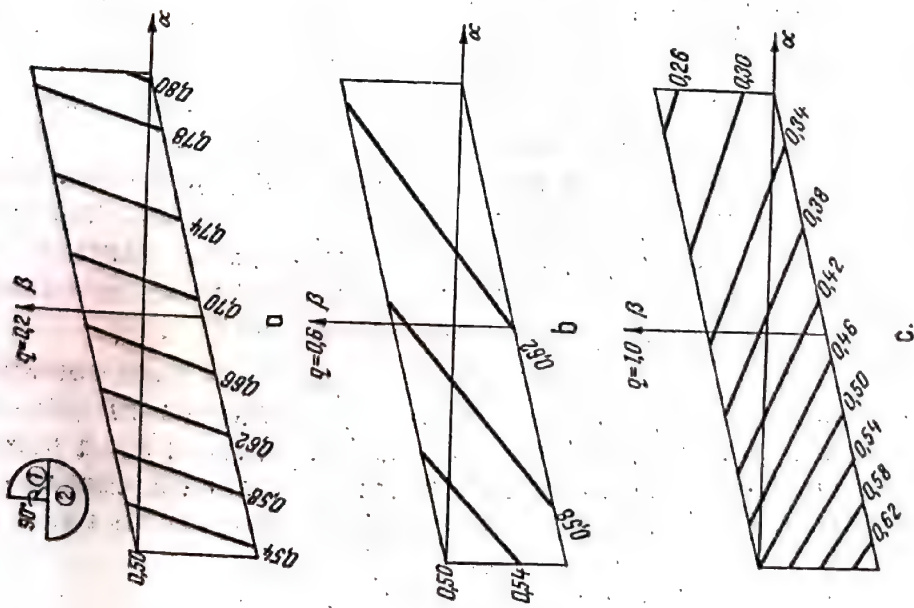


Fig. 6.41.

În cazul în care ordinul de singularitate p este dat de către un număr real, coordonatele unui punct al causticeii se exprimă prin

$$x_i = r_i \left\{ \cos \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \cos [(p_1 + 1) \varphi_i - \gamma_i] \right\} \quad (6.141a)$$

$$y_i = r_i \left\{ \sin \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \sin [(p_1 + 1) \varphi_i - \gamma_i] \right\} \quad (6.141.b)$$

unde

$$K_i = |K_i| e^{i\gamma_i}.$$

O simplificare importantă a relației (6.141 a) se poate obține dacă coeficientul de concentrare a tensiunilor este real, adică dacă $\gamma = 0$. În acest caz se obține

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \left[\cos \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \cos (p_1 + 1) \varphi_i \right] \\ y_i &= r_i \left[\sin \varphi_i \mp \frac{1}{p_1 + 1} \sin (p_1 + 1) \varphi_i \right]. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Introducând valoarea $p_i = 0,5$ în relațiile (6.138) și (6.141 b) pot fi obținute ecuațiile curbei inițiale și ale causticeii în cazul unei plăci din material omogen și izotrop conținând o fisură [12].

O determinare experimentală a parametrilor p și K_i pentru un material evasiizotrop este posibilă cu ajutorul relațiilor (6.138) și (6.141) măsurând pe caustica experimentală obținută elementele caracteristice (diametrele, unghiurile, razele) causticeii. Influența parametrilor p și K_i asupra formei și dimensiunilor causticelor este arătată în figurile 6.42 și 6.43. În figura 6.42 se arată variația causticelor față de valoarea singularității pentru: $p = 0,05$ (a); $p = 0,25$ (b); $p = 0,5$ (c) și $p = 0,8$ (d) iar în figura 6.43 variația diametrului longitudinal D_l al causticeii, diametrului său transversal D_t , definit prin ramura sa interioară, ca și valoarea minimă a razei polare (r_{min}) a ramurei interioare a acestei curbe, față de ordinul de singularitate p . Toate aceste mărimi au fost normate prin raza curbei inițiale. În aceeași figură este reprezentată, de asemenea, variația distanței D_{min} măsurată între punctul cel mai apropiat al ramurii interioare și punctul cel mai îndepărtat al ramurii exterioare al causticeii față de punctul singular, normată cu mărimea $(2CK)^{1/(p+2)}$.

În figura 6.42 se poate observa că acele caustice care corespund valorilor reale ale mărimilor p și K sînt simetrice în raport cu axa orizontală. În plus, causticele se rotesc în jurul punctului singular cînd parametrii K și p iau valori complexe. În figura 6.44 este prezentată caustica obținută teoretic și construcția sa geometrică pentru p complex în cazul în care p

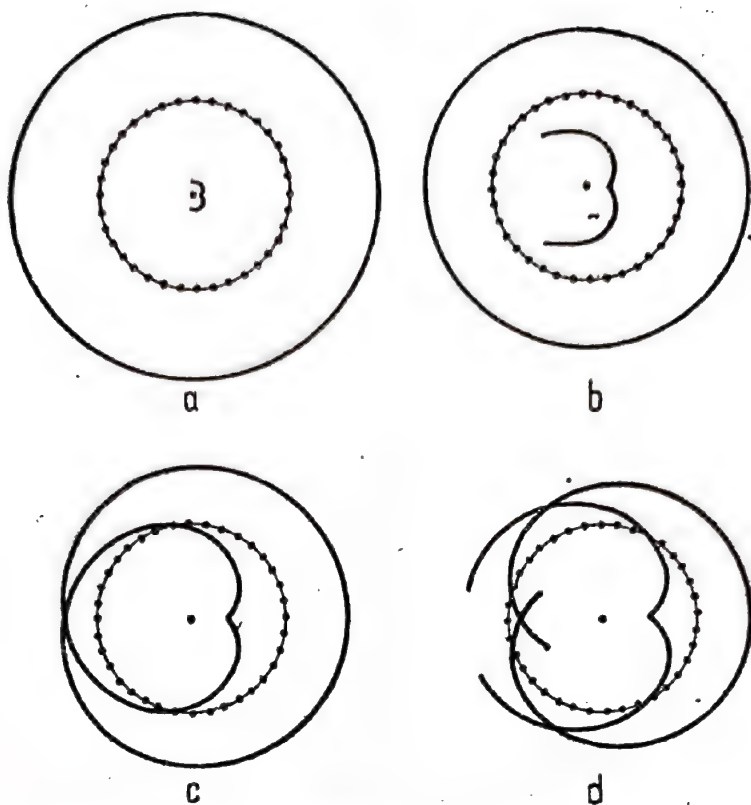


Fig. 6.42.

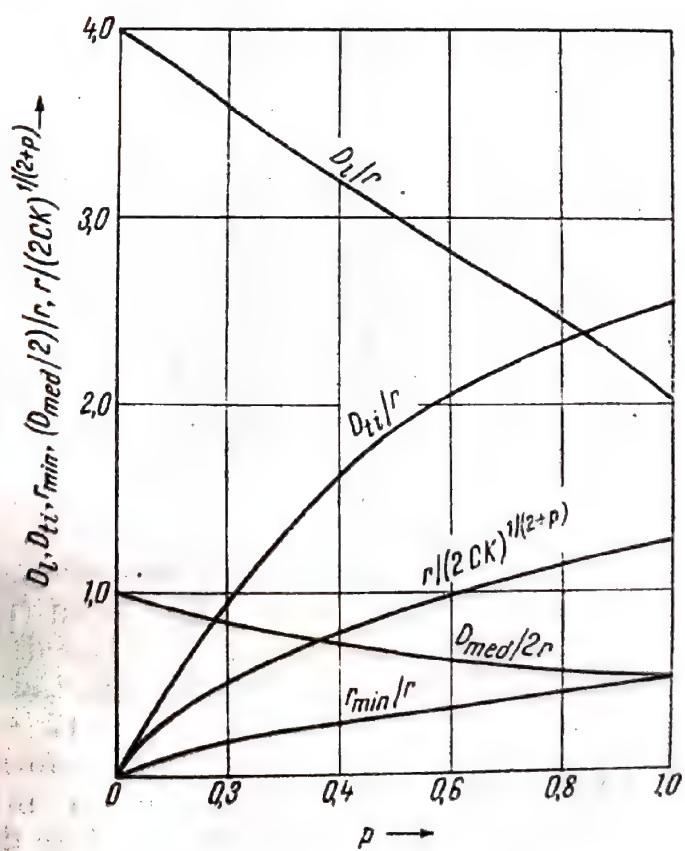


Fig. 6.43.

este dat de relația $p = (0,5 + 0,1i)$ și K este real. În aceeași figură se poate observa că atât curba inițială cât și curba caustice sînt curbe discontinue. Interferogramele ca și curbele causticelor generate în vîrfurile unei muchii într-un material evasiizotrop alcătuit din două materiale, solicitat la

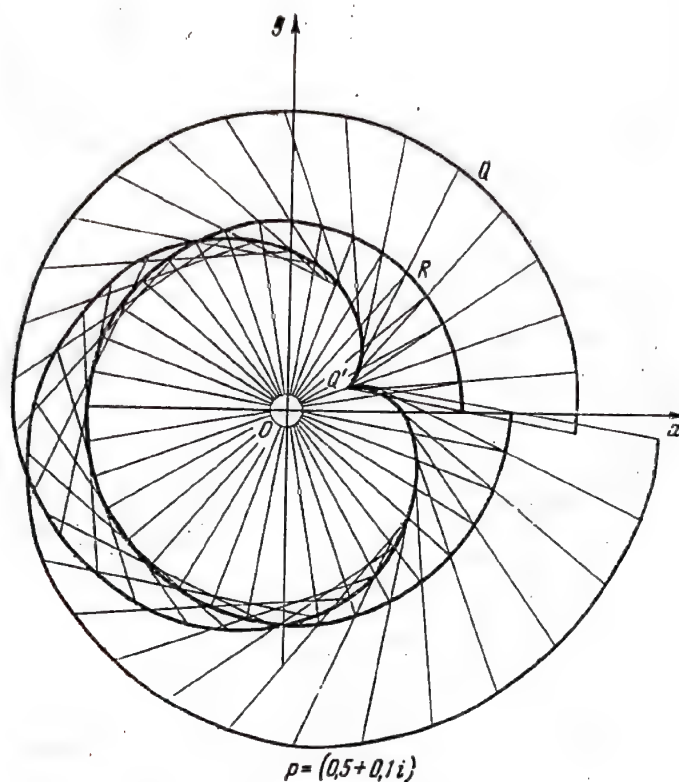
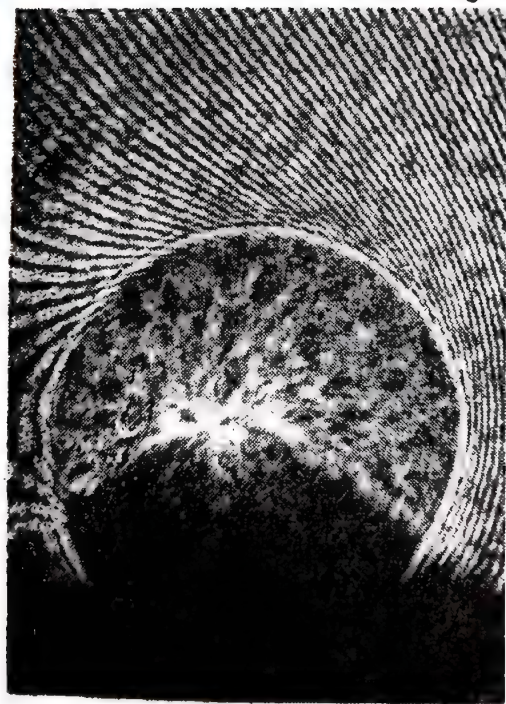


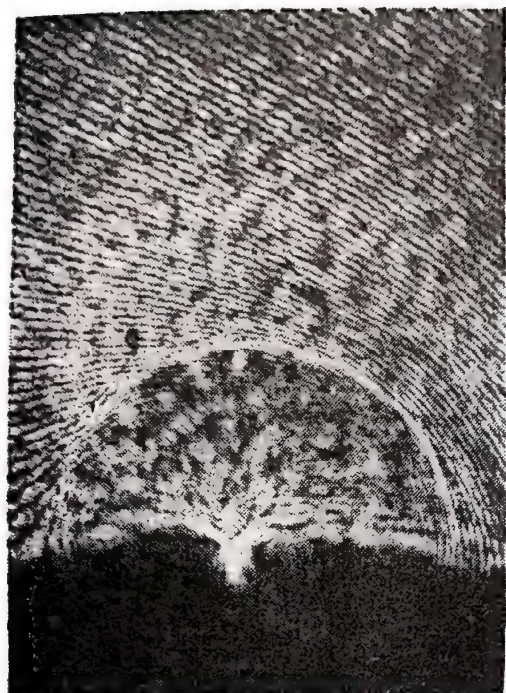
Fig. 6.44.

tracțiune, după direcția axei de simetrie a muchiei, sînt prezentate în figura 6.45, pentru valori ale unghiului θ (vezi figura 6.39) egale cu 260° (a) și (210°) (b). În figurile 6.46 a și 6.46 b sînt prezentate curbele causticelor în vîrfurile unui sector din oțel care se sprijină pe un semiplan din plexiglas pentru valori ale unghiului sectorului $\theta = 120^\circ$ (a) și $\theta = 90^\circ$ (b). Se poate observa că sînt generate caustice numai de către sectorul din plexiglas din cauza valorii modulului de elasticitate care este mult mai mic decît al oțelului.

O altă combinație a unei plăci din plexiglas conținînd un sector din oțel avînd un unghi la vîrf $\theta = 60^\circ$ sub acțiunea unei sarcini de tracțiune, după direcția axei de simetrie a sistemului, a fost studiată experimental. Causticele rezultate sînt prezentate în figura 6.47. Caustica este generată, ca în cazul precedent, de sectorul din plexiglas al plăcii evasiizotrope din cauza diferenței mari între cele două module de elasticitate ale materialelor. Curba teoretică a causticei pentru figura 6.47 este reprezentată în figura 6.48. În cazul unei caustice, simetrice, care se formează în punctul singular al unui material evasiizotrop, conținînd un număr de sectoare dispuse simetric față de direcția forței, este posibil să se determine ordinul de singularitate p , care este un număr real, măsurînd caracteristicile



a)

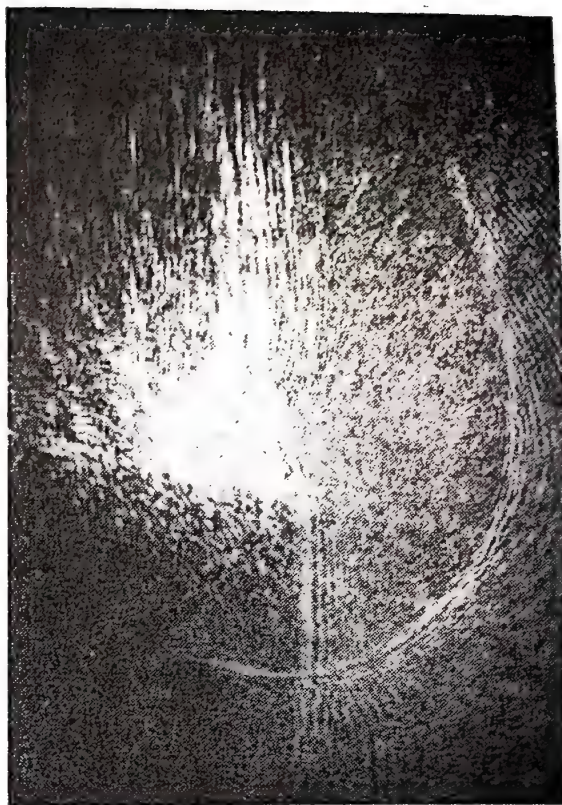


b)

Fig. 6.45.



a)



b)

Fig. 6.46.

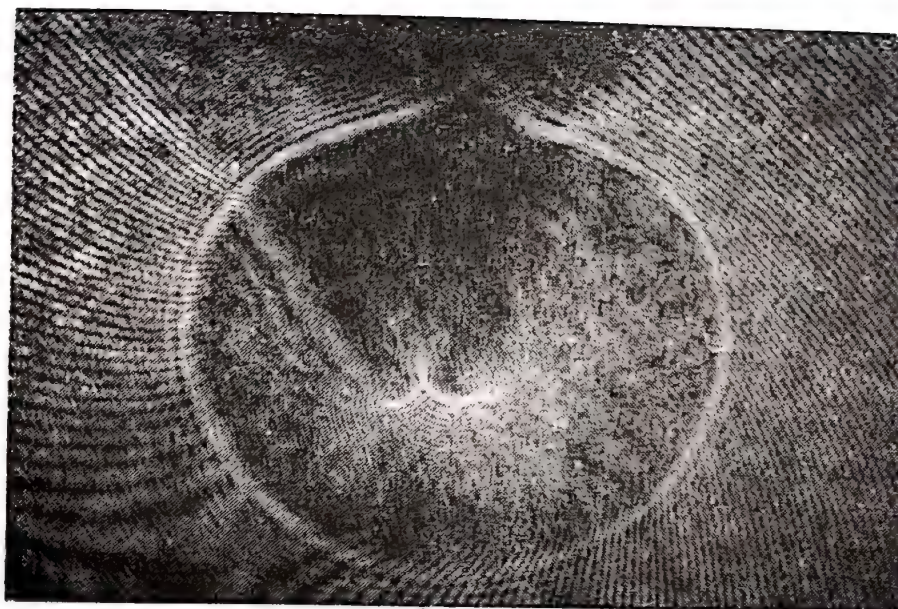


Fig. 6.47.

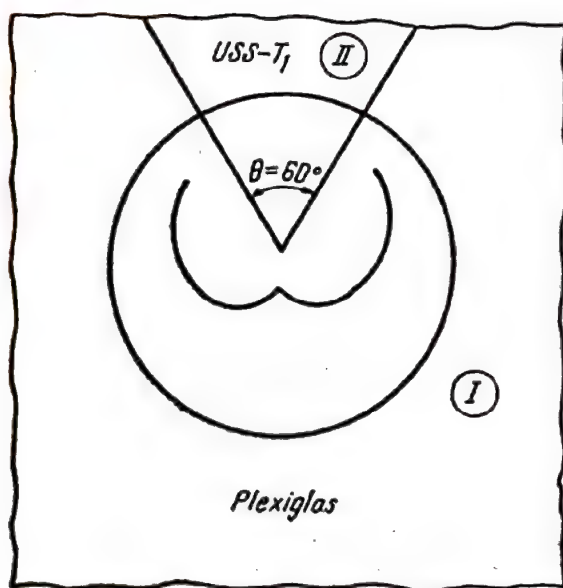


Fig. 6.48.

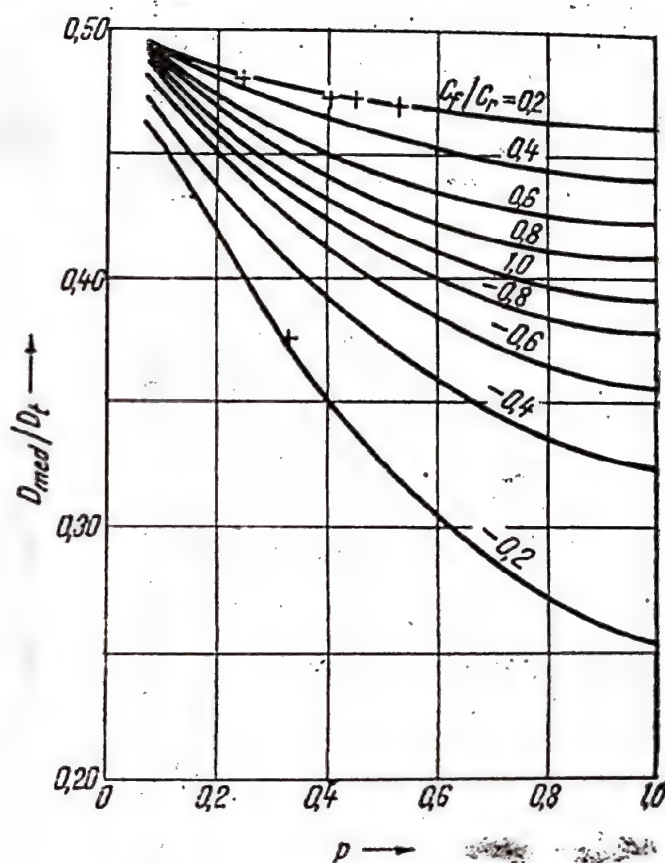


Fig. 6.49.

geometrice ale caustice, care sînt reprezentate în figura 6.49. Aceste caracteristici ale causticelor sînt : distanța D_{med} și diametrul transversal D_t al causticei exterioare. În plus, este necesar să se cunoască raportul c_f/c_r (vezi § 6.2) a două constante optice ale materialului pentru razele reflectate de fața anterioară și respectiv posterioară a plăcii. Evaluarea coefi-

cientului de concentrare $K_i = K_i^I + K_i^{II}$ a tensiunilor și a ordinului de singularitate $p = p_1 + p_2 i$, în cazul general al unui material cvasiizotrop conținând un număr oarecare de sectoare poate fi realizată folosind forma generală a ecuațiilor curbei inițiale (6.34) și a causticei (6.36) presupunind că sînt determinate experimental caracteristicile geometrice ale causticei.

6.12.2. UTILIZAREA CAUSTICELOR ÎN CAZUL MATERIALELOR CVASHIZOTROPE CU FISURI

Problema unui material cvasiizotrop conținând sectoare fisurate este de mare importanță practică. Ordinul de singularitate a cîmpului de tensiuni la extremitatea unei fisuri terminîndu-se la interfața sectoarelor materialului cvasiizotrop este o funcție de constantele elastice ale materialelor cvasiizotrope. Metoda causticelor sub forma dezvoltată în paragraful precedent poate fi folosită pentru determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor și a ordinului de singularitate la extremitatea unei fisuri într-un material cvasiizotrop. Fisura poate fi considerată ca un sector avînd un unghi la vîrf $\theta = 0$ și modulul de elasticitate $E = 0$. Figura 6.50, a prezintă forma teoretică a causticei la extremitatea unei fisuri într-un material cvasiizotrop avînd caracteristicile date pe aceeași figură, iar figura 6.50, b prezintă forma corespunzătoare a causticei obți-

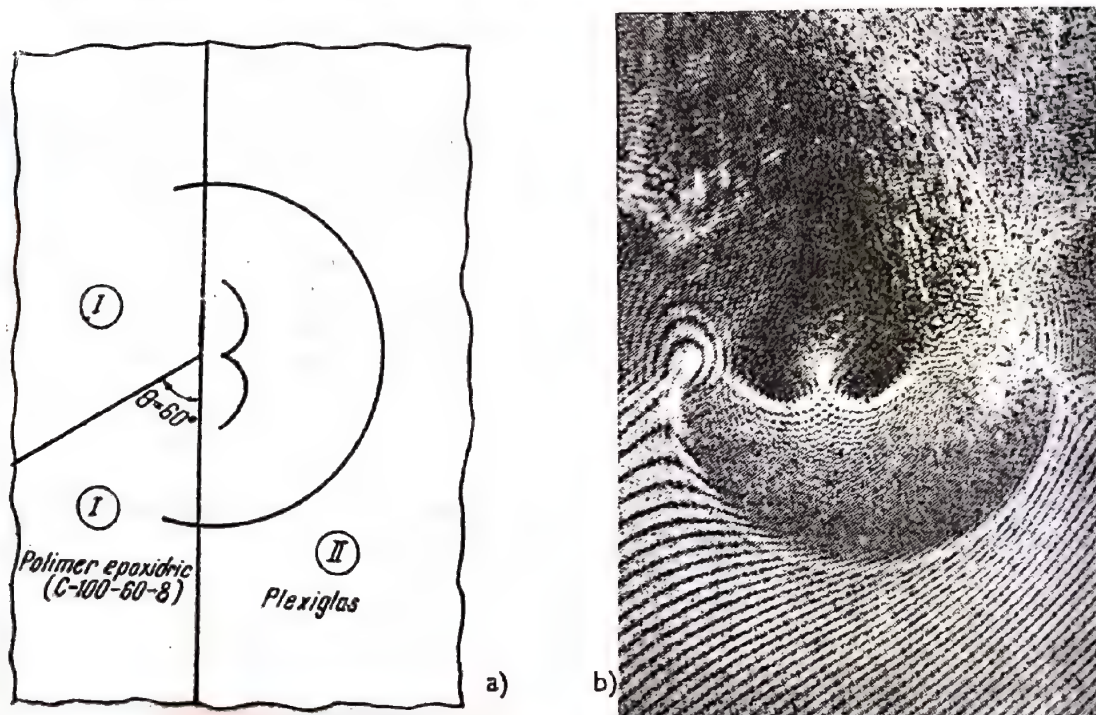


Fig. 6.50.

nută pe cale experimentală. Se poate observa pe cele două figuri, coincidența celor două caustice teoretică și experimentală.

Cu ajutorul relațiilor (6.136) și (6.134) și al caracteristicilor geometrice ale caustice, se poate determina valoarea coeficientului de concentrare K a tensiunilor și ordinul de singularitate p la extremitatea fisurii.

BIBLIOGRAPHIE

1. FAVRE, H., *Sur une nouvelle méthode d'optique de détermination des tensions intérieures*, Revue d'Optique Théorique et Instrumentale, Vol. 8, 1929.
2. BORN, M. and WOLF, E., *Principles of optics*.
3. THEOCARIS, P. S., *Local Yielding Around a Crack Tip in Plexiglas*, Journal of Applied Mechanics, June 1970.
4. THEOCARIS, P. S., *The Spread of Plastic Zones Between Symmetric Edge Cracks*, Israel Journal of Technology, Vol. 8, No. 4, 1970.
5. THEOCARIS, P. S., *The Reflected-Shadow Method for the Study of the Constrained Zones in Cracked Birefringent Media*, Journal of Strain Analysis, Vol. 7, 1972.
6. THEOCARIS, P. S., *Plastic Strains at the Roots of Sharp Notches in Perspex*, Proc. 4th Int. Conf. Exp. Stress Analysis, Cambridge, England, 1970.
7. THEOCARIS, P. S., *Complex Stress-Intensity Factors at Bifurcated Cracks*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 20, 1972.
8. THEOCARIS, P. S. and JOAKIMIDES, N., *Some Properties of Generalized Epicycloids Applied to Fracture Mechanics*, J. Appl. Math. and Physics (ZAMP) Vol. 22, Fasc. 5, 1971.
9. THEOCARIS, P. S., *Constrained Zones in a Periodic Array of Collinear Equal Cracks*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, 1972.
10. THEOCARIS, P. S., *Interaction of Cracks with Other Cracks or Boundaries*, Int. J. of Fracture Mech., Vol. 8, No. 1, March 1972.
11. THEOCARIS, P. S., *Reflected Shadow Method for the Study of Constrained Zones in Cracked Plates*, Applied Optics, Vol. 10, Oct. 1971.
12. THEOCARIS, P. S., and GDOUTOS, E. E., *An Optical Method for Determining Opening-Mode and Edge Sliding-Mode Stress-Intensity Factors*, J. Appl. Mech., March 1972.
13. THEOCARIS, P. S., *Optical Stress Rosette Based on Caustics*, Appl. Optics, Vol. 12, 1973.
14. THEOCARIS, P. S., *Stress Singularities at Concentrated Loads*, Exp. Mech., December 1973.
15. THEOCARIS, P. S., *The Reflected-Shadow Method for the Study of the Constrained Zones in Cracked Birefringent Media*, J. of Strain Analysis, Vol. 7, No 2, 1972.
16. THEOCARIS, P. S., *Interaction Between Collinear Asymmetric Cracks*, J. Strains Analysis, Vol. 7, No 3, 1972.
17. THEOCARIS, P. S., and BLONTZOU, C. H., *Symmetric Branching of Cracks in PMMA*, Materialprüfung 15, No 4, pp. 123-130, April 1973.
18. THEOCARIS, P. S., *A Theoretical Consideration of the Constrained Zones in an Array of Interacting Collinear and Asymmetric Cracks*, Acta Mechanica, Vol. 17, No 3-4, 1973.
19. THEOCARIS, P. S., *Intensity Factors of Stationary Cracks in Cylindrical Shells under Internal Pressure*, Proc. First Intern. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (Paper G6/7, Berlin, 1972), Vol. 4, Part. G., 1972.
20. THEOCARIS, P. S., *Stress Intensity Factors in Yielding Materials by the Method of Caustics*, Int. J. Fract. Mech., Vol. 9, No 2, 1973.
21. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E. E., *Verification of the Validity of the Dugdale-Barenblatt Model by the Method of Caustics*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 6, No 3, 1974.
22. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E. E., *The Modified Dugdale-Barenblatt Model Adapted to Various Fracture Configuration in Metals*, Int. J. Fract. Mech., Vol. 10, No 4, 1974.
23. THEOCARIS, P. S., *Stress-Singularities due to Uniformly Distributed Loads Along Straight Boundaries*, Int. J. Solids Structure, Vol. 9, No 5, 1973.

24. SNEDDON, J. N., *The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid*, Proceedings of the Physical Society, London, Vol. 187, 1946.
25. SIH, G., PARIS, P. and ERDOGAN, F., *Crack-tip Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems*, J. of Appl. Mech., Vol. 29, Trans. ASME, Vol. 84, Serie E, 1962.
26. BOWIE, O. L. and NEAL, D. M., *Single-Edge Crack in Rectangular Tensile Sheet*, J. Appl. Mech., Vol. 32, Trans. ASME, Vol. 87, Series E, 1965.
27. MUSKHELISHVILI, N., *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, 1953.
28. WESTERGAARD, H. M., *Bearing Pressures and Cracks*, J. Appl. Mech., Vol. 6, Trans. ASME, Vol. 31, 1939.
29. THEOCARIS, P. S. and RAZEM, C. I., *Load Distribution at Singularities Determined by Caustics*, to be published (in curs de publicare).
30. THEOCARIS, P. S. and RAZEM, C. I., *Deformed Boundaries Determined by the Method of Caustics*, to be published (in curs de publicare).
31. THEOCARIS, P. S., *Stress and Displacement Singularities Near Corners*, J. of Appl. Math. Ph. (ZAMP), Vol. 26, No 1, 1975.
32. THEOCARIS, P. S., *The Order of Singularities at a Multi-Wedge Corner, of a Composite Plate*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 12, 1974.
33. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E.E., *Stress Concentration on the Apex of a Plane Indenter Acting on an Elastic Half-plane*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 42, No 3, 1975.
34. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E.E., *Stress Singularities at Equal Angle Bi-wedges and Two-Material Composite Half-Planes with Rough Interfaces*, J. Appl. Mech., Trans. ASME 1976.
35. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E. E., *Stress Singularities at Vertices of Composite Plate with Smooth or Rough Interfaces*, Archives of Mechanics (Poland), 1976.
36. THEOCARIS, P. S., *Stress Singularities in a Bi-wedge*, Revue Roumaine des Sciences Techniques — Mécaniques Appliquée, 1976.
37. BOGY, D. B., *Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction*, J. Appl. Mech. 38, 1971.
38. BOGY, D. B., *On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface*, J. Appl. Mech. 38, 1971.
39. SMITH, D. G. and SMITH, C. W., *Photoelastic Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors*, Engrg. Fracture Mech. 10, 1970.
40. SMITH, C. W., *Use of Three-Dimensional Photoelasticity in Fracture Mechanics*, Exp. Mech. 13, 1973.
41. THEOCARIS, P. S. and GDOUTOS, E.E., *A Photoelastic Determination of K_I Stress Intensity Factors*, Engrg. Fracture Mech., Vol. 7, No 2, 1975.
42. THEOCARIS P. S., *The Determination of Mode I Stress-Intensity Factors by Holographic Interferometry*. Further comments on a discussion by Fourney, Exp. Mech., Vol. 14, 1974, on a paper by Dudderar and O'Regan, Exp. Mech., Vol. 13, No 4, 1973, Exp. Mech., Vol. 15, No 4, 1975.
43. KOBAYASHI, A. S., ENGSTRÖM, W. L., SIMON, B. B., *Crack Opening Displacements and Normal Strains in Centrally Notched Plates*, Exp. Mech., Vol. 9, No 4, April 1969.
44. PARIS, C. P., and SIH, C. G., *Stress Analysis of Cracks. Fracture toughness testing and its applications*, 1965 (A.S.T.M. Special Technical Publication, Nr. 381, Philadelphia, Pa).

METODA LACURILOR CASANTE

Prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU,
Ing. L. NĂILESCU

7.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Metoda se bazează pe aderarea perfectă a unui strat de lac cu caracteristici casante, la proba, respectiv structura ce urmează să fie studiată. Când proba este solicitată, deformările ce apar sînt transmise la stratul de lac, producînd tensiuni de suprafață care în cele din urmă provoacă fisurarea lacului. Deoarece lacul casant este conceput să fisureze la un nivel scăzut al tensiunii, proba nu este suprasolicitată, iar metoda este considerată nedistructivă.

Primele lacuri casante folosite în tensometrie au fost acelea ce se formau în mod natural pe suprafața unor elemente ca tunderul ce se formează la laminarea la cald a oțelului și oxizii de pe suprafețele încălzite. Aceste învelișuri casante se distrug prin exfoliere sau crăpare cînd materialul de bază cedează sub sarcină producîndu-se deformări excesive. Pentru a îmbunătăți vizibilitatea cîmpului de fisuri piesele erau adesea acoperite cu lapte de var. Fisurarea și exfolierea învelișului produce linii negre ușor vizibile în contrast cu fondul alb. Primul înveliș casant realizat în mod artificial a fost un amestec de șelac și alcool, pe care Sauerwald și Wieland [18] l-au folosit în anul 1925 pentru a pune în evidență zonele de deformare plastică. Această tehnică a amestecului de șelac cu alcool a constituit un progres față de cea a laptelui de var; totuși deformările necesare fisurării învelișului fiind încă în domeniul de curgere al materialului de bază, metoda nu a putut fi considerată nedistructivă. Pentru a mări sensibilitatea la deformare, Dietrich și Lehr [4] în Germania (1932), Portevin și Cymboliste [1] în Franța (1934) și Ellis [9] în Statele Unite (1937) au dezvoltat și introdus procedee noi folosind alte învelișuri cu proprietăți casante.

Ellis, lucrînd pentru firma Magnaflux a realizat un lac pe bază de rășini [9], lac comercializat în anul 1941. Formula acestui lac este relativ simplă, cu trei constituenți de bază: rezinat pe bază de zinc, sulfură de carbon ca solvent și ftalat de dibutil (dibutilftalat) ca plastifiant, pentru a varia gradul de fragilitate al lacului. Acest lac pe bază de rășini cunoscut sub denumirea de Stresscoat, este larg răspîndit în S.U.A., Europa și Japonia,

fiind indicat, în special, acolo unde precizia nu este factorul hotărâtor al analizei.

În ultimii ani s-a pus un accent deosebit pe dezvoltarea lacurilor casante pe bază de ceramică. F. Singdale [19] a realizat un lac din email și porțelan care, aplicat pe metale și încălzit în mod corect, fisurează la nivele prestabilite ale tensiunii. Un înveliș pe bază de ceramică a fost comercializat de către firma Magnaflux sub denumirea All-Temp [14]. Acest lac a fost folosit, până în prezent, pe scară redusă, fapt pentru care datele referitoare la performanțele sale sînt foarte sumare.

Utilizarea lacurilor casante în tensometrie prezintă următoarele avantaje :

1. Oferă pentru întreaga zonă studiată date privind direcția tensiunilor principale și nu necesită o analiză punct cu punct ca în cazul altor metode tensometrice.

2. Nu necesită construirea unui model, aplicîndu-se, de regulă, pe piesa sau structura ce face obiectul cercetării.

3. Din datele furnizate se poate obține valoarea tensiunilor, fără calcule laborioase.

Ca principal dezavantaj al metodei se menționează faptul că precizia măsurătorilor este sensibil dependentă de variațiile de temperatură și umiditate din timpul încercării și aplicării sarcinilor. Aceasta mai depinde într-o măsură mai mică de grosimea stratului de lac și de starea de tensiuni în zona cercetată. Pentru a reduce erorile, cercetătorul trebuie să cunoască în mod cît mai complet posibil comportarea lacului casant. Dacă în timpul pregătirilor și al încercării sînt luate măsuri de precauție corespunzătoare, precizia determinărilor, prin metoda lacului casant, este de obicei suficientă pentru analiza tensiunilor în majoritatea cazurilor întîlnite în practica inginerescă.

7.2. LACURI CASANTE ȘI TEHNICA UTILIZĂRII LOR

7.2.1. TIPURI DE LACURI CASANTE ȘI CARACTERISTICILE LOR

Generalități. În funcție de scopul urmărit în analiza experimentală a tensiunilor cu ajutorul lacurilor casante, se impune alegerea tipului de lac cel mai potrivit pentru aplicarea cu ușurință pe piesa de cercetat și pentru o valorificare cît mai bună a rezultatelor. Se va avea în vedere în primul rînd sensibilitatea lacului, precum și comportarea sa în diferite condiții.

Lacul, care se aplică pe suprafața piesei sau structurii ce face obiectul cercetării, este fie în formă lichidă și se întărește pe piesă prin evaporarea solventului, fie în formă solidă și este topit prin încălzire. Unele lacuri se usucă la temperaturi ridicate în timp ce altele se pot întări la temperatura camerei.

Deformațiile produse în piesă sau structură sînt transmise stratului de lac datorită adeziunii dintre lac și piesă, respectiv structură. Aceste deformații dezvoltă o stare de tensiuni în stratul de lac.

Totuși, pentru că valorile constantelor elastice (modulul de elasticitate și coeficientul lui Poisson) ale lacului sînt diferite de cele ale materialului piesei, pentru determinarea stării de tensiuni în stratul de lac, ca o funcție de starea de tensiuni din piesă și reciproc, sînt necesare calcule matematice care să permită interpretarea corectă a informațiilor obținute din fisurarea lacului. În cele mai multe lacuri casante se produc tensiuni remanente cînd se întăresc, deoarece, în general, ele se contractă cînd ajung în stare solidă. Aceste tensiuni joacă un rol foarte important în comportarea lacului; dacă tensiunile sînt de întindere, cu cît sînt mai mari cu atît mai mică va fi tensiunea suplimentară necesară fisurării stratului de lac.

Lacurile casante au, în general, un coeficient de dilatare termică mai mare decît al metalelor la care aderă, din care cauză apar, în stratul de lac, tensiuni termice care trebuie analizate cu atenție [5].

Cu ajutorul lacurilor casante, așa cum s-a arătat, se poate obține o imagine generală a distribuției tensiunilor pe toată suprafața structurii de cercetat și, dacă este necesar, se poate continua măsurarea deformațiilor în anumite puncte utilizînd traductoare rezistive. (v. cap. 3).

Deoarece direcția de fisurare a lacului coincide cu direcția uneia din tensiunile principale, starea de tensiuni într-un punct poate fi determinată folosind numai două traductoare în loc de trei. Lacurile casante avînd o lungime activă de măsurare foarte mică, sînt ideale pentru măsurarea deformației în punctele cu concentratori.

Clasificarea lacurilor casante. Clasificarea lacurilor casante se face pe baza următoarelor criterii:

- starea fizică;
- elementele componente;
- scopul urmărit în cercetare.
- a) După starea fizică în care se găsește lacul casant se disting:
 - lacuri solide;
 - lacuri sub formă de pulbere;
 - lacuri email și
 - lacuri lichide.

Starea fizică a lacului determină și procedeul de aplicare pe structura de încercat (v. § 7.2.1.3.)

- b) În funcție de principalul element component al lacului se cunosc:
 - lacuri pe bază de rășini, utilizate pentru încercări la temperaturi cuprinse între 0—40°C și
 - lacuri pe bază de ceramică, ce pot fi utilizate pînă la temperaturi de 380°C.

- c) În funcție de scopul urmărit în cercetare se disting:
 - *lacuri calitative*, a căror scop este determinarea traseului liniilor izostatice (direcțiile tensiunilor principale) și zonelor de solicitare maximă, oferind o imagine generală privind distribuția tensiunilor în structura ce face obiectul cercetării. Determinările calitative pot fi făcute cu oricare din tipurile de lacuri casante cunoscute

— *lacuri cantitative*, cu ajutorul cărora, în afară de determinările calitative, se pot face și determinări cantitative, adică pot fi determinate

valorile tensiunilor. În acest scop este necesar să se determine *pragul de deformare* al lacului (v. § 7.3). Prin prag de deformare al lacului casant se înțelege deformarea specifică minimă, necesară fisurării stratului de lac; lacul casant este cu atât mai sensibil cu cât pragul său de deformare este mai scăzut.

Tipuri de lacuri casante. Dintre lacurile cunoscute cele mai folosite, în prezent, sînt tipurile Maybach, ONERA, SNECMA, Brafa, Stresscoat, Tens-Lac și All-Temp, lacuri foarte sensibile, capabile să fisureze sub limita de elasticitate a oțelurilor de construcții. La fiecare tip de lac corespunde un anumit procedeu de utilizare.

a) *Lacul Maybach.* Acest lac, elaborat de Otto Dietrich, este un lac în stare solidă, fuzibil, preparat din 7 părți colofoniu și 3 părți rășină dammar [15].

Amestecul este topit la 150°C și turnat în bare de 150 g. Fragilitatea (sensibilitatea) lacului poate fi modificată prin alegerea unui alt raport între cei doi componenți, cunoscînd că rășina dammar este mai fragilă. Sensibilitatea la fisurare a acestui lac este foarte mare, *pragul de deformare* ajungînd pînă la alungiri de $1...2 \times 10^{-4}$.

Înainte de aplicarea lacului piesa trebuie încălzită la cca. 140°C după care se întinde lacul prin tușare peste regiunea încălzită. Se continuă încălzirea piesei pînă cînd stratul de lac are o grosime uniformă, evitîndu-se arderea sau vaporizarea lacului datorită încălzirii excesive.

Sensibilitatea maximă se obține imediat după răcire. Avantajul acestui lac constă în mînuirea lui simplă și în rapiditatea cu care se poate aplica. Ca principal dezavantaj se citează imposibilitatea obținerii unui strat de lac de grosime absolut uniformă, fapt pentru care lacul nu fisurează totdeauna, întîi, în regiunea cea mai solicitată a piesei. Pentru acest motiv, acest lac se utilizează numai pentru a stabili direcțiile celor două tensiuni principale și felul solicitării la care este supusă piesa examinată, mărimea tensiunilor urmînd să fie determinată cu ajutorul traductoarelor rezistive. Datorită tratamentului termic ce trebuie aplicat piesei pentru a putea întinde lacul, folosirea lui este limitată numai la piese din oțel, fontă și unele metale neferoase.

b) *Lacul ONERA.* Preparat în mai multe variante, se prezintă sub formă lichidă, pudră sau email [10]. Lacul lichid este o soluție de 30% colofoniu în sulfură de carbon, preparat în trei grupe de sensibilitate. Datorită sensibilității ridicate a colofoniului, în stratul de lac pot apărea fisuri premature în timpul răcirii.

Aplicarea lacului se face cu pensula în trei straturi succesive după ce, în prealabil, suprafața structurii a fost curățată cu sulfură de carbon. Uscarea se face la temperatura ambiantă timp de 12—24 ore.

Pentru reducerea timpului de uscare și mărirea sensibilității, se adaugă 6% rezinat de cobalt.

În cel de-al doilea caz trebuie mai întîi adusă pudra la o granulație foarte fină, după care aceasta este pulverizată în cantitățile necesare peste zonele de studiat. Acest procedeu solicită din partea operatorului o îndemînare deosebită atît pentru aplicarea pudrei în mod uniform cît



și pentru a evita arderea lacului în timpul încălzirii piesei, necesară topirii și întinderii lacului.

Pentru a elimina dificultățile întâmpinate la procedeul precedent, în varianta cu pudră email, pudra este mai întâi dizolvată în acetonă și apoi pulverizată peste suprafața structurii după care se topește stratul de lac cu ajutorul unui arzător cu flacără. Se obține astfel mult mai ușor un strat de lac uniform.

c) *Lacul SNECMA*. Societatea Națională pentru Studiul și Construcția Motoarelor de Aviație (SNECMA) din Franța a pus la punct acest procedeu folosind pentru încercări calitative o rășină sub formă de pulbere, iar pentru încercări cantitative, un lac lichid. Ceea ce caracterizează acest procedeu este că se aplică un singur lac de aceeași compoziție, lac, a cărui prag de deformare (sensibilitate) este variat prin diferite tratamente termice [15].

Se aplică rășina sub formă de pulbere pe proba încălzită cu raze infraroșii. Praful presărat pe piese se topește și curge. Stratul de lac este foarte sensibil și dă o imagine foarte clară a fisurilor. Valorificarea cantitativă a cîmpului de fisuri nu este posibilă, deoarece încălzirea suprafeței piesei nu poate fi făcută uniform, deci grosimea lacului nu este constantă, ca urmare, pragul de deformare a lacului diferă de la un punct la altul.

Cu ajutorul acestui procedeu se poate determina numai cîmpul tensiunilor maxime și direcția tensiunilor principale în această regiune.

Lacul folosit pentru analiza cantitativă a tensiunilor este fabricat din rășini sintetice dizolvate în solvenți organici (benzol, alcool, tricloretilenă) [10].

Rășinile și solvenții se amestecă la rece în cantități egale. Aplicarea lacului se poate face cu pulverizatorul sau cu pensula. Grosimea stratului de lac trebuie să fie de cca. 0,1 mm. Uscarea lacului se face la temperaturi cuprinse între 40 și 100°C, timp de 1—24 ore, în funcție de dimensiunile piesei [10]. Temperatura cuptorului de uscare trebuie menținută constantă iar răcirea să se facă încet. În funcție de temperatura și durata uscării pragul de deformare a lacului poate varia între 3,5 și 13×10^{-4} .

d) *Lacul Brafa*. Preparat de firma Braunschweiger Z. Müller GmbH & CoKG (R.F.G.) în trei grupe de sensibilitate (grupele A, B, și C) în funcție de temperatura la care se face încercarea, lacul Brafa se prezintă sub formă de batoane lungi de 15 cm cu secțiunea de $2,5 \times 2,5$ cm. În vederea aplicării lui pe suprafața piesei de cercetat este indicat, ca batoanele să fie preîncălzite la 30°C, pentru a nu se rupe la aplicare. Piesa ce urmează a fi cercetată se preîncălzește cu ajutorul unei lămpi de lipit sau a unui arzător, la cca. 140°C (temperatura de topire a lacului) [22]. Temperatura adecvată se verifică prin tamponarea batonului de lac de suprafața piesei încălzită în prealabil. Acesta se topește și aderă într-un strat destul de gros (200—300 microni) pe suprafața piesei. Dacă batonul se lipește, temperatura este prea mică. Dacă prin topire devine fluid și se degajă un fum puternic, temperatura este prea mare; în acest caz există pericolul degradării lacului.

Aplicarea lacului se face prin mișcări rotative ale batonului. După aceea se uniformizează stratul de lac cu ajutorul unei flăcări, pînă ce acesta prezintă o suprafață netedă.

Importantă este temperatura de încercare, care trebuie să fie de cca. 30°C pentru lacul Brafa de tip A, cca. 20°C pentru tipul B și de cca. 10°C pentru lacul de tip C [22].

Datorită modului de aplicare a lacului, grosimea acestuia nu este suficient de uniformă, fapt pentru care acest lac se utilizează numai pentru determinări calitative.

Dacă în timpul răcirii lacului se aud ușoare pocnituri, este un semn că au apărut primele fisuri întâmplătoare (datorate contracției lacului). În acest caz trebuie începută imediat experimentarea pentru a se împiedica extinderea acestora. Pentru punerea în evidență a fisurilor se folosește o vopsea albă Brafa. Dacă fotografierea cîmpului de fisuri este stînjinită de aspectul lucios al suprafeței lacului, aceasta se va acoperi cu o dispersie de ceară Brafa pentru evitarea efectului de reflexie a luminii.

e) *Lacul Stresscoat*. Elaborat de către firma Magnaflux, lacul Stresscoat este unul dintre cele mai utilizate lacuri casante. Are compoziția arătată în tabelul 7.1.

Prin combinarea în diferite proporții a elementelor componente se obțin lacuri cu pragul de deformare dorit pentru anumite condiții de încercare. Aceste lacuri sînt furnizate cu echipament complet cuprinzînd : aparat de pulverizat, dispozitiv de etalonare, butelii cu lacuri de fragilitate diferită, solvenți pentru curățirea suprafețelor sau eventuala diluare a lacului, pecum și soluții pentru punerea mai ușoară în evidență a cîmpului de fisuri din stratul de lac.

Alegerea lacului se face, în funcție de temperatura de încercare și pragul de deformare, cu ajutorul unei diagrame de selecție (care însoțește echipamentul) în modul arătat la § 7.2.2 a.

Pragul de deformare al acestor lacuri este de $2..30 \times 10^{-4}$ [14] și corespunde domeniului elastic al celor mai utilizate metale. Aplicarea lacului pe piesă se face prin pulverizare, ceea ce permite obținerea unui strat de grosime uniformă și, deci, posibilitatea valorificării mai bune a cîmpului de fisuri.

În urma încercărilor făcute, în ultimii ani, s-a stabilit că lacurile Stresscoat pot fi folosite și în cazul solicitărilor dinamice deoarece sensibilitatea la fisurare (pragul de deformare) a acestor lacuri nu se schimbă cînd alungirea corespunzătoare a piesei este atinsă în 2×10^{-3} secunde. Folosind o tehnică de sensibilizare, descrisă la § 7.6.4, pragul de deformare al acestui lac poate fi coborît pînă la 50 $\mu\text{cm/cm}$ [14]. Lacurile din familia Stresscoat cu un prag de deformare cuprins între 200—600 $\mu\text{cm/cm}$, pot fi folosite și pentru determinarea tensiunilor remanente [14].

f) *Lacul TENS—LAC*. Fabricat de firma Photolastic (S.U.A.) în unsprezece grupe de sensibilitate corespunzător condițiilor atmosferice de încercare, se prezintă sub formă lichidă [21]. Alegerea lacului potrivit pentru o anumită încercare, se face pe baza diagramei de selecție ce însoțește

Rețete de lacuri casante date în literatura de specialitate

Nr. crt.	Autorul	Compoziția			Pragul de deformare $\times 10^{-3}$	Observații
		Rășină	Solvent	Plastifiant		
0	1	2	3	4	5	6
1	Dietrich [4]	Lac special	—	—	0,2—0,9	—
2	Cymbaliste și Portevin [1]	Copal (Manilla, Zanzibar, Congo, Madagascar, Sandarac) Fenoli (bachelită, colofoniu etc.) tratați.	Alcool (etil, metil, butil, amil). Eter (acetat de amil, acetat de butil, etilglicol) Hidrocarburi (toluen, xilen).	—	—	—
3	Gonciarov [11]	Colofoniu 50 %	alcool metalic 50 %	se adaugă 1—5 % parafină	1,0—2,0	Se aplică cu pensula
4	Salmon [17]	Colofoniu 4 părți Rășină dammar 1 parte. Rășină sintetică	— Benzen, alcool, tricloretilenă	— —	0,01 0,5	Formă solidă pulverizat
5	Guyot [12]	Colofoniu 300 g Colofoniu 300 g	Acetonă 1 l Acetonă 1 l	Tricrezil-fosfat 10 cc. Tricrezil-fosfat 3 cc.	0,05	pulverizat
6	Taira [20]	Rășină fenolică, alb de titan și nitroceluloză	Benzen, toluen, xilen	—	0,27—2,5	Pulverizat
7	Nakahara și Murota [16]	Colofoniu calcinat, alb de titan și rășină fenolică	Benzen, toluen, xilen	Ftalat de dibutil	5,0—30,0	Pulverizat
8	Stresscoat [9]	Colofoniu și 6 % oxid de zinc	Sulfură de carbon	Ftalat de dibutil	0,2—3,0	Pulverizat

trusa de lacuri; temperatura și umiditatea în timpul experimentării sint hotărâtoare.

Înainte de aplicarea lacului pe suprafața piesei sau structurii, se acoperă suprafața acesteia cu un strat de grund de aluminiu reflectorizant, care se usucă în aproximativ 30 minute. Aplicarea lacului se face prin pulverizare în straturi foarte subțiri, la intervale de cel puțin 2 minute între straturi; ultimul strat se aplică la interval de 15 minute de penultimul. Cele mai bune rezultate se obțin când grosimea finală a stratului de lac este cuprinsă între 0,04 și 0,1 mm. Aprecierea grosimii stratului se face după culoare cu ajutorul unor etaloane. Uscarea lacului se face în timp de 24 ore la o temperatură cu cca. 5°C peste temperatura la care se va face încercarea.

Pragul de deformare normal al lacului este de 500 $\mu\text{cm/cm}$ fiind afectat de variațiile de temperatură și umiditate. Pentru fiecare procent de creștere a umidității pragul de deformare crește cu 5 $\mu\text{cm/cm}$, iar pentru fiecare grad de creștere a temperaturii pragul de deformare crește cu cca. 60 $\mu\text{cm/cm}$ [21]. De aici necesitatea de a alege lacul potrivit condițiilor de încercare și păstrarea acestor condiții pe tot timpul încercărilor.

O caracteristică importantă a acestui lac este posibilitatea de a fi reutilizat [21]. Dacă cu o piesă acoperită cu lac trebuie făcute mai multe încercări de același tip, lacul poate fi utilizat cel puțin la două încercări procedându-se astfel: se acoperă piesa cu lac, se usucă și se folosește lacul care are o grosime de cca. 0,05 mm în zona de studiat. Se face încercarea și se obține câmpul de fisuri. Pentru încercarea următoare nu se înlătură lacul ci se aplică unul sau două straturi suplimentare din același lac (care închide fisurile existente), pînă la o grosime totală de 0,07—0,1 mm. După uscarea care durează cca. 24 ore, se poate face a doua încercare. Barele de etalonare trebuie tratate în același mod.

La Institutul de cercetări și proiectări tehnologice în transporturi (I.C.P.T.T.) a fost folosit acest tip de lac pentru încercări a căror rezultate au fost comparate cu cele obținute utilizînd tensometria electrică, la încercările pe stand efectuate la carcasa autoportantă a locomotivei diesel hidraulică de 2400 CP construită de Uzinele „23 August” București pentru R.D.G. Valorile deformațiilor măsurate cu lacul casant, au fost sensibil apropiate de cele obținute cu ajutorul traductoarelor rezistive. Fotografia din fig. 7.1 prezintă un aspect din timpul efectuării măsurărilor amintite mai sus (lac casant + traductoare electrice rezistive). Cu ocazia acestor încercări a fost verificată și proprietatea de reutilizare a lacului, obținîndu-se rezultate bune.

g) *Lacul All-Temp.* Acest lac este elaborat tot de firma Magnaflux și constă din particule de praf ceramic în suspensie într-un solvent. În această formă poate fi pulverizat, cu ajutorul tehnicilor cunoscute, pe piesa sau structura ce face obiectul cercetării. După uscarea la temperatura camerei, lacul are aspectul de cretă și nu poate fi folosit. Pentru a-l face utilizabil trebuie încălzit la temperatura de 550°C pînă cînd particulele ceramice se topesc și fuzionează.

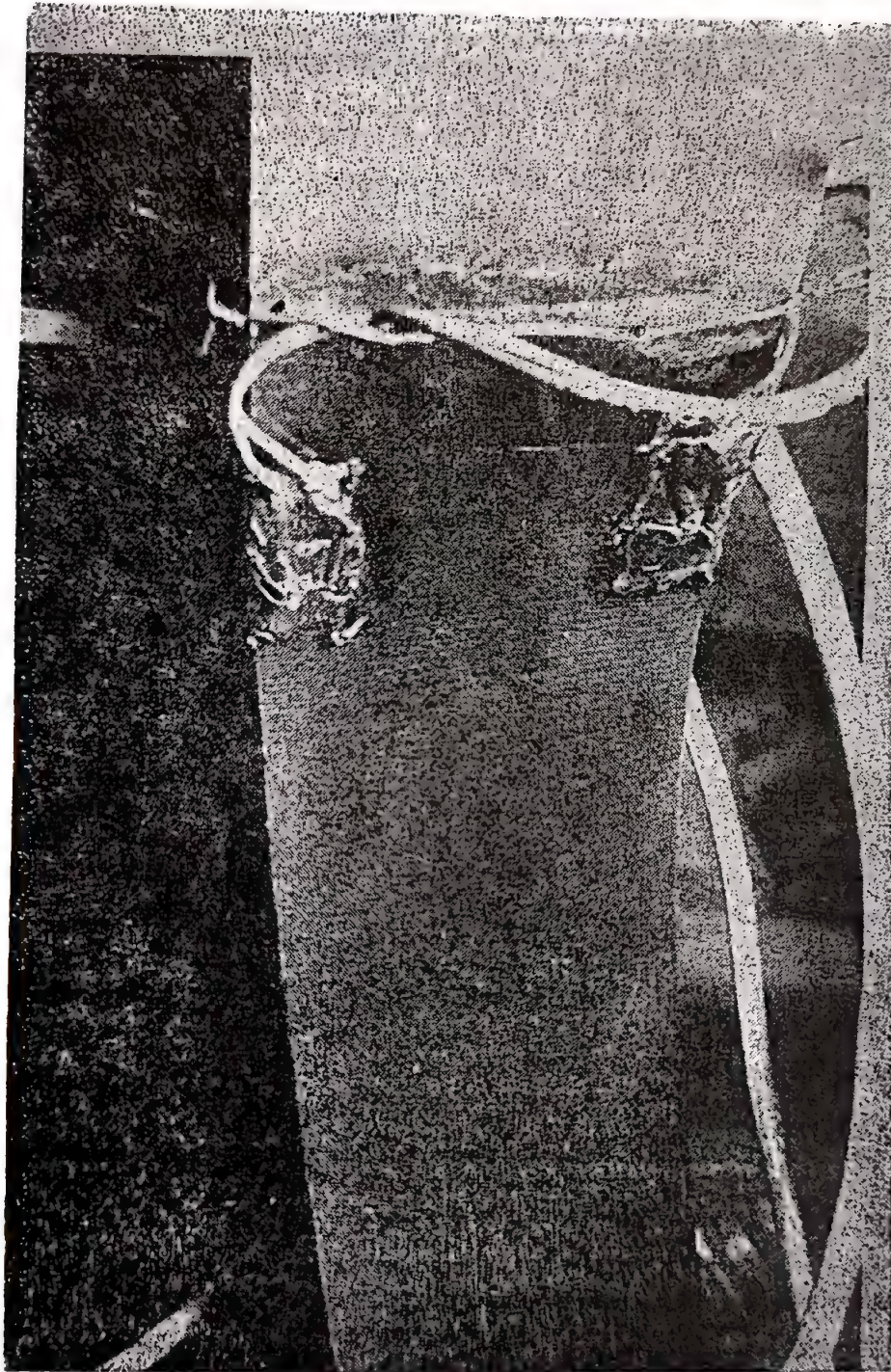


Fig. 7.1.

Lacul poate fi încălzit rapid pentru că topirea și fuziunea se produc aproape instantaneu la temperatura de încălzire; controlul temperaturii de încălzire este însă dificil. Când este astfel încălzit, lacul are un aspect lucios și culoare cafenie. Lacurile sînt furnizate în mai multe sorturi, alegerea unui anumit sort făcîndu-se în funcție de pragul de deformare necesar și de materialul piesei de cercetat cu ajutorul unei diagrame de selecție livrată împreună cu trusa de lacuri [14].

Acest lac ceramic prezintă numeroase avantaje față de lacurile pe bază de rășini. În primul rînd, spre deosebire de lacurile pe bază de rășini, este, practic, insensibil la schimbările mici de temperatură în timp ce lacurile pe bază de rășini sînt foarte sensibile chiar la variații foarte mici de temperatură.

Lacul All-Temp poate fi folosit pînă la temperaturi de 375°C ceea ce depășește cu mult limita de 40°C ce poate fi atinsă la lacurile pe bază de rășini.

În fine, lacurile pe bază de ceramică nu sînt influențate de prezența uleiului sau apei în mediul în care se face încercarea.

Dezavantajele constau în temperatura ridicată (550°) necesară încălzirii lacului, ceea ce este greu de realizat fără producerea unor efecte nedorite asupra piesei de studiat. Piese fabricate din aluminiu, magneziu, materiale plastice și oțeluri tratate termic se degradează prin procesul de încălzire. Dacă piesa este de mari dimensiuni un cuptor capabil să asigure o temperatură constantă de 550°C nu este oricînd la îndemînă. O supraîncălzire de 15°C va produce o fierbere care distruge lacul, în timp ce o subîncălzire de 15°C va produce numai o uscare parțială a lacului. Un alt dezavantaj al lacului All-Temp constă în faptul că observarea vizuală a cimpului de fisuri nu este posibilă; pentru vizualizarea acestuia fiind necesară folosirea metodei Statiflux descrisă la § 7.4.

h) *Rețete de lacuri casante.* Deși este cunoscut că cele mai multe lacuri casante sînt preparate pe bază de rășini naturale sau sintetice, combinate în anumite proporții, cu un solvent și un plastifiant, firmele producătoare mențin o discreție totală în privința compoziției exacte a lacurilor prezentîndu-le sub diferite denumiri comerciale. În tabelul 7.1 sînt extrase din literatura de specialitate rețetele pentru cele mai utilizate lacuri casante.

7.2.2. TEHNOLOGIA APLICĂRII LACURILOR CASANTE

Utilizarea cu succes a lacurilor casante la analiza experimentală a tensiunilor depinde, în mare măsură, de folosirea unei tehnologii corecte atît la efectuarea lucrărilor pregătitoare cît și la efectuarea încercărilor propriu zise.

Măsurile pregătitoare. a) *Pregătirea suprafeței.*

În general lacurile casante sînt folosite cu succes pe toate tipurile de suprafețe de metal, sticlă, lemn și materiale plastice.

Țunderul și grăsimile existente pe aceste suprafețe trebuie curățate. De asemenea, orice vopsea care este afectată de diferiți solvenți, folosiți în lacurile casante, trebuie înlăturată. Curățirea suprafeței poate fi reali-

zată folosind o perie rotativă din sîrmă, un polizor sau prin sablare cu nisip. Înlăturarea grăsimilor se face, de regulă, cu un solvent. După efectuarea tuturor operațiilor de curățire se va șterge din nou suprafața cu o cârpă curată, fără scame, înmuiată într-un solvent. Lacul aplicat anterior poate fi curățat mecanic prin răzuire, cu peria rotativă din sîrmă sau prin sablare cu nisip.

b) *Aplicarea grundului de aluminiu.* Aplicarea pe suprafața curățată a unui strat de grund de aluminiu pigmentat asigură un fond uniform al tuturor zonelor piesei, indiferent dacă suprafața este mată sau lucioasă.

Această uniformitate ajută la aprecierea mai corectă a grosimii stratului de lac în timpul aplicării acestuia. În același timp, sînt reduse zgîrrierile și neregularitățile, care ar putea semăna cu cîmpul de fisuri.

Stratul de aluminiu se aplică cu ajutorul unui pistol de pulverizare, de cele mai multe ori, livrat împreună cu trusa de lacuri. După aplicarea stratului de grund care trebuie să fie foarte subțire, asigurînd un film uniform și neted, se va aștepta aproximativ 30 de minute pentru uscare.

O atenție deosebită se va acorda filetelor și altor zone dificile unde pot rezulta straturi mai groase ce se usucă mai lent. Dacă se consideră necesar, se poate prelungi timpul de uscare cu încă 15 minute.

Alegerea și aplicarea lacurilor. Modul de aplicare al lacurilor casante pe suprafața pieselor ce urmează a fi cercetate depinde de starea fizică a lacului.

În § 7.2.1. au fost menționate cîteva procedee. În cele ce urmează va fi expusă tehnologia de aplicare a unui lac lichid, care de regulă este livrat în recipiente sau în butelii de tip „Spray”; aplicarea pe suprafața piesei de încercat făcîndu-se în ambele cazuri pe principiul pulverizatorului cu aer comprimat.

a) *Alegerea lacului.* Alegerea lacului casant depinde de temperatura la care se face încercarea și de pragul de deformare necesar. În cazul lacului Stresscoat, cînd stratul de lac este uscat la temperatura de încercare, pragul de deformare este de aproximativ $500 \mu\text{cm/cm}$ [14]. Prin creșterea, de exemplu, cu 24 ore a timpului de uscare peste timpul normal de 18 ore, acest prag poate fi coborît pînă la $150 \mu\text{cm/cm}$.

Firma Magnaflux, pentru lacurile ce le produce, prezintă o diagramă cu ajutorul căreia se pot selecta lacurile în funcție de temperatura de încercare și de sensibilitatea dorită (fig. 7.2.). Această diagramă arată că pentru valori mai scăzute ale pragului de deformare se va folosi un lac cu un număr mai ridicat. Lacurile cu număr mai scăzut pot fi utilizate pentru valori mai ridicate ale pragului de deformare.

Variația sensibilității la deformare este de aproximativ $175 \mu\text{cm/cm}$ pentru fiecare 5 unități din numărul lacului, la o valoare a pragului de deformare de $500 \mu\text{cm/cm}$. La valori mai mici ale pragului de deformare variația sensibilității este mai mare, în timp ce la valori mai mari ale pragului de deformare această variație este mai mică pe număr de lac.

Pentru lacurile din familia Stresscoat, la o temperatură a mediului ambiant de 21°C , lacul ST—50 începe să formeze cîmpuri de fisuri la aproximativ $1100 \mu\text{cm/cm}$. În aceleași condiții de temperatură lacul ST—75

va începe formarea cîmpului de fisuri la 350 $\mu\text{cm/cm}$. Totuși, sensibilitatea de 500 $\mu\text{cm/cm}$ este considerată o sensibilitate optimă; lacurile cu număr mai mare decît numărul optim pentru o anumită temperatură pot forma cîmpuri de fisuri întîmplătoare, în timp ce lacurile cu număr mai

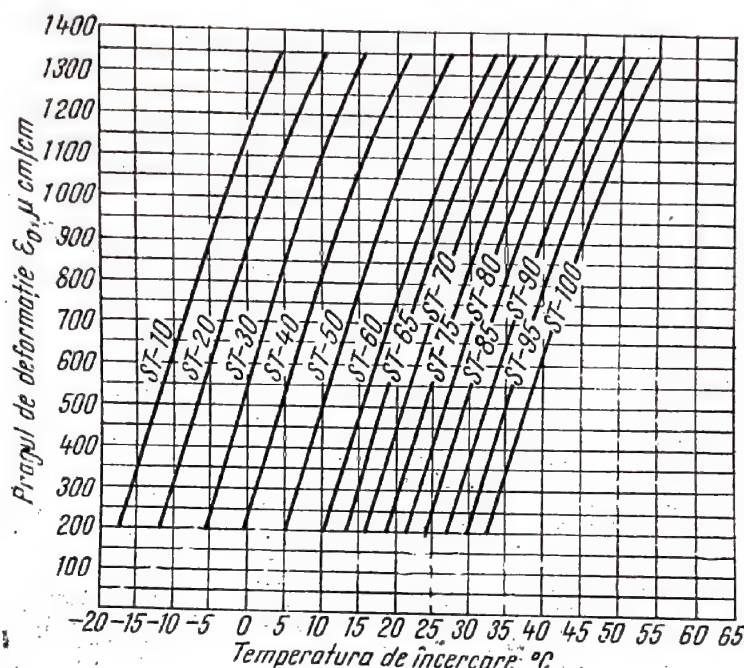


Fig. 7.2.

scăzut vor forma cîmpuri de fisuri care se vor închide după înlăturarea sarcinii.

Schimbarea temperaturii lacului afectează sensibilitatea acestuia; o creștere a temperaturii va înmuia lacul făcîndu-l mai puțin sensibil, descreșterea temperaturii face lacul mai casant deci mai sensibil. Variația sensibilității lacului cu schimbarea temperaturii în cazul lacurilor Stresscoat este de aproximativ 55 $\mu\text{cm/cm}$ pentru 1°C.

Prin amestecarea a două lacuri cu numere diferite, în funcție de proporții, se pot obține lacuri intermediare.

Toate numerele consecutive de lacuri diferă printr-o creștere egală a fragilității. De exemplu, amestecînd părți egale din lacurile ST-50 și ST-60 se obține lacul echivalent ST-55. Două părți din lacul ST-70 plus trei părți din lacul ST-75 va produce un lac echivalent cu numărul ST-73.

b) *Aplicarea lacului.* Aplicarea pe suprafața piesei a lacului casant lichid, prin pulverizare (fig. 7.3.), este cea mai larg răspîdită avînd avantajul că se realizează o grosime uniformă a stratului de lac. În același timp o mulțime de bule mici de aer sînt introduse în stratul de lac, bule ce ajută la formarea unor cîmpuri de fisuri mai regulate [14].

Aerul de alimentare a pulverizatorului nu trebuie să conțină ulei sau apă. Vaporii de ulei și picăturile de apă reduc fragilitatea lacurilor. Dacă

se utilizează o sursă normală de aer, înainte de pulverizare, se va face o purjare. Pentru înlăturarea vaporilor de ulei și a picăturilor de apă, unele firme, producătoare de lacuri casante, livrează și compresoare de aer de tip diafragmă.

Presiunea aerului trebuie să fie aproximativ $2,5 \text{ daN/cm}^2$. Duza se ține cam la 10 cm de piesă în timp ce pulverizatorul este deplasat paralel



Fig. 7.3.

cu piesa. Se începe pulverizarea puțin înainte de capătul piesei și se continuă puțin dincolo de celălalt capăt. Pulverizatorul este totdeauna în mișcare cît timp duza este deschisă.

Pentru obținerea grosimii corecte a stratului de lac sînt necesare între 10 și 20 de treceri ale pulverizatorului peste zona ce se studiază [5], [14].

Primele treceri se caracterizează prin formarea unor pete punctiforme care devin tot mai numeroase după fiecare trecere. În trecerile următoare punctele fuzionează formînd o suprafață la început aspră iar în final netedă.

În același timp culoarea lacului se schimbă căpătînd o tentă gălbuie care arată că grosimea stratului este suficientă. Grosimea stratului uscat trebuie să fie între 0,10 și 0,15 mm [14]. Se recomandă ca primele treceri să se facă peste suprafața întregii piese, după care se va continua cu zonele ce urmează a fi cercetate.

În cele din urmă se vor acoperi părțile filetate și alte zone cu neregularități. La acoperirea suprafețelor mai complicate se va evita excesul de material pulverizat, care se manifestă prin formarea unui praf deasupra acestor zone. Dacă nu este abundent, acest praf poate fi lăsat pînă după uscarea lacului și va fi înlăturat prin ștergerea cu o cîrpă moale înainte de începerea încercării. În zonele de o formă complexă formarea prafului mai poate fi evitată prin adăugarea la lacul obișnuit a unei cantități de

10—25% diluant înainte de pulverizare. Adăugarea diluantului nu afectează în mod simțitor valoarea pragului de deformare al lacului uscat. Bara de etalonare (v. § 7.3.1.) trebuie tratată în mod similar cu piesa.

Cavitățile mici ori adânci, pot fi acoperite prin reducerea presiunii aerului de alimentare, până la 1—1,75 daN/cm², la care lacul iese cu o forță foarte mică așezându-se ușor în cavitățile adânci.

Este de dorit ca pulverizarea să se facă la o temperatură egală sau superioară celei la care se va face încercarea. Dacă se lucrează în atmosferă umedă, vaporii de apă se pot uneori, condensa în lacul pulverizat, producând o decolorare ce crează dificultăți în detectarea cîmpului de fisuri. Încălzirea piesei la aproximativ 50°C înainte de acoperire elimină acest inconvenient. Dacă aplicarea lacului se face la o temperatură inferioară celei de încercare piesa va fi încălzită, la temperatura de încercare, înainte de pulverizarea lacului și se va reîncălzi, dacă este cazul, pentru menținerea acestei temperaturi.

c) *Uscarea lacului.* Lacul casant trebuie uscat la o temperatură mai ridicată decît cea de încercare, în funcție de care a fost ales. În cazul lacului Stresscoat, cînd încercarea se face în interior, la o temperatură de 22—24°C, se recomandă uscarea lacului la temperaturi între 30—40°C, timpul de uscare fiind de aproximativ 18—20 ore.

Acoperirea cu lac în cursul după-amiezii și încercarea piesei în dimineața următoare este o practică obișnuită. Acest ciclu de uscare reduce la minimum variația sensibilității lacului în funcție de grosimea stratului depus. În cazuri excepționale uscarea se poate face și în 6—8 ore, cu condiția ca grosimea stratului de lac să fie de 0,075—0,125 mm. Straturile mai groase nu se pot usca suficient dacă temperatura de uscare este sub 40°C. Temperatura maximă de uscare a lacului nu trebuie să depășească 60°C. Peste această temperatură suprafața lacului devine prea uscată ceea ce produce o modificare a pragului de deformare.

Cînd se impune o accelerare a procesului de uscare se recomandă următoarele etape de uscare [14]: 4 ore la 40°C, 2 ore la 50°C și 1 oră la 60°C. Înainte de fiecare treaptă de încălzire se va menține piesa la temperatura camerei timp de 30 minute. După uscare sînt necesare 1—3 ore pentru a aduce piesa la temperatura de echilibru cu atmosfera de încercare. Piese mai grele necesită un timp de uscare mai lung decît cele ușoare.

7.2.3. UTILIZAREA LACURILOR CASANTE ÎN CAZUL PIESELOR DE GROSIME MICĂ (MICROTEHNICA)

Tehnicile de utilizare a lacurilor casante aplicate în cazul pieselor (structurilor) de dimensiuni obișnuite denumite și macrotehnici, nu sînt recomandate în cazul pieselor foarte subțiri sau miniaturale pentru că în aceste cazuri grosimea uzuală de 0,1—0,125 mm a stratului de lac, poate uneori să fie mai mare decît grosimea elementului de cercetat. Traductoarele rezistive deși astăzi au ajuns la dimensiuni foarte reduse, nu sînt încă suficient de mici pentru o serie de elemente ca: membrane, elemente de mecanică fină etc. În ceea ce privește acoperirile fotoelastice, acestea își pierd din sensibilitate cînd sînt foarte subțiri.

La Battelle Memorial Institute (S.U.A.) a fost pus la punct o așa zisă *microtehnică* [23] de folosire a lacului casant de tip Stresscoat obișnuit, la piese minuscule, prin realizarea unui strat de lac foarte subțire și miniaturizarea întregului echipament auxiliar.

Miniaturizarea constă în reducerea la o anumită scară a întregului echipament folosit atât pentru aplicarea lacului cât și pentru etalonarea acestuia. Dispozitivul de etalonare este astfel construit încât poate fi plasat în câmpul vizual al unui microscop. Bara de etalonare este încorporată în dispozitivul de încărcare astfel că bara nu trebuie scoasă pentru a verifica sensibilitatea la deformare a lacului. Pentru obținerea unui strat de lac cu grosimea finală cuprinsă între 0,0125 și 0,0250 mm, se folosește un pulverizator mic cu posibilitate de reglare fină atât a debitului de aer cât și a debitului de lac.

Alegerea lacului. La alegerea lacului ce urmează să fie folosit cu această tehnică, se are în vedere faptul că lacurile în straturi foarte subțiri sînt mai puțin sensibile decît cele cu o grosime recomandată în mod uzual. De aceea se alege un lac mai sensibil decît cel utilizat pentru încercări obișnuite.

Operațiile cele mai critice sînt aplicarea lacului (prin pulverizare) și obținerea grosimii corespunzătoare a stratului de lac.

Lacurile aplicate prin această tehnică nu formează bule de aer, și sînt complet transparente, fapt pentru care regularizarea grosimii stratului devine destul de dificilă.

Uscarea lacului se face la temperaturi cu 5—8°C peste temperatura camerei, ceea ce reduce sau elimină complet apariția fisurilor întîmplătoare. Barele de etalonare trebuie tratate în același mod cu proba ce face obiectul cercetării.

Pentru creșterea sensibilității lacurilor utilizate în *microtehnică* se folosește metoda de sensibilizare prin răcire descrisă la § 7.6.4.

7.2.4. COMPORTAREA LACURILOR CASANTE

Valoarea tensiunilor din materialul de bază, în zona unde s-a aplicat stratul de lac, poate fi aproximată prin observarea fisurilor ce se formează în lac. Există două căi ce pot fi urmate în interpretarea câmpului de fisuri. Prima constă în determinarea deformăției minime necesară fisurării lacului într-o stare de tensiune monoaxială și folosirea acestei valori pentru calcularea tensiunilor în piesă. A doua metodă constă în stabilirea unei relații între densitatea fisurilor (numărul de fisuri pe unitatea de lungime) în stratul de lac, și mărimea tensiunii în piesă [5]. Știind că densitatea fisurilor este proporțională cu mărimea tensiunii [15], regiunile mai puternic solicitate au o densitate mai mare a câmpului de fisuri. Prima metodă este cea mai frecvent utilizată.

Există mulți factori care influențează comportarea lacului casant. Durelli, Phillips și Tsao enumeră 40 de asemenea factori [5] dintre care următorii 6 sînt considerați a fi cei mai importanți.

- compoziția lacului, dată de către fabricant prin numărul de lac (ex. Stresscoat 1207);
- temperatura de uscare;
- grosimea stratului de lac;
- condițiile atmosferice în timpul încercării;
- relația sarcină — timp și
- câmpul de tensiune.

În continuare se va arăta în ce fel factorii de mai sus influențează comportarea lacului și ce căi trebuie urmate în programul de încercări pentru a ține seamă de influența acestora.

a) *Influența compoziției lacului.* După cum s-a mai arătat majoritatea lacurilor casante au ca principale elemente componente rășini, solvenți și un plastifiant.

Creșterea cantității de plastifiant în compoziția lacului mărește deformarea necesară fisurării stratului de lac (deci pragul de deformare crește, iar sensibilitatea lacului scade).

În cazul lacului Stresscoat, așa cum s-a menționat la § 7.2.2, fabricantul evidențiază cantitatea de plastifiant din lac prin numerele de lac, care încep de la lacul cel mai puțin sensibil ST—1160 până la lacul cel mai sensibil ST—1215. Pentru cercetările cu ajutorul lacurilor casante efectuate în laborator la temperaturi variind de la 15°C la 30°C sînt recomandate lacurile de la 1202 la 1210. Pentru încercări în aer liber în perioada lunilor de iarnă, lacurile din seria 1100 sînt cele mai indicate. Influența compoziției lacului, potrivit numărului de lac, asupra pragului de deformare ε_0 este arătat în fig. 7.4., pentru un lac Stresscoat cu următoarele caracteristici [2]: grosimea stratului de lac 0,15 mm, temperatura de uscare 24°C, timpul de uscare 18 h, umiditatea la uscare 40%, temperatura de încercare 24°C și umiditatea la încercare 40%.

Diagrama prezentată în fig. 7.4 poate fi utilizată pentru alegerea numărului corect al lacului pentru un prag de deformare dat. Cele două

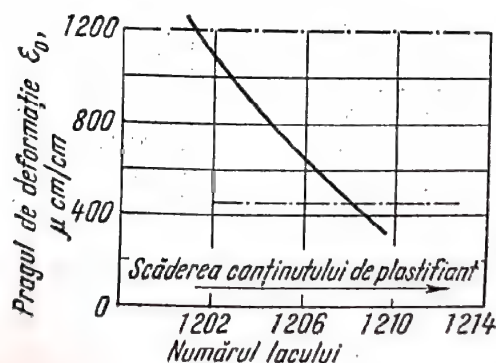


Fig. 7.4.

linii orizontale corespunzătoare lui ε_0 egal cu 450, respectiv 1200 $\mu\text{cm/cm}$, arată limitele inferioară și superioară ale pragului de deformare. La praguri de deformare peste 1200 $\mu\text{cm/cm}$ tensiunile remanente în lac sînt atât de scăzute încît fisurile nu vor rămîne deschise după înlăturarea

sarcinii. Pentru pragurile de deformare mai jos de 400 sau 450 $\mu\text{cm/cm}$, lacul, adesea, formează microfisuri în etapele finale de uscare. Aceste microfisuri sau fisuri întâmplătoare ale lacului casant se datoresc tensiunilor remanente din stratul de lac, tensiuni ce depășesc limita de rezistență a lacului (pragul de deformare).

Modificarea conținutului de plastifiant poate afecta valoarea pragului de deformare [9], modificând mărimea tensiunilor remanente, produse în lacul casant, când acesta se contractă în timpul procesului de uscare, precum și modulul de elasticitate al lacului, influențând în felul acesta valoarea tensiunilor în stratul de lac.

b) *Influența uscării și grosimii stratului de lac.* Nu se poate vorbi de uscarea lacului și de grosimea stratului de lac în mod separat, ambele fiind corelate în influența pe care o au asupra comportării lacului. Timpul necesar uscării lacului depinde de temperatura și umiditatea în camera de uscare și de grosimea stratului de lac [3].

În curba din fig. 7.5. este arătată pierderea în greutate a solven-ului CS_2 în funcție de timpul după pulverizare pentru un lac Stresscoat 1206, cu grosimea stratului de 0,23 mm, uscat la temperatura de 24°C , cu umiditatea atmosferei de 40% [2].

După aproximativ 20 ore, cea mai mare parte din CS_2 s-a evaporat și lacul este suficient de sensibil pentru a reacționa la deformare; totuși lacul mai reține încă ceva din solvent, chiar după patru zile de uscare.

Micile cantități de CS_2 rămase în lac după timpul normal de uscare de 20 ore înmoaie lacul și tinde să-i reducă sensibilitatea. Dacă grosimea stratului de lac variază, cantitatea de CS_2 ce rămâne în lac variază proporțional cu grosimea; prin urmare, cu creșterea grosimii și creșterea cantității de CS_2 rămasă în stratul de lac, pragul de deformare crește, cum este arătat de curba din fig. 7.6, curbă trasată pentru un lac Stresscoat 1205,

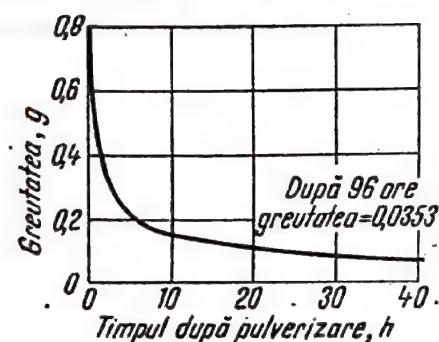


Fig. 7.5.

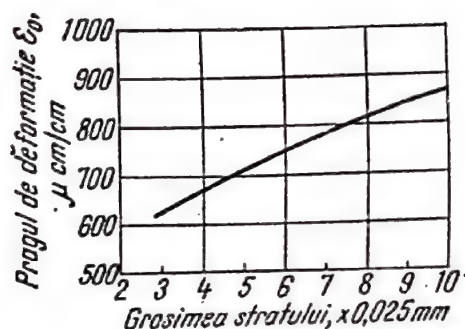


Fig. 7.6.

uscat timp de 22 ore la temperatura de 24°C și umiditate de 40% și încercat în aceleași condiții de temperatură și umiditate [2].

Influența grosimii stratului de lac asupra pragului de deformare este destul de importantă dacă ținem seama că în aplicațiile practice variații de $\pm 0,025$ până la $\pm 0,05$ mm a grosimii lacului sînt obișnuite. Variațiile de $\pm 0,025$ mm pentru un lac cu o grosime medie de 0,15 mm ar da o

variație a pragului de deformare cuprinsă între 725 și 775 $\mu\text{cm/cm}$ în comparație cu valoarea medie de 750 $\mu\text{cm/cm}$.

În scopul de a reduce perioadele lungi de uscare, lacurile casante sînt adesea uscate în cuptoare la temperaturi mai ridicate, în jur de 50°C , cu umiditate de aproximativ 5%. Prin acest mod de uscare, conținutul de CS_2 este eliminat în cca. 2 ore. Cînd piesa acoperită este scoasă din cuptor, lacul absoarbe umezeala din aer. Curba din fig. 7.7 reprezintă umezeala absorbită în funcție de timp pentru un lac Stresscoat 1204, cu grosimea stratului de 0,23 mm, uscat timp de 15 ore, la temperatura de 52°C , umiditate de 5% și încercat la temperatura de 24°C și umiditatea de 40% [2].

Pragul de deformare ϵ_0 a lacului tratat termic este influențat de umezeala absorbită din aer. Straturile mai subțiri se înmoaie, datorită umezelii, înaintea straturilor mai groase; de aceea ele sînt mai puțin sensibile.

Influența grosimii stratului asupra pragului de deformare la un lac uscat la temperatură ridicată este arătată de curba din fig. 7.8, a, curbă trasată pentru un lac Stresscoat 1205 uscat timp de 17 ore la temperatura de 46°C și răcit timp de 5 ore pînă la temperatura de încercare de 24°C și umiditate de 40% [2].

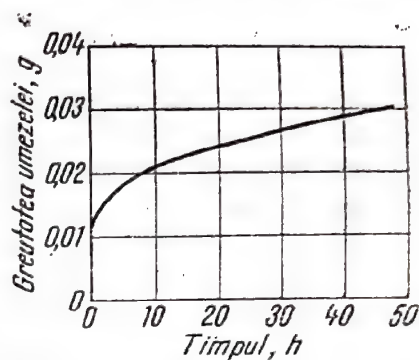


Fig. 7.7.

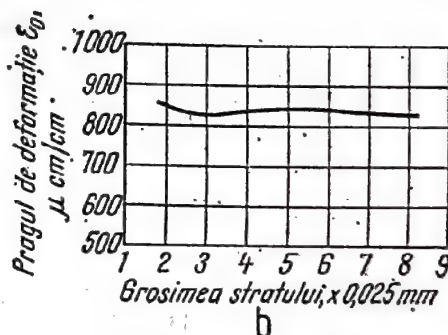
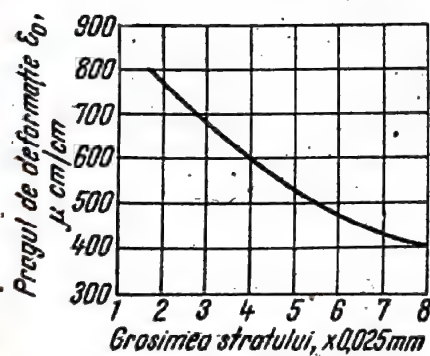


Fig. 7.8.

Avînd în vedere dificultățile întîmpinate în menținerea unei grosimi uniforme a stratului de lac, din motivele arătate mai sus, uscarea lacurilor casante la temperaturi ridicate nu este recomandată.

S-a arătat că uscarea la temperatura camerei produce un lac a cărui sensibilitate descrește cu creșterea grosimii (v. fig. 7.6), în timp ce uscarea la temperaturi ridicate produce un lac a cărui sensibilitate crește cu creșterea grosimii (v. fig. 7.8, a). Uscînd lacul la o temperatură moderată de 25°C pînă la 30°C timp de cca. 20 ore, se poate găsi o soluție intermediară celor precedente pentru obținerea unui lac care să fie relativ insensibil la variațiile grosimii stratului.

Rezultatele procesului de uscare moderată sînt arătate în fig. 7.8, b, unde pragul de deformare este trasat ca o funcție de grosimea lacului Stresscoat 1205 [2], uscat timp de 17 ore la o temperatură de 28°C apoi răcit timp de 5 ore pînă la temperatura de încercare de cca. 24°C și umiditate de 40%.

Ori de cîte ori este posibil, se recomandă ca operatorul să usuce lacul între 25 și 30°C pentru a elimina erorile introduse de inevitabilele variații ale grosimii lacului. La uscarea moderată este necesară luarea de măsuri pentru menținerea piesei la o temperatură uniformă pe timpul uscării. Se va evita uscarea lacurilor cu lămpi de încălzire care produc temperaturi neuniforme. Dacă temperatura de uscare a lacului variază de la un punct la altul al piesei, atunci și proprietățile lacului vor varia în mod corespunzător de la un punct la altul.

Uscarea trebuie să fie realizată într-un cuptor sau o cameră care are o distribuție uniformă a temperaturii. Influența temperaturii de uscare asupra pragului de deformare este arătată în fig. 7.9. Curba este trasată pentru un lac Stresscoat 1205 cu grosimea stratului de 0,127 mm, încercat la temperatura de 24°C și umiditate de 40% [2].

În anumite cazuri lacul trebuie tratat termic pentru a-l face foarte sensibil, necesar încercării materialelor cu limită de elasticitate scăzută.

Cînd conținutul de plastifiant este redus excesiv, lacul fisurează în timpul uscării cînd ε_0 este aproximativ 400 $\mu\text{cm/cm}$. Prin tratarea termică a lacurilor la temperaturi ridicate (55–60°C) și răcire foarte lentă la temperatura de încercare, în jur de 24°C, se pot obține praguri de deformare de 200 $\mu\text{cm/cm}$. Cînd este absolut necesar ca lacul să fie uscat la temperatură ridicată, se vor lua toate măsurile posibile pentru obținerea unei grosimi cît mai uniforme a stratului de lac.

c) *Influența condițiilor atmosferice.* Întrucît coeficientul de dilatare termică al lacului casant, este, în majoritatea cazurilor, mai mare decît

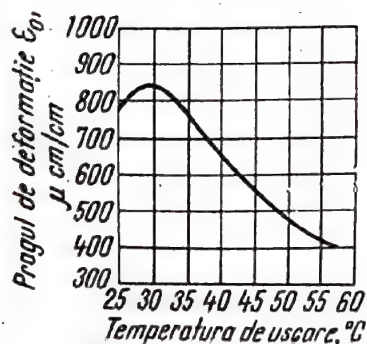


Fig. 7.9.

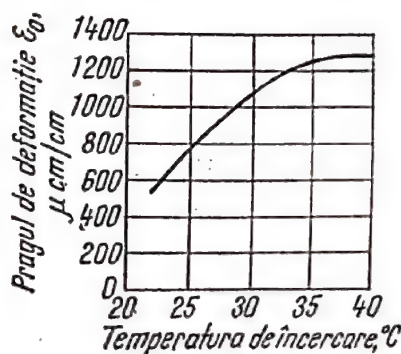


Fig. 7.10.

coeficientul de dilatare al pieselor pe care se aplică, lacul este foarte sensibil la schimbări de temperatură.

Curba din fig. 7.10 ilustrează influența temperaturii de încercare asupra pragului de deformare la un lac Stresscoat 1205, cu grosimea stratului de 0,15 mm, uscat la temperatura de 28°C [2].

La o schimbare de 1°C , a temperaturii de încercare, se produce o modificare de aproximativ $60 \mu\text{cm/cm}$ a pragului de deformare.

Ca urmare, pentru a obține rezultate concludente laboratorul în care se fac încercările trebuie să aibă posibilitatea de reglare a temperaturii. Dacă, din anumite motive, piesa trebuie încercată în aer liber sau în hale unde temperatura nu poate fi menținută constantă se iau măsuri pentru a diminua erorile cauzate de schimbările temperaturii și anume : 1). Dacă încercările se fac în aer liber schimbările de temperatură pot fi reduse prin efectuarea încercărilor în perioada zilei cu maxim de temperatură (după-amiază). 2) Încercările se vor efectua cât mai rapid posibil pentru a scurta intervalul de timp în care temperatura s-ar putea schimba. 3) Efectuarea de etalonări continue ale lacului cu scopul ca pragul de deformare să poată fi stabilit ca o funcție de timpul și temperatura din perioada încercării.

În afară de temperatură, modificările de umiditate din atmosferă influențează calitățile lacului deși condițiile de umiditate din timpul uscării par a fi mai importante decât condițiile de umiditate din timpul încercărilor. Aceasta se datorează elementului timp implicat în efectele modificărilor de umiditate. Absorbția sau pierderea apei este un proces de difuzie relativ lent [2]; dacă încercările cu lac casant pot fi realizate rapid, influența modificărilor de umiditate poate fi redusă.

d) *Relația sarcină-timp și influența sa asupra pragului de deformare.* Pragul de deformare ϵ_0 al lacurilor casante, stabilit după metoda descrisă la § 7.3., depinde de relația sarcină-timp. Această relație este ilustrată de curba din fig. 7.11, care arată că, la etalonare, deformarea barei incastate se face în mai puțin de o secundă [2]. Această bară este apoi menținută în poziție deformată timp de cca. 15 s înainte de a fi relaxată. Dacă încărcarea piesei de încercat nu poate fi realizată în același mod, etalonarea trebuie corectată.

Cînd sarcina este aplicată lent asupra piesei, lacul manifestă efecte viscoelastice [2] și tensiunile dezvoltate în stratul de lac se relaxează într-o anumită măsură, datorită aplicării lor lente. Efectul general al acestei relaxări în stratul de lac este creșterea

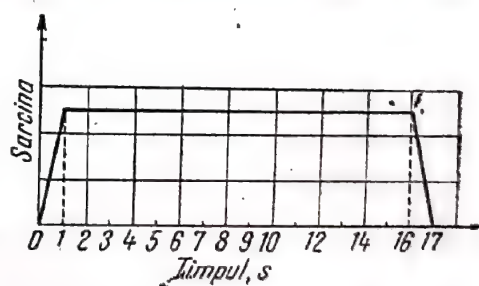


Fig. 7.11.

valorii deformăției piesei necesară fisurării lacului. Acest efect poate fi luat în considerație după recomandările făcute de firma Magnaflux [14] prin corectarea corespunzătoare a valorii lui ϵ_0 folosind datele din curbele prezentate în fig. 7.12, pentru corectarea pragului de deformare, sau folosind relația [2]

$$\epsilon'_0 = [1 + 0,05 (\log \cdot t)^2] \epsilon_0 \quad (7.1)$$

pentru t cuprins între 1 și 1000 s, în care :

- ε'_0 este valoarea corectată a pragului de deformare;
- ε_0 — valoarea pragului de deformare determinată prin etalonare urmînd relația sarcină-timp prezentată în fig. 7.11;
- t — timpul necesar aplicării sarcinii.

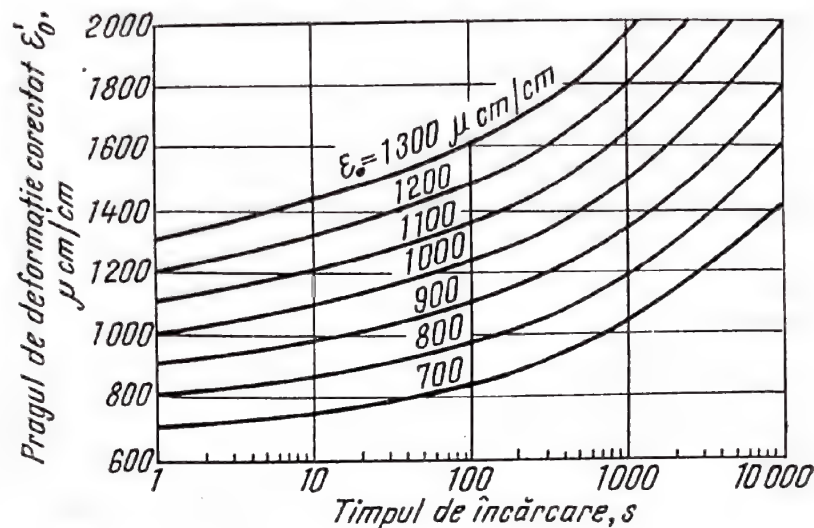


Fig. 7.12.

Dat fiind că aceste corecții sînt relativ mari după o perioadă de 100 s (v. fig. 7.12), trebuie luate măsuri de aplicare a sarcinii în mai puțin de 2 minute.

Lacurile casante pot fi utilizate și pentru analiza tensiunilor în cazul solicitărilor dinamice. În acest caz trebuie luate următoarele măsuri :

- lacul trebuie să fie mai sensibil decît cel folosit în mod normal la solicitări statice, pentru a fi siguri că fisurile rămîn deschise după încărcare (ε_0 trebuie să fie mai mic de 700 $\mu\text{cm/cm}$). Cîmpurile de fisuri se vor forma și vor rămîne vizibile chiar dacă durata de menținere a sarcinii este numai de 4 sau 5 milisecunde;
- trebuie făcută corecția etalonării statice a lacului pentru a ține seama de durata de încărcare.

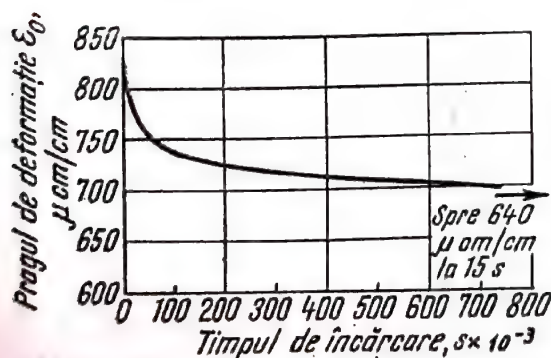


Fig. 7.13.

Influența duratei de încărcare asupra pragului de deformare este arătată de curba din fig. 7.13.

Folosind datele din diagrama prezentată în fig. 7.13 se pot face corecțiile corespunzătoare ale pragului de deformare.

e) *Efectele cîmpului de tensiune.* Relația cea mai frecvent folosită pentru interpretarea datelor obținute la încercările cu lac casant este

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_0 \quad (7.2)$$

în care :

σ_1 este tensiunea principală maximă în piesă;

E — modulul de elasticitate al materialului piesei.

Această relație neglijează efectele biaxiale datorate lui σ_2 .

La etalonare se consideră $\sigma_2 \approx 0$ și $\varepsilon_2 \approx -\mu\varepsilon_1$; în practică, în majoritatea cazurilor σ_2 este diferit de 0.

Rezultatele unor serii de încercări la care cîmpul biaxial de tensiuni din piesă a variat într-un domeniu larg a arătat că σ_2^2 reduce valoarea lui σ_1^p , necesară fisurării lacului; de aici rezultă că datele obținute utilizînd formula (7.2) sînt numai informative.

7.3. ETALONAREA LACURILOR

7.3.1. TEHNICA DE ETALONARE

Curbele *izoentatice**) trasate pe conturul închis al cîmpului de fisuri la o anumită sarcină de încărcare, reprezintă linii de tensiune constantă separînd zonele fisurate de cele nefisurate ale lacului. Pentru stabilirea tensiunii corespunzătoare fiecărei curbe izoentatice este necesară etalonarea lacului pentru a determina pragul de deformare ε_0 . Această etalonare se face prin deformarea unor bare — special pregătite — cu ajutorul

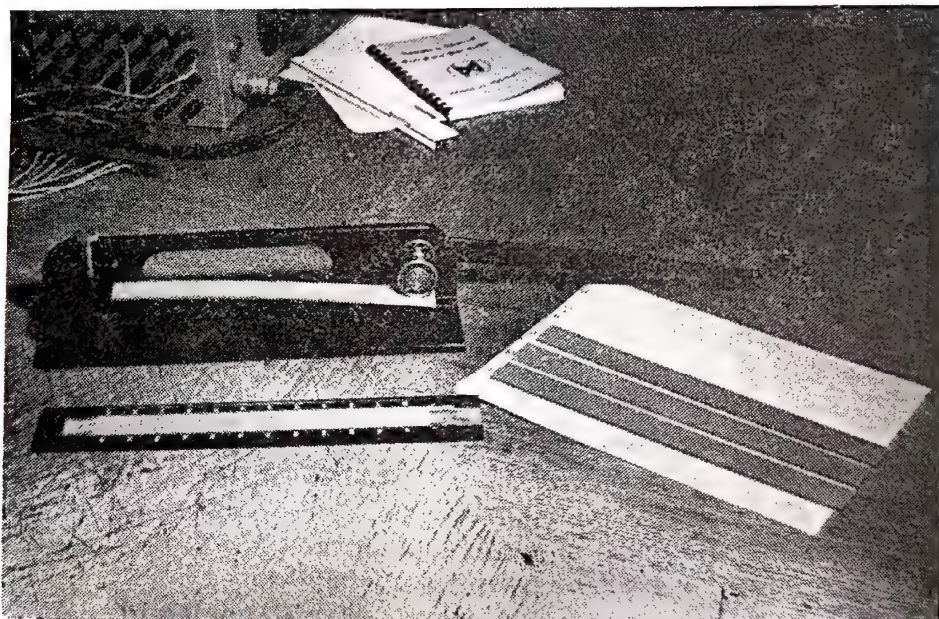


Fig. 7.14.

unui dispozitiv de etalonare. În fig. 7.14 se prezintă fotografia dispozitivului realizat în acest scop la I.C.P.T.T. București.

* Linile izoentatice trasate pentru o sarcină dată reprezintă locul geometric al punctelor avînd aceeași tensiune principală σ_1 . Ele se obțin prin unirea punctelor de vîrf a curbelor izoentatice ce formează cîmpul de fisuri pentru o anumită sarcină.

Pentru obținerea unei valori concludente a pragului de deformare etalonarea trebuie repetată de 5—10 ori pe perioada încercărilor, după care se face o evaluare statistică.

Firmele furnizoare de lacuri casante livrează și barele de etalonare necesare. Dat fiind că ceea ce se măsoară sînt deformările și nu tensiunile, barele de etalonare nu țin seamă de materialul piesei de încercat. Se acoperă, se usucă și se încearcă barele o dată cu piesa sau structura ce face obiectul cercetării. Precizia etalonării depinde, în primul rînd, de menținerea barelor de etalonare în aceleași condiții de temperatură și umiditate ca și piesa sau structura. Barele de etalonare se vor manipula ținîndu-le de capete, fără a atinge lacul care poate fi afectat de grăsimi și de variația de temperatură.

a) *Tehnica de etalonare pentru măsurarea deformațiilor de întindere.* Aceasta cuprinde următoarele operații :

- se acoperă cu lac bara de etalonare și se usucă lacul în mod corespunzător ;

- se înlătură lacul pe o porțiune de 25 mm la fiecare capăt al barei de etalonare ;

- se așează bara în dispozitivul de etalonare astfel ca fața acoperită cu lac să fie solicitată la întindere. Se reglează șurubul de fixare pînă ce bara atinge cama ;

- se rotește cama complet, într-o secundă, și se marchează fisura cea mai apropiată de camă ;

- se înlătură sarcina și se pune bara de etalonare în scala de deformații, unde în dreptul fisurii marcate se citește pe scală valoarea pragului de deformare (v. fig. 7.14).

b) *Tehnica de etalonare pentru măsurarea deformațiilor de compresiune.* În acest caz tehnica este mai complexă și se poate realiza în două variante :

1°. Se acoperă bara de etalonare cu lac, și se așează în dispozitivul de etalonare cu fața acoperită în jos. Se rotește complet cama și se menține bara în stare deformată pînă la uscarea lacului. Readucerea camei și deci a barei în poziția inițială va permite formarea fisurilor, în mod similar cu cele ce apar la tehnica obișnuită de etalonare la întindere.

2°. Se acoperă bara cu lac și se usucă în mod obișnuit. Se așează în dispozitivul de etalonare cu fața acoperită în jos și se deformează bara prin rotirea completă a camei. Se menține bara în această stare deformată timp de aproximativ 2 ore, timp în care stratul de lac curge, tinzînd să se relaxeze, pînă atinge o stare de echilibru. La sfîrșitul acestei perioade slăbirea camei va produce fisuri în stratul de lac, similare cu cele formate prin tehnicile de calibrare prezentate anterior.

În ambele variante, după scoaterea din dispozitivul de etalonare, bara este pusă în scala de deformații unde se marchează și se citește pragul de deformare.

7.3.2. VERIFICAREA PRECIZIEI ETALONĂRII

Verificarea preciziei etalonării lacurilor casante se face — de regulă — cu ajutorul traductoarelor rezistive. În acest scop, după încercarea piesei sau structurii cu metoda lacului casant, se aplică două traductoare

rezistive pe o linie izoentatică, prima perpendiculară pe o izostatică iar a doua paralelă la aceasta (fig. 7.15, a).

Se încarcă piesa cu sarcina la care s-a obținut izoentatica și se citesc deformațiile înregistrate de cele două traductoare. Cu deformațiile astfel determinate se calculează valoarea tensiunilor principale folosind relațiile (1.25 b).

Odată tensiunile principale determinate, pragul de deformare al lacului se poate calcula cu relațiile

$$\varepsilon_{0-1} = \frac{\sigma_1^p}{E_p} \quad (7.3)$$

$$\varepsilon_{0-2} = \frac{\sigma_2^p}{E_p}$$

unde ε_{0-1} și ε_{0-2} sînt pragurile de deformare ale lacului casant pentru cele două familii de izoentatice.

O metodă mai simplă pentru verificarea etalonării lacurilor casante cu ajutorul traductoarelor rezistive (v. fig. 7.15, b), a fost elaborată în laboratorul de tensometrie al ICPTT din București și constă din : (1) aplicarea unui număr de traductoare*) pe una din barele de etalonare ; (2) deformarea barei cu ajutorul dispozitivului de etalonare ; (3) înregistrarea cu ajutorul unei punți tensometrice a deformațiilor specifice în dreptul fiecărui traductor de pe bara etalon ; (4) trasarea diagramei de variație a deformației specifice de-a lungul barei etalon ; (5) gradarea scalei de deformare conform datelor înregistrate.

Determinarea pragului de deformare al lacului aplicat pe barele etalon, folosind același dispozitiv de etalonare și aceeași scală, constituie un mijloc de verificare a pragului de deformare comunicat de firma furnizoare a lacului.

Verificările efectuate în cazul unor lacuri furnizate de firma Magnaflux (Stresscoat) și firma Photolastic (Tens-Lac) au confirmat eficacitatea metodei mai sus prezentată.

În curba din fig. 7.15, c sînt prezentate rezultatele comparative obținute la verificarea — cu metoda amintită — a pragului de deformare comunicat de furnizor pentru lacul Stresscoat ST—75.

7.3.3. DETERMINAREA LIMITEI DE RUPERE A LACULUI CASANT (PRAGUL DE DEFORMAȚIE)

În timpul transformării lacului din stare lichidă în stare solidă, datorită contracției se produce o tensiune internă în stratul de lac. În anumite cazuri, această tensiune poate fi mai mare decît limita de rupere a lacului și poate produce fisuri întîmplătoare. Fisurile întîmplătoare sînt fisuri orientate după toate direcțiile nefiind direcții preferențiate.

* La experimentările făcute, s-au aplicat un număr de 16 traductoare, care au acoperit în măsură satisfăcătoare regiunea de bară examinată.

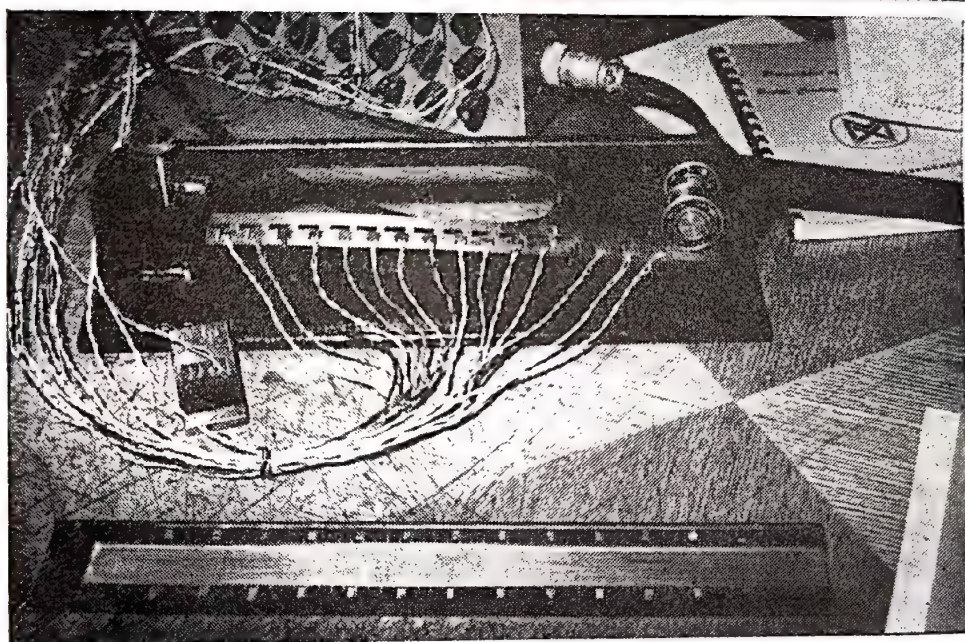
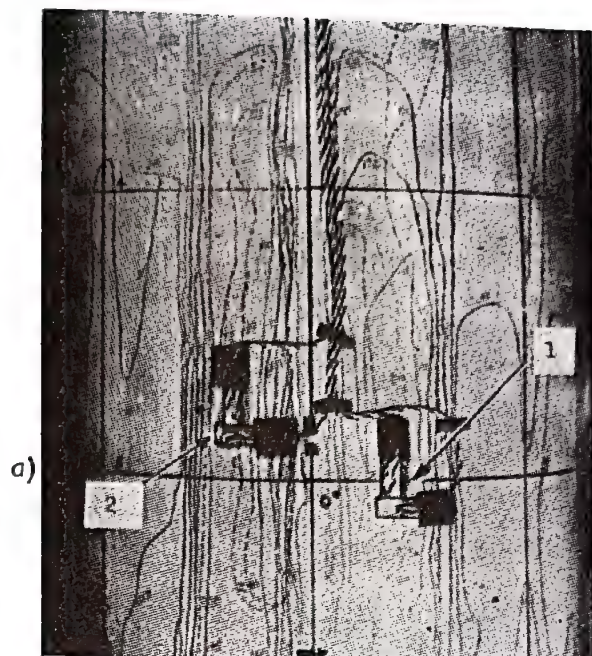
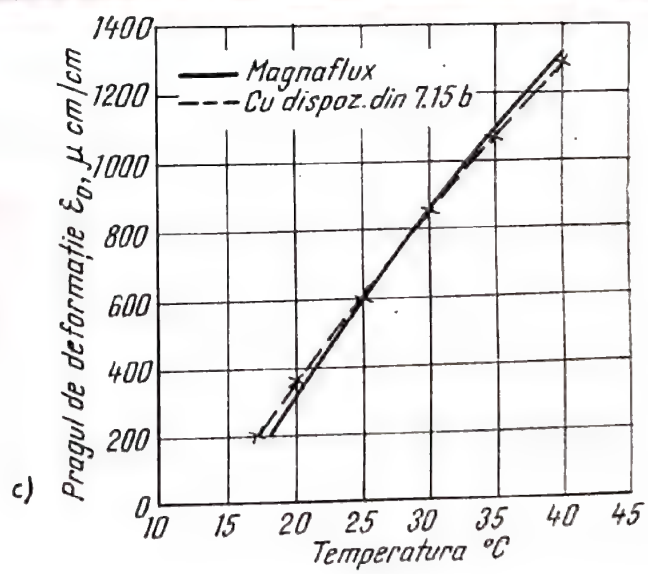


Fig. 7.15.



În cele mai multe cazuri, tensiunea internă nu este suficientă pentru a fisura lacul casant. Uneori după ce lacul se solidifică, datorită însușirilor sale plastice, o parte din această tensiune internă va fi eliberată.

La o încercare efectuată corect răcirea trebuie să fie lentă astfel că o mare parte din tensiunea internă este eliberată. Cu toate acestea stratul de lac rămîne cu o tensiune remanentă σ_r^l .

Ipoteza de rupere a tensiunii maxime de întindere (ipoteza I-a), admite că stratul de lac casant va fisura cînd tensiunea principală maximă

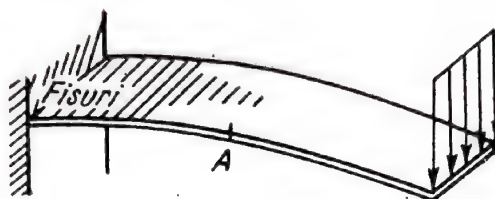


Fig. 7.16.

în lac este mai mare sau egală cu o valoare critică σ_r^l , definită ca rezistență de rupere a lacului casant.

Pentru bara de etalonare (fig. 7.16), dacă lacul începe să fisureze în punctul A, atunci σ_r^l trebuie să fie egal cu suma tensiunii remanente σ_R^l și tensiunea aplicată σ_1^l .
adică

$$\sigma_r^l = \sigma_1^l + \sigma_R^l \quad (7.4)$$

cunoscînd că

$$\sigma_1^l = \frac{1 - \mu^l \mu^c}{1 - \mu^{l2}} E^l \varepsilon_0 \quad (\text{v. } \S \ 7.5., \text{ relația (7.12)})$$

rezultă

$$\sigma_r^l = \frac{1 - \mu^l \mu^c}{1 - \mu^{l2}} E^l \varepsilon_0 + \sigma_R^l \quad (7.5 \ a)$$

în care :

μ^c este coeficientul lui Poisson pentru materialul barei de etalonare ;

ε_0 — deformația principală maximă în punctul A, numită și prag de deformație la încărcare directă a lacului folosit ;

μ^l — coeficientul lui Poisson pentru lac ;

E^l — modulul de elasticitate al lacului.

Cunoscînd constantele μ^l , μ^c și E^l precum și valoarea ε_0 stabilită prin etalonare, se determină diferența

$$\sigma_r^l - \sigma_R^l = \frac{1 - \mu^l \mu^c}{1 - \mu^{l2}} E^l \varepsilon_0 \quad (7.5 \ b)$$

Pe de altă parte pragul de deformare (ε'_0) al lacului liber de orice tensiune remanentă, ($\sigma_R^I = 0$), este determinat de furnizor și deci cunoscut. Introducând în relația (7.5) valoarea pragului de deformare ε'_0 pentru $\sigma_R^I = 0$, rezultă σ_r^I .

O dată stabilite mărimile σ_r^I și diferența ($\sigma_r^I - \sigma_R^I$), se poate determina valoarea tensiunii remanente σ_R^I .

7.4. DETECTAREA FISURILOR ÎN STRATUL DE LAC

Reușita unei încercări cu lac casant depinde de posibilitățile de localizare a fisurilor ce se formează în stratul de lac, în urma aplicării sarcinii exterioare. Dacă lacul este corect aplicat aceste fisuri vor rămâne deschise și după ce sarcina este înlăturată. Pentru a utiliza în mod corect lacul casant în vederea cunoașterii atât a direcției cât și a mărimii tensiunilor

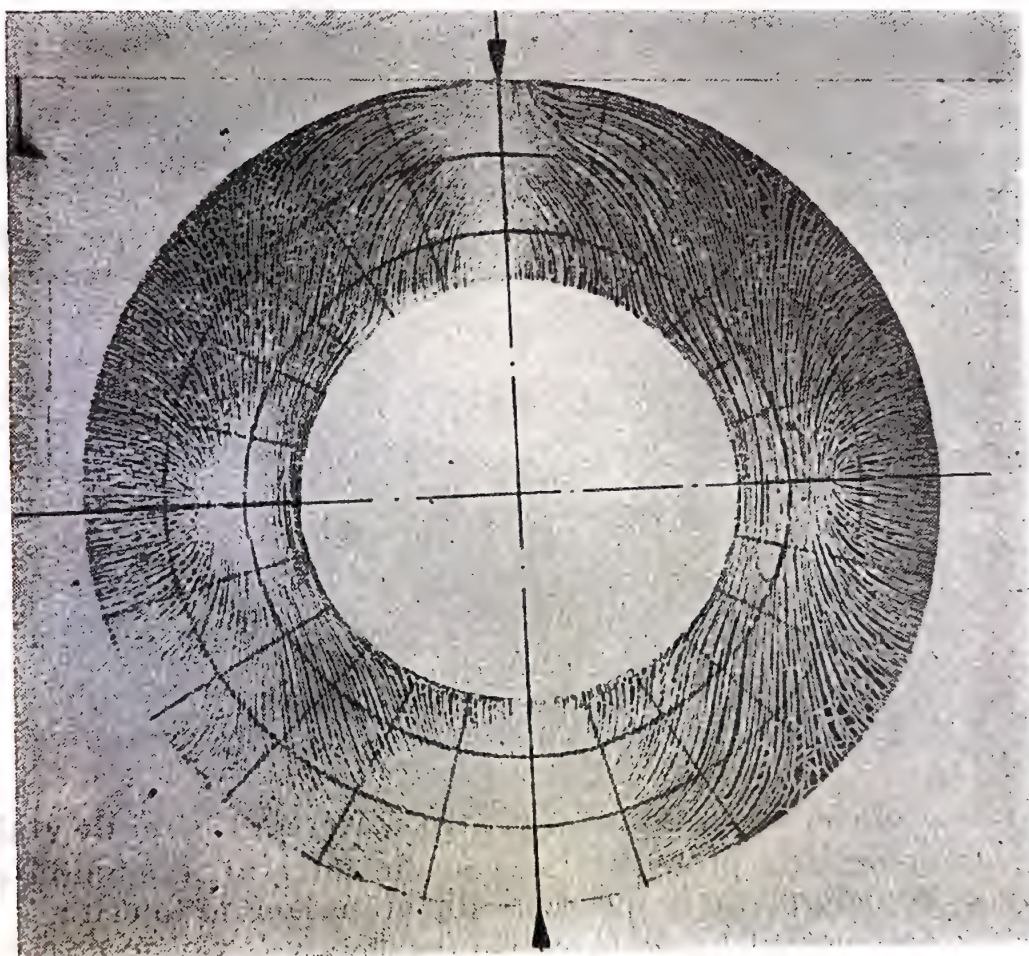


Fig. 7.17.

este necesară localizarea tuturor fisurilor și înregistrarea valorii sarcinii la care acestea apar.

Fisurile produse sînt foarte fine, de regulă în formă de V, cu o adîncime egală cu grosimea stratului de lac și o lățime de aproximativ 0,05 pînă la 0,075 mm. Pentru a putea fi observate vizual, se folosește

o sursă de lumină focalizată îndreptată oblic pe suprafața piesei și normală la direcția fisurii [10]. Deseori locul, direcția și sarcina la care va apare prima fisură nu sînt cunoscute, din care cauză se cheltuiește o mare parte din timp pentru localizarea fisurilor.

O metodă de examinare cu particule electrizate, care reduce în mare măsură timpul necesar localizării cîmpurilor de fisuri, a fost pusă la punct de firma Magnaflux sub denumirea comercială de Statiflux [14]. Pe suprafața de examinat se aplică un agent penetrant umed cu proprietăți de electrolit moderat. Dacă există fisuri, agentul penetrant curge în acestea, le umple și face contact electric cu metalul piesei. Suprafața piesei este apoi ștearsă cu un șervețel. Această operație înlătură agentul penetrant de pe suprafața lacului dar nu și din fisuri. În continuare, cu ajutorul unui pulverizator se aplică asupra stratului de lac o pudră de talc electrizată negativ chiar în timpul pulverizării. Particulele de pudră încărcate negativ sînt atrase electric spre agentul rămas în fisură. Pudra formează mici coline albe de-a lungul fisurilor și oferă un mijloc bun de localizare a acestora.

Metoda mai poate fi folosită și pentru fotografierea cîmpurilor de fisuri. Exemple tipice de folosire a metodei Statiflux sînt ilustrate în fig. 7.17 și 7.18.

Principalul dezavantaj al metodei Statiflux de detectare a fisurilor constă în faptul că agentul trebuie aplicat și îndepărtat în mod repetat pe stratul de lac (necunoscînd momentul în care apar fisurile).

Orice abatere de la aplicarea uniformă a agentului peste întreaga suprafață a lacului va produce schimbări de temperatură datorate vitezelor diferite de evaporare.

După cum s-a arătat (în § 7.2.4 c), schimbarea temperaturii trebuie evitată în orice analiză cantitativă cu lac casant.

Tot firma Magnaflux produce o vopsea corozivă ce poate fi folosită pentru a spori vizibilitatea cîmpului de fisuri, însă numai pentru scopuri fotografice. Vopseaua corozivă este un amestec de terebentină, valvolină și vopsea roșie. Se aplică vopseaua corozivă pe suprafața lacului fisurat timp de un minut. În acest timp agentul coroziv atacă lacul la marginea fisurilor făcîndu-le mai largi. Dacă vopseaua corozivă este lăsată în contact cu lacul casant, o perioadă excesivă de timp, ea va ataca suprafața lacului. După ce vopseaua corozivă este ștearsă de pe suprafața lacului, acesta se curăță cu o emulsie de apă și săpun. Vopseaua care a pătruns în fisuri, nu este înlăturată în timpul procesului de curățire; astfel, fisurile apar ca niște linii roșii pe un fond galben.



Fig. 7.18.

Folosirea vopselei corozive ca mijloc de detectare a fisurilor în timpul încercărilor nu este recomandată pentru că uleiurile existente în compoziția sa influențează comportarea lacului.

7.5. TENSIUNILE DIN STRATUL DE LAC CASANT

Dacă constantele elastice ale lacului și ale piesei de cercetat ar fi aceleași — în ipoteza că tensiunile remanente sînt nule — starea de tensiune existentă în stratul de lac ar fi aceeași cu starea de tensiune de pe suprafața piesei. Aceste constante fiind foarte diferite, cu ocazia uscării lacului, chiar semnul tensiunii apărute în lac poate fi uneori diferit de cel din piesă [5]. Grosimea stratului de lac fiind foarte mică (0,125—0,250 mm) tensiunile din stratul de lac perpendiculare pe suprafața acestuia pot fi neglijate, deci se poate admite că în stratul de lac există o stare plană de tensiune. Tensiunile din stratul de lac aplicat pe piesa de cercetat, se consideră egale cu tensiunile din stratul de lac aplicat pe bara de etalonare. Aceasta se poate obține prin menținerea piesei și a barei de etalonare împreună în timpul uscării lacului.

Se admite că adeziunea între stratul de lac și piesă este perfectă; ca urmare deformațiile în stratul de lac vor fi identice cu cele de la suprafața piesei, și direcțiile principale ale deformațiilor și tensiunilor în stratul de lac vor coincide cu cele ale piesei.

După ce stratul de lac a fost uscat la temperatura camerei, sau tratat într-un cuptor la temperatură ridicată (v. § 7.2.2.c), piesa este supusă la un sistem de încărcări care produce fisurarea stratului de lac.

Tensiunile din stratul de lac, ce produc cîmpul de fisuri, depind de valoarea tensiunilor din piesă.

Dat fiind că stratul de lac, așa cum s-a subliniat mai sus, este, de regulă, foarte subțire în raport cu grosimea piesei, se poate admite că deformațiile ce apar la suprafața piesei sînt transmise stratului de lac fără a fi modificate; mai mult, aceste deformații pot fi considerate uniforme pe grosimea acestuia.

S-a arătat că (§ 7.2.1) stratul de lac se fisurează cînd deformația lui specifică ajunge la valoarea critică numită *prag de deformare*, determinat prin etalonarea lacului în modul prezentat la § 7.3.1. Tensiunea principală în piesă, perpendiculară pe fisura în stratul de lac, se calculează folosind următoarea relație

$$\sigma_l^p = E^p \varepsilon_0 \quad (7.6)$$

unde :

- σ_l^p este tensiunea principală de la suprafața piesei ce face obiectul cercetării, în locul fisurii din stratul de lac;
- E^p — modulul de elasticitate al materialului piesei;
- ε_0 — pragul de deformare necesar fisurării stratului de lac, cînd piesa este supusă la o stare de tensiune monoaxială.

Această relație pentru calculul tensiunilor principale fiind simplă, este larg acceptată ca fiind suficient de precisă; totuși ea are un neajuns important; nu ține seama de influența stării biaxiale de tensiuni asupra ruperii lacului, stare, care în practică există în majoritatea cazurilor.

Pentru a examina această influență a stării biaxiale de tensiuni, se consideră un element de secțiune care cuprinde atât stratul de lac cât și de material din piesă (fig. 7.19).

Ținând seama că, așa cum s-a menționat mai sus, stratul de lac este relativ subțire în raport cu grosimea piesei, și că aderența lacului pe supra-

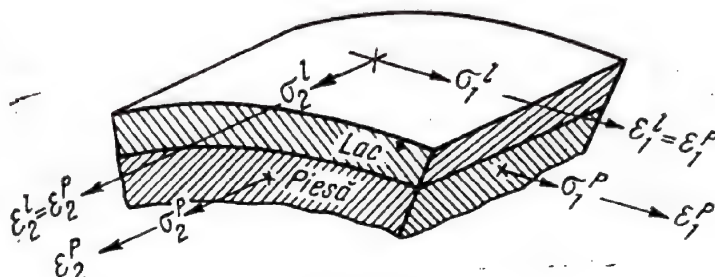


Fig. 7.19.

fața piesei este perfectă, deformațiile apărute la suprafața piesei sînt transmise practic fără modificare la stratul de lac [5]

$$\text{astfel că} \quad \epsilon_1^l = \epsilon_1^p, \quad \epsilon_2^l = \epsilon_2^p \quad (7.7)$$

$$\text{Se admite că:} \quad \sigma_3^l = \sigma_3^p = 0.$$

Se presupune deci că există o stare plană de tensiune atât în stratul de lac, cât și în stratul de material de la suprafața piesei; ca urmare deformațiile pot fi exprimate în funcție de tensiuni folosind legea lui Hooke generalizată exprimată prin relațiile (1.25 a). Aplicînd aceste relații la cazul de față rezultă:

$$\begin{aligned} \epsilon_1^p &= \frac{1}{E^p} (\sigma_1^p - \mu^p \sigma_2^p) \\ \epsilon_2^p &= \frac{1}{E^p} (\sigma_2^p - \mu^p \sigma_1^p) \\ \epsilon_1^l &= \frac{1}{E^l} (\sigma_1^l - \mu^l \sigma_2^l) \\ \epsilon_2^l &= \frac{1}{E^l} (\sigma_2^l - \mu^l \sigma_1^l) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Dacă se ține seama de relațiile (7.7) rezultă următoarele expresii pentru tensiunile principale din stratul de lac:

$$\begin{aligned}\sigma_1^l &= \frac{E^l}{E^p(1-\mu^{l2})} [(1-\mu^l\mu^p)\sigma_1^p + (\mu^l-\mu^p)\sigma_2^p] \\ \sigma_2^l &= \frac{E^l}{E^p(1-\mu^{l2})} [(1-\mu^l\mu^p)\sigma_2^p + (\mu^l-\mu^p)\sigma_1^p]\end{aligned}\quad (7.9)$$

Aceste relații reprezintă starea plană de tensiuni produsă în stratul de lac de către starea plană de tensiuni acționând în stratul superficial al piesei ce este în contact cu lacul.

Etalonarea lacului casant se face, de regulă, prin aplicarea sa pe o bară în consolă care este supusă la o deformare de încovoiere cunoscută (v. § 7.3.1). Pragul de deformare al lacului este dat de relația

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1^p \quad (7.10)$$

Tensiunile în fibrele extreme ale barei pe care este aplicat lacul sînt date de relația

$$\begin{aligned}\sigma_1^p &= E^p \varepsilon_1^p \\ \sigma_2^p &= 0\end{aligned}\quad (7.11)$$

Substituind relațiile (7.10) și (7.11) în relațiile (7.9) se obțin tensiunile în stratul de lac pentru bara de etalonare,

$$\begin{aligned}\sigma_1^l &= \frac{E^l}{1-\mu^{l2}} (1-\mu^l\mu^c)\varepsilon_0 = \frac{E^l}{E^c(1-\mu^{l2})} (1-\mu^l\mu^c)\sigma_1^c \\ \sigma_2^l &= \frac{E^l}{1-\mu^{l2}} (\mu^l-\mu^c)\varepsilon_0 = \frac{E^l}{E^c(1-\mu^{l2})} (\mu^l-\mu^c)\sigma_1^c\end{aligned}\quad (7.12)$$

în care :

μ^c este coeficientul lui Poisson pentru materialul din care este confecționată bara de etalonare;

σ_1^c — tensiunea monoaxială în bara de etalonare, necesară fisurării lacului casant;

E^c — modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată bara de etalonare.

Din relațiile (7.12) rezultă că starea monoaxială de tensiune în bara de etalonare produce o stare biaxială de tensiune în stratul de lac. Starea de tensiune biaxială apare ca urmare a diferenței dintre coeficientul de

contractie al lacului și cel al materialului din care este confecționată bara de etalonare.

Ca urmare, dacă coeficientul de contracție al lacului μ^l este mai mare decât cel al materialului structurii de cercetat, aceasta, este supusă unei tensiuni de compresiune transversală.

Coeficientul de contracție al lacurilor casante este, în general, cuprins între 0,4—0,5 [13] superior deci celui al oțelului. Pentru acest considerent, chiar dacă deformările piesei și lacului sînt aceleași, tensiunile pot fi diferite datorită valorilor diferite ale caracteristicilor elastice. De aici necesitatea etalonării lacurilor pe perioada încercărilor.

7.6. EXEMPLE DE CÎMPURI DE FISURI

Locul, succesiunea și direcția fisurilor în stratul de lac, într-o anumită zonă a piesei sau structurii, arată starea de solicitare: direcția tensiunilor principale iar în cazul determinărilor cantitative și mărimea acestor tensiuni în zona studiată.

Pentru o mai bună înțelegere a modului de interpretare a cîmpului de fisuri se prezintă următoarele exemple:

7.6.1. CÎMPURI DE FISURI PRODUSE PRIN ÎNCĂRCARE DIRECTĂ

Se consideră următoarele trei cazuri [2].

Cazul 1: $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 < 0$.

În acest caz se formează fisuri numai după o direcție și anume, după direcția perpendiculară la σ_1 (v. fig. 7.20).

Aceste fisuri indică direcția tensiunii principale σ_2 , în consecință fisurile reprezintă traiectorii de tensiune sau izostatice (σ_2).

Cazul 2: $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$.

În acest caz se pot forma două familii de fisuri. Prima datorită lui σ_1 se formează perpendicular pe σ_1 și paralel cu σ_2 . Cînd nivelul tensiunii σ_2 devine suficient de ridicat, o a doua familie de fisuri se va forma perpendicular pe σ_2 și paralel cu σ_1 . Cînd ambele familii de fisuri sînt formate, se obține un cîmp de izostatice sau traiectorii de tensiune (fig. 7.21).

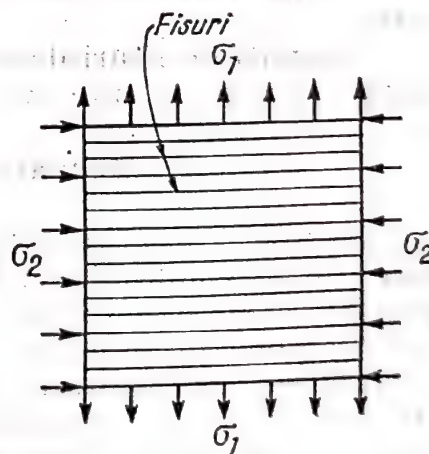


Fig. 7.20.

Cîmpurile de fisuri de acest tip sînt adesea întîlnite în încercarea porțiunii cilindrice a vaselor de presiune, unde σ_1 (tensiunea după circumferință) este de două ori mai mare decât σ_2 (tensiunea după axa cilindrului).

Dacă presiunea în cilindru crește încet, primele fisuri în stratul de lac vor apărea de-a lungul axei cilindrului și se vor datora lui σ_1 .

Mai târziu, după ce presiunea hidrostatică, acționând asupra vasului cilindric, este mai mult decât dublă față de presiunea la care au apărut

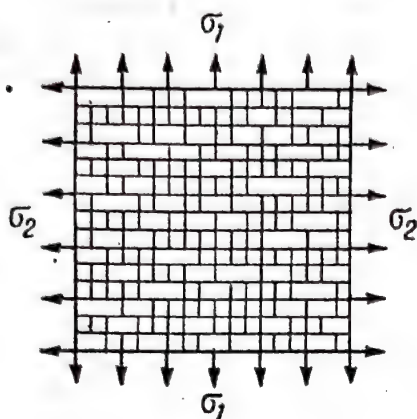


Fig. 7.21.

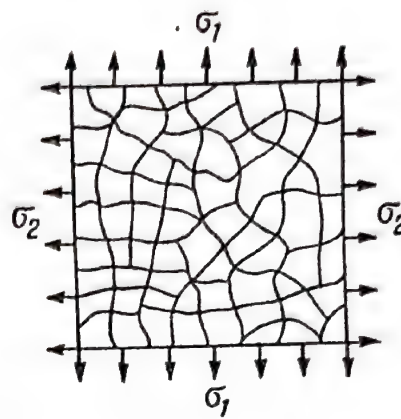


Fig. 7.22.

primele fisuri, o a doua serie de fisuri se va forma în direcție circulară datorită tensiunii σ_2 .

Cazul 3: $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$.

Cînd $\sigma_1 = \sigma_2$, în orice punct de pe corp, există așa numita starea izotropică de tensiune și oricare direcție este o direcție principală. Dacă valorile lui σ_1 și σ_2 sînt suficient de mari, stratul de lac va fisura; cîmpul de fisurare produs va avea un caracter întîmplător neavînd direcții preferențiate.

În fig. 7.22 este ilustrat în mod schematic acest tip de cîmp de fisurare.

Cîmpuri de fisuri de acest tip apar cînd sînt încercate vase, sub presiune, sferice, la care $\sigma_1 = \sigma_2$.

7.6.2. CÎMPURI DE FISURI PRODUSE PRIN RELAXARE

În practică există situații cînd una sau chiar ambele tensiuni principale sînt de compresiune. În asemenea cazuri nu este posibil să se obțină prin procedeul de încărcare directă cîmpuri de fisuri, deoarece lacul casant nu reacționează în cazul tensiunilor de compresiune. Metoda lacurilor casante poate fi utilizată, și în asemenea cazuri, dacă se folosește tehnica relaxării [8], care este opusă procedurii de încărcare directă. Se aplică o sarcină de compresiune piesei acoperite cu lac, înainte de uscarea acestuia. Sarcina este menținută asupra piesei pînă la uscarea completă a lacului. În aceste condiții lacul este nesolicitat (neglijînd tensiunile remanente, care sînt totdeauna prezente în lac), în timp ce piesa este puternic solicitată la compresiune. Dacă o parte din sarcină este înlăturată, piesa se va lungi, deoarece a fost în prealabil comprimată, iar în stratul de lac

vor apărea tensiuni de întindere care sînt suficient de mari pentru a indica zonele de solicitare la compresiune ale piesei. În felul acesta relaxarea sarcinii din piesă inversează tensiunile în stratul de lac și permite determinarea cu suficientă precizie a tensiunilor de compresiune ce apar în piesă.

7.6.3. CÎMPURI DUBLE DE FISURI

Cînd lacurile casante sînt folosite pe modele din plastic, se pot obține ambele familii de fisuri suprapuse pe model. Aceasta se realizează prin încărcarea modelului în timp ce lacul este umed, și menținerea lui sub sarcină pînă ce lacul s-a uscat. La scăderea sarcinii, lacul fisurează paralel cu direcția σ_1 . Pentru obținerea unui cîmp de fisuri pe toată suprafața acoperită, uneori, în această etapă este necesară folosirea unei tehnici de răcire (v. § 7.6.4).

Dacă lacul este apoi lăsat un timp de 6—8 ore să se relaxeze, tensiunile în lac vor dispărea din cauza proprietății lacului de a curge sub sarcină. Dacă la sfîrșitul acestei perioade de relaxare se aplică o sarcină directă

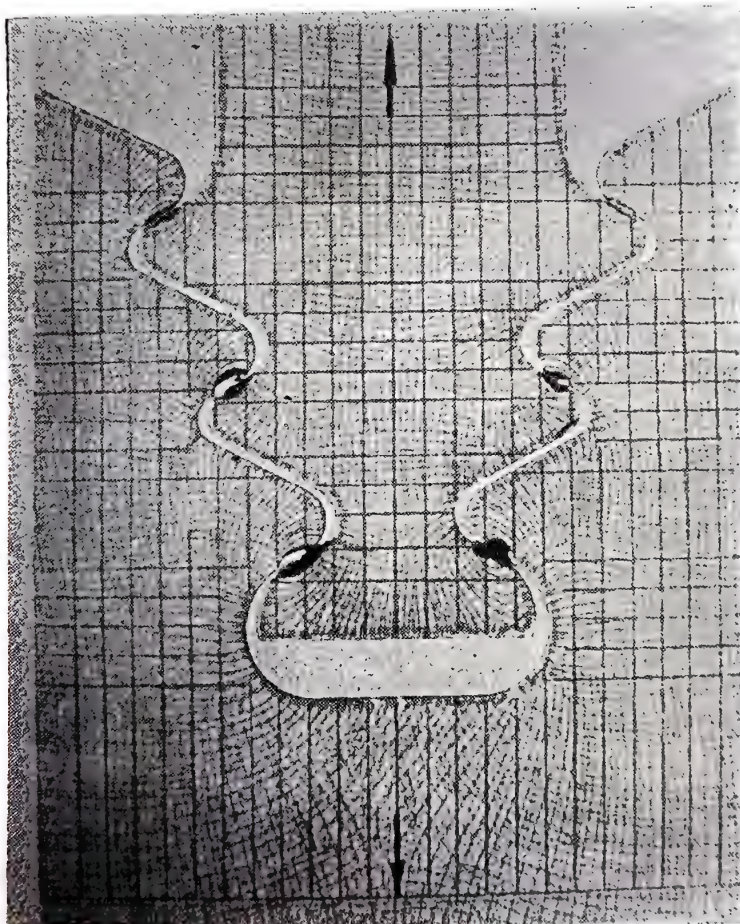


Fig. 7.23.

asupra modelului o a doua familie de fisuri va apărea paralel cu direcția σ_2 (v. fig. 7.23).

Din nou poate fi necesar folosirea unei tehnici de răcire pentru a obține fisurarea lacului casant pe întreaga suprafață acoperită.

Această tehnică poate fi folosită și la elemente din metal, însă rezultatele nu sînt totdeauna concludente deoarece deformările specifice în metale sînt mult mai mici decît cele din materialele plastice.

7.6.4. CÎMPURI DE FISURI PRODUSE PRIN TEHNICA RĂCIRII

În multe cazuri practice, o anumită zonă este adesea mult sollicitată iar restul piesei nu este sollicitată la un nivel suficient pentru a produce fisurarea lacului casant.

Singura informație dobîndită de cercetător pentru zonele în care lacul nu fisurează, este că, tensiunea în aceste zone ale piesei este mai mică decît tensiunea corespunzătoare pragului de deformare al lacului.

Cunoașterea valorii tensiunilor și în zonele slab sollicitate este necesară pentru a se putea stabili în ce măsură dimensiunile piesei pot fi reduse pentru a se realiza economii de material. Pentru a cunoaște valorile tensiunilor și în zonele slab sollicitate, de regulă, se folosesc traductoare rezistive.

Fisurarea lacului casant și în zone slab sollicitate este posibilă folosind metoda răcirii lacului [8]. Se încarcă mai întîi piesa, apoi stratul de lac casant este supus la o scădere bruscă a temperaturii.

Scăderea rapidă a temperaturii produce o stare de tensiune hidrostatică în stratul de lac care, se suprapune peste tensiunile existente datorită sarcinii exterioare.

Tensiunile datorită sarcinii, combinate cu cele termice, sînt în general suficiente pentru a produce ruperea lacului și formarea cîmpului de fisuri. Direcția fisurilor care au rezultat coincide cu una din direcțiile tensiunilor principale datorită sarcinii, pentru că, tensiunile termice fiind izotropice nu au direcții preferențiate.

Această tehnică este simplu de aplicat, rezultatele fiind suficient de precise, cu condiția ca tensiunile în stratul de lac datorită sarcinii să fie mult mai mari decît componentele tensiunilor remanente ce pot apare în stratul de lac.

Pentru scăderea temperaturii stratului de lac se folosesc, în general, două metode: Prima metodă constă în acoperirea cu gheață a suprafețelor de lac ce nu au reacționat încărcării. Această metodă nu este totdeauna eficientă, pentru că nu produce un efort termic suficient de ridicat pentru a obține o reacție suficientă a lacului. O schimbare substanțială a temperaturii poate fi obținută prin trecerea unui curent de aer comprimat printr-o cutie cu gheață uscată, care apoi să fie dirijat spre suprafața acoperită cu lac. Curentul de aer rece poate fi dirijat corespunzător, iar cîmpurile de fisuri formate sînt mai bine controlate.

7.6.5. EFECTUL RĂCIRII

Răcirea produce două efecte distincte. Mai întîi, schimbarea rezistenței la întindere a lacului σ_t^0 la temperatura de încercare t_0 , în σ_t^j la temperatura mai scăzută t_j . Al doilea, introduce o tensiune hidrostatică

în lacul casant. Această tensiune notată cu σ_H^l , poate fi calculată după, cum urmează :

Contractia pe unitate de lungime a lacului, datorită scăderii temperaturii de la t_0 la t_j este

$$\alpha^l(t_0 - t_j) \quad (7.13)$$

iar contractia pe unitate de lungime a piesei datorită scăderii temperaturii de la t_0 la t_s este

$$\alpha^p(t_0 - t_s) \quad (7.14)$$

în care : α^l și α^p sînt coeficienții de dilatație termică lineară a lacului, respectiv a piesei de încercat.

Dilatarea pe unitate de lungime a lacului, datorită tensiunii hidrostatice σ_H^l la temperatura t_j este dată de deformația hidrostatică corespunzătoare

$$(1 - \mu^l) \frac{\sigma_H^l}{E_j^l} \quad (7.15)$$

unde E_j^l este modulul de elasticitate al lacului casant la temperatura t_j .

Contractia piesei de încercat datorită compresiunii hidrostatice este neglijabilă.

Considerînd o adeziune perfectă între lac și piesă rezultă

$$\alpha^l(t_0 - t_j) - \alpha^p(t_0 - t_s) = (1 - \mu^l) \frac{\sigma_H^l}{E_j^l} \quad (7.16)$$

sau

$$\sigma_H^l = \frac{E_j^l}{1 - \mu^l} [\alpha^l(t_0 - t_j) - \alpha^p(t_0 - t_s)]. \quad (7.17)$$

Dilatarea relativă a stratului de lac produsă prin răcire, poate fi considerată ca și cum ar fi fost produsă de către o tensiune hidrostatică de întindere din piesă.

Această tensiune hidrostatică, fictivă în piesă σ_H^p , care ar produce în stratul de lac o tensiune de aceeași mărime cu cea din răcire, poate fi calculată substituind pe E^l cu E_0^l , σ_1^l cu σ_H^l , iar pe σ_1^p și σ_2^p cu σ_H^p în prima din ecuațiile (7.9) obținînd

$$\sigma_H^l = \frac{E_0^l}{E^p(1 - \mu^{l2})} (1 - \mu^l \mu^p + \mu^l - \mu^p) \sigma_H^p \quad (7.18)$$

sau

$$\sigma_H^p = \frac{E^p}{E_0^l} \cdot \frac{1 - \mu^l}{1 - \mu^p} \sigma_H^l \quad (7.19)$$

unde E_0^l este modulul de elasticitate al lacului casant la temperatura t_0 .

7.7. INTERPRETAREA CANTITATIVĂ A CÎMPULUI DE FISURI

Lacurile casante fisurează după direcții perpendiculare pe deformațiile principale de întindere furnizînd informații privind direcția și mărimea deformației în limitele elastice ale materialului de bază.

Informațiile din încercarea cu lacuri de tip Stresscoat pot fi folosite pentru obținerea unor rezultate cantitative dacă sînt respectate două condiții și anume : materialul structurii să rămînă în domeniul elastic și, distribuția sarcinii să nu se schimbe în timpul încercării [14]. Cînd aceste două condiții sînt îndeplinite se poate considera că deformațiile variază direct proporțional cu sarcina, iar deformația măsurată pentru o valoare a sarcinii aplicate, poate fi extrapolată și pentru alte valori ale sarcinii.

Pe măsură ce se formează cîmpurile de fisuri, în stratul de lac de pe structură, trebuie înregistrată poziția și direcția în care acestea apar, precum și valoarea pragului de deformație a lacului. Se recomandă marcarea cîmpului, direct pe structura de cercetat cu un pix, creion sau un ac de trasat, imediat după aplicarea sarcinii. Cîmpurile de fisuri proaspăt formate dau rezultatele cantitative cele mai precise. Cînd cîmpurile inițiale sînt greu de localizat, se încercuiesc zonele dubioase observîndu-se evoluția lor o dată cu creșterea sarcinii. Pentru a fi siguri că fisurile sînt observate în faza lor inițială de formare, este bine să se limiteze fiecare creștere suplimentară de sarcini la 25% din sarcina precedentă, sau mai puțin.

Procedeul de măsurare a deformațiilor de întindere este următorul :

Se aplică o sarcină prestabilită, se menține, în timp ce se verifică apariția cîmpului de fisuri, apoi se înlătură sarcina. Se lasă structura nesolicitată, un timp egal cu cel puțin de două ori perioada de încărcare. Aceasta permite lacului să se relaxeze. Se încarcă și se descarcă structura cu sarcini din ce în ce mai mari într-un mod similar pînă la atingerea sarcinii maxime.

De fiecare dată barele de etalonare trebuie încărcate pe o durată de timp egală cu cea necesară pentru atingerea sarcinii corespunzătoare fiecărei trepte de încărcare.

O altă tehnică de etalonare prevede încărcarea barei într-o secundă și corectarea pragului de deformație ε_0 cu ajutorul curbelor (fig. 7.12) de corecție datorită curgerii lacului.

Uneori este greu să se realizeze încărcarea și apoi înlăturarea sarcinii între treptele de încărcare. În acest caz sarcina pentru fiecare treaptă de încărcare se obține din treapta precedentă prin adăugarea în mod continuu a sarcinii corespunzătoare, și corectarea datorită curgerii lacului cu ajutorul curbelor menționate mai sus. În aceste condiții creșterea sarcinii trebuie să se facă cu o viteză constantă. Aceasta nu impune creșterea continuă a sarcinii dar trebuie să fie creșteri egale adăugate la intervale de timp egale.

În tabelul 7.2 se arată care lacuri pot fi folosite pentru determinări cantitative ; în același timp se dau o serie de indicații privind alegerea

Tabelul 7.2

Incidenții privind alegerea lacurilor casante

	Stresscoat	Micro stresscoat	All-Temp	Tens-Lac	SNECMA	ONERA	Maybach	Brafa
0	1	2	3	4	5	6	7	8
Domeniul de temperatură utilizabil, °C	-20-45	-20-45	-18-375	0-35	10-50	10-40	0-50	10-30
Pragul de deformare, μ cm/cm	500	800-1000	200-2000	500	350-1500	300	100-200	100
Condițiile de deformare (I = întindere, C = compresiune)	I și C	I și C	I	I și C	I	I	I	I
Experiența cerută operatorului, de la 1 la 3 (1 = cel mai experimentat)	2	1	3	2	2	1	3	2
Utilizabil în laborator (L) sau pe șantier (S)	L + S	L	L + S	L + S	L + S	L + S	L + S	L + S
Temperatura de uscare °C	24	24	550	24	40-100	20	140	130
Timp de uscare, ore	18	1/2-2	10	24	1-24	24	timpul necesar răcirii piesei	timpul necesar răcirii piesei
Timpul scurs de la prima operație până la prima determinare, ore	8-18	1/2-2	1-10	24	1-24	12-24	în funcție de timpul de răcire al piesei	în funcție de timpul de răcire al piesei
Dacă permite și determinări cantitative	Da	Nu	Nu	Da	Da	Nu	Nu	Nu
Dacă este reutilizabil	Da	Nu	Nu	Da	Nu	Nu	Da	Da
Utilizări tipice	Cadre metalice, structuri de material rulant, vase sub presiune	Membrane, piese mici, elemente de mecanică fină	Schimbătoare de căldură, roți de turbină, blocuri de motor	Șasiuri de vagoane și locomotive, grinzi de poduri, carcase, vase sub presiune	Structuri metalice simple, caracase mici	Elemente de construcție de dimensiuni reduse	Structuri din fontă și oțel, și unele metale neferoase	Construcții metalice din oțel și fontă

lacurilor în funcție de caracteristicile acestora, de felul solicitării, condițiile de lucru și altele.

Aplicație. Următorul exemplu, arată modul în care trebuie realizată o analiză a tensiunilor utilizând procedeul prezentat mai sus [14]. Piesa este supusă la o solicitare de întindere iar sarcina se aplică în mod continuu. Aceasta impune folosirea diagramei de corecție datorită curgerii lacului. În cel de-al doilea caz se măsoară deformăția de întindere sub sarcină de tracțiune, sarcina fiind readusă la zero după fiecare treaptă de încărcare.

Proba aleasă pentru această încercare este un cîrlig de macara montat într-o mașină de încercat cu cabluri flexibile. Sarcina nominală a cîrligului este de 2000 daN, iar încercarea începe la jumătate din această sarcină. Fiecare creștere a sarcinii va fi 25 % din sarcina inițială. Se înregistrează timpul necesar fiecărei trepte de încărcare, timpul de menținere a sarcinii la fiecare treaptă, precum și timpul consumat pentru întreg ciclul de încărcare.

Cîrligul, și mai multe bare de etalonare, au fost acoperite cu lăc și uscate în aceleași condiții, iar înainte de încercare se aduce la o stare de echilibru cu temperatura camerei de încercare. Barele de etalonare sînt menținute în apropiere și în aceleași condiții cu cîrligul, pe tot timpul încercărilor. Pe măsură ce apar cîmpuri de fisuri, pe piesă, conturul lor se marchează. Modulul de elasticitate al oțelului s-a considerat $E = 2,06 \times 10^6$ daN/cm².

Se presupune că deformățiile locale sînt proporționale cu sarcina, deci materialul este solicitat sub limită de elasticitate.

Cunoscînd pragul de deformăție al lacului ε_0 , stabilit prin etalonare, se determină pragul de deformăție corectat (datorită curgerii lacului) ε'_0 , cu ajutorul curbelor din fig. 7.12. Cunoașterea lui ε'_0 este necesară numai atunci cînd timpul de încărcare al piesei diferă de cel folosit la etalonare.

Ținînd seama de relațiile (7.10) și (7.11) și indentificînd cîmpurile de fisuri ce apar în anumite zone ale cîrligului la o încărcare dată, se determină valoarea deformăției specifice la suprafața piesei ε_{2000}^p și apoi valoarea tensiunii la suprafața piesei σ_{2000}^p în aceste zone, pentru sarcina nominală de 2000 daN, după cum urmează: $\varepsilon_0 \left[\frac{\mu \text{ cm}}{\text{cm}} \right] \times \frac{2000 \text{ daN}}{\text{sarcina de încercare}} = \varepsilon_{2000}^p$. De exemplu, pentru $\varepsilon_0 = 800 \mu\text{cm/cm}$ și sarcina de încărcare la prima treaptă de 1250 daN, rezultă pentru zona considerată o deformăție specifică la sarcina de 2000 daN, $\varepsilon_{2000}^p = 1280 \mu\text{cm/cm}$.

Pentru aceeași zonă la sarcina de 2000 daN, valoarea tensiunii va fi: $\sigma_{2000}^p = \varepsilon_{2000}^p \times E^p$, adică $1280 \cdot 10^{-6} \times 2,06 \cdot 10^6 = 2640$ daN/cm².

În tabelul 7.3. sînt prezentate rezultatele acestei încercări folosind procedeul de creștere progresivă a sarcinii aplicate cîrligului (încărcare continuă) [14]. Valorile trecute în coloanele 1 și 2 reprezintă timpul de aplicare a sarcinii, respectiv de control al suprafeței lacului pentru depistarea cîmpurilor de fisuri ce apar (coloana 5).

Pragul de deformăție corectat ε'_0 din coloana 6 se obține din $\varepsilon_0 = 800 \mu\text{cm/cm}$ cu ajutorul curbelor de corecție (7.12) în funcție de timpul total scurs de la începutul încercării, timp menționat în coloana 3. Se poate constata creșterea pragului de deformăție corectat ε'_0 cu creșterea timpului scurs de la începerea încercării.

Cunoscînd sarcinile la care apare cîmpul de fisuri într-o anumită zonă, și pragul de deformăție corectat, se determină, așa cum s-a arătat anterior, care va fi deformăția la suprafața cîrligului în zona respectivă, corespunzător sarcinii nominale de 2000 daN, ε_{2000}^p trecută în coloana 7. Avînd deformăția specifică ε_{2000}^p și cunoscînd modulul de elasticitate al oțelului $E = 2,06 \cdot 10^6$ daN/cm², se calculează tensiunea în zonele respective, corespunzătoare sarcinii nominale a cîrligului σ_{2000}^p trecută în coloana 8.

Pentru a determina valoarea tensiunii și în zone mai puțin solicitate, s-a continuat încărcarea pînă la sarcina de 4760 daN, materialul rămînînd în domeniul elastic în care poate fi folosită legea lui Hooke.

Măsurarea deformațiilor de întindere

1. Procedul de încărcare continuă

- Bara de etalonare încărcată într-o secundă;
- Pragul de deformare ε_0 , corectat cu diagrama de corecție (fig. 7.12).
- Pragul de deformare $\varepsilon_0 = 800 \mu\text{cm/cm}$

Tabelul 7.3.

Rezultatele încercărilor la procedul de încărcare continuă

Timp de încărcare s	Timp de control s	Timp total s	Sarcina de încercare (daN)	Localizarea fisurilor (zone)	Pragul de deformare corectat $\varepsilon_0' \left[\mu \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right]$	Deformația la sarcina de 2000 daN $\varepsilon_{2000}^p \left[\mu \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right]$	Tensiunea în piesă la 2000 daN $\sigma_{2000}^p \left[\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \right]$
1	2	3	4	5	6	7	8
60	10	70	1000	nu apar	—	—	—
120	10	130	1250	nu apar	—	—	—
180	10	190	1560	apar în zona A	1010	1300	2670
240	10	250	1950	zona A crește	1040	1070	2200
300	10	310	2440	zona A crește	1060	870	1790
360	10	370	3050	zona A crește apar și în zona B	1080	710	1460
420	10	430	3810	zona A crește zona B crește	1100	580	1190
480	10	490	4760	zona A crește zona B crește	1110	470	970

În tabelul 7.4. sînt prezentate rezultatele unei încercări efectuate tot asupra unui cîrlig, folosind procedul de încărcare cu revenire repetată la sarcina zero, după fiecare treaptă de încărcare [14].

7.8. METODA LĂCURILOR CASANTE AUXILIAR AL TENSOMETRIEI ELECTRICE ȘI AL FOTOELASTICITĂȚII

Alegerea celei mai bune metode de analiză experimentală a tensiunilor într-o anumită aplicație practică devine tot mai dificilă dacă se are în vedere atât noile metode și tehnici de analiză apărute în ultimul timp cît și perfecționarea celor vechi.

S-a subliniat (cap. 1) că metodele și tehnicile tensometrice nu măsoară tensiunea ele măsoară deformarea. Mai mult, majoritatea tehnicilor măsoară numai deformarea la suprafața piesei sau structurii ce face obiectul cercetării, și în consecință nu obținem o analiză completă. Este necesar să se stabilească, mai întii, care deformații trebuie măsurate, uniaxiale

2. Procedul de încărcare cu revenire repetată la sarcina zero

- Bara de etalonare încărcată în 45 s
- Timpul de încărcare în toate cazurile, 45 s
- Pragul de deformare $\varepsilon_0 = 800 \mu\text{cm/cm}$

Tabelul 7.4.

Rezultatele încercărilor la procedul de încărcare repetată cu revenire la zero

Sarcina de încercare (daN)	Localizarea fisurilor (zone)	Deformația la 2000 daN $\varepsilon_{2000}^p \left[\mu \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right]$	Tensiunea în piesă la 2000 daN $\sigma_{2000}^p [\text{daN/cm}^2]$
1000	nu apar	—	—
0	—	—	—
1250	apar în zona A	1280	2640
0	—	—	—
1560	zona A crește	1030	2120
0	—	—	—
1950	nu apar alte fisuri	—	—
0	—	—	—
2440	zona A crește, apar și în zona B	655	1350
0	—	—	—
3050	zona A crește zona B crește	525	1080

(la suprafața), biaxiale (la suprafața), sau triaxiale (interne). În multe cazuri cea mai bună cale de rezolvare este folosirea combinată a două sau chiar trei metode tensometice, fiecare metodă, fiind utilizată pentru a rezolva partea pentru care este cea mai indicată [6].

Metoda lacului casant oferă un mijloc excelent de determinare a direcțiilor tensiunilor principale, precum și a zonelor de maximă solicitare așa cum s-a văzut la (§ 7.6).

În general, cu ajutorul lacurilor casante pot fi determinate valorile tensiunilor maxime cu o precizie de aprox. $\pm 10\%$, dacă condițiile atmosferice pot fi controlate.

În numeroase cazuri este necesar un grad de precizie mai ridicat decât cel ce poate fi obținut prin utilizarea lacurilor casante. În cazurile menționate este indicat să se folosească pe lângă lacurile casante alte metode tensometrice și în deosebi traductoare rezistive. În asemenea cazuri se va aplica pe suprafața piesei, mai întâi, lacul casant pentru că acesta, așa cum s-a menționat, indică, cu mare precizie atât direcțiile principale cât și zonele cele mai solicitate. În continuare se aplică traductoare

rezistive numai în acele locuri ale piesei în care lacul casant indică tensiuni ridicate. În zonele respective se vor monta rozete numai cu două traductoare (v. tab. 1.5), după direcțiile perpendiculare și paralele la izostaticile indicate de câmpul de fisuri al lacului casant.

Desigur traductoarele rezistive se utilizează și fără lacuri casante (v. cap. 3). În acest caz necunoscându-se dinainte regiunile cele mai soliciitate și nici direcțiile principale, se impune folosirea unui mare număr de rozete tensometrice cu 3 sau chiar 4 traductoare (v. tab. 1.5) pentru a reduce riscul omiterii zonei cu tensiuni maxime și pentru a putea determina direcțiile și tensiunile principale. Utilizând lacurile casante se reduce în mod substanțial: numărul traductoarelor tensometrice necesare, timpul necesar pentru analiză, costul cercetării și, în același timp se asigură creșterea preciziei analizei.

În cazul când piesa sau structura de cercetat are zone cu concentrați puternici, se recomandă folosirea pentru aceste zone, și a metodelor interferometrice (v. cap. 5).

Metoda lacurilor casante mai poate fi folosită împreună cu metoda fotoelastică [7]. Deși fotoelasticitatea este o metodă total independentă (toate informațiile necesare pot fi obținute prin tehnicile fotoelastice), este recunoscut că la determinarea cu ajutorul fotoelasticității a direcțiilor tensiunilor (izoclinele) există o oarecare imprecizie. De aceea, pentru determinarea valorilor individuale ale tensiunilor principale (σ_1 și σ_2) se folosește metoda lacului casant. În acest caz, pentru determinarea direcțiilor principale lacul casant poate fi aplicat direct pe modelul fotoelastic.

În cercetările întreprinse privind distribuția tensiunilor la cilindrii sub presiune, având practicate orificii, Durelli [8. b] arată că dintre diferitele metode folosite în analiza experimentală, utilizarea combinată a fotoelasticității și lacului casant este potrivită pentru determinarea stării de tensiune în punctele situate pe suprafețele exterioare sau interioare ale acestor cilindri.

BIBLIOGRAFIE

1. CYMBOLISTE, M., PORTEVIN, A., *Procedée d'étude de la distribution des efforts élastiques dans les pièces métalliques*, Rev. mét., vol. 31, 1934.
2. DALLV, J. W., RILEY, W. F., *Experimental Stress analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1965
3. DALLY, J. W., DURELLI, A. J., *Variables affecting brittle coating in stress analysis*, Prod. Eng., Design Digest Issue, 1959.
4. DIETRICH, O., LEHR, E., *Das Dehnungslinienverfahren*, Z. des Ver. deut. Ing., vol. 76 1932.

5. DURELLI, A. J., PHILLIPS, E. A., ISAO, C. H., *Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain*, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1958.
6. DURELLI, A. J., DALL V, J. W., MORSE, S., *Experimental study of large-diameter thin-walled pressure vessels*, *Expl. Mech.*, vol. 1, nr. 2, 1961.
7. DURELLI, A. J., PARKS, V. J., LEE, H. C., *Stress in a pressurized rubber cylindrical shell with a reinforced hole*, *Journal of Strain analysis*, vol. 8, nr. 2, 1973.
8. DURELLI, A. J., PARKS, V. J., PAVLIN, V., *Brittle-coating-patterns evaluation*, *Experimental Mechanics*, vol. 14, Nr. 8, 1965.
8. b. DURELLI, A. J., CARLOS, J. del RIO, VINCENT, J. PARKS. *Stresses in a pressurized cylinder with a hole*, *Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, oct. 1967.
9. ELLIS, G., *Resinous Composition for determining the strain Concentration in rigid articles*, U. S. patent 2. 428. 559, oct. 7, 1947.
10. FAURE, G., *Le vernis craquelant. Analyse des contraintes*, tom. II, nr. 3, 1972.
11. GONCIAROV, N. R., *The brittle lacquer method of determining stresses. Stress determination in machine parts by means of tensometers and lacquers*, Leningrad — Moscova, 1946, Abstract de G. S. Smith, *Metalurgia*, aprilie, 1948.
12. GULOT, H., *Un nouveau vernis craquelant, le vernis émail*, *Recherche aeronaut.*, nr. 17., 1950.
13. L'HERMITE, R. *Méthodes générales d'essai et de controle en laboratoire*, *Mesures geometriques et mécaniques*, edition Eyrolles, Paris, 1959.
14. MAGNAFLUX CORPORATION, *Principles of Stresscoat*, Brittle coating stress analysis manual, Chicago, 1971.
15. MOCANU, D. R., BUGA, M., GEORGESCU, C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*, Editura Transporturilor și Telecomunicațiilor, București, 1966.
16. NAKAHARA, I., MUROTA, T. *Drawnability of a blank with hole. Strain determination by brittle coating*, *Japan Soc. Mech. Engrs.*, noiembrie 1954.
17. SALMON, B., *L'Analyse des contraintes par la méthode des vernis craquelants*, *Tech. et Sci. aeronaut.*, nr. 13, 1950.
18. SAUERWALD F., WIELAND, H., *Über die Kerbschlagprobe nach Schule Moser*, *Zeitschrift für Metallkunde*, vol. 17, 1925.
19. SINGDALE, F. N., *Improved brittle coatings for use under widely varying temperature conditions*, *Proc. SESA*, vol. XI, nr. 2, 1958.
20. TAIRA, S., NISCHIMURA, T., MAEDA, H., *Strain determination by brittle coating*, *Tech. Repts. Eng. Research Inst., Kyoto Univ.*, vol. 3, nr. 1, decembrie, 1953.
21. PHOTOLASTIC INC., *Instructions for the selection and use of TENS — LAC brittle lacquers and undercoating*, Bulletin TL-201.
22. *Braunschweiger Farbenwerke*, H. Müller GmbH & CoKG — Buletin DS 2 — 69
23. Magnaflux Corporation, Bulletin ST-22, Nelson A. Crites, *for stress analysis, Brittle Coating methods*, *Product Engineering*.

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A TENSIUNILOR REMANENTE

Prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU
Dr. ing. C. BURADA
Prof. dr. doc. VL. POPOVICI
Ing. M. BĂLTĂNOIU
Conf. dr. ing. D. HORBANIUC
Prof. dr. ing. M. TRIPA

8.1. ORIGINEA ȘI CLASIFICAREA TENSIUNILOR REMANENTE

Prin *tensiuni remanente* se înțeleg acele tensiuni care există într-un corp solid în absența sarcinilor exterioare (forțe, cupluri și accelerații).

Aceste tensiuni sînt cunoscute și sub denumirea de *tensiuni proprii* sau *tensiuni interne*. Ultimul termen nu este adecvat, deoarece nu face deosebire între tensiunile produse de sarcinile exterioare și tensiunile existente în absența acestora.

O particularitate a tensiunilor remanente este aceea că ele formează un sistem de forțe în echilibru.

Existența acestor tensiuni este cunoscută de mulți ani, însă abia în anii din urmă s-au dobîndit cunoștințele necesare cu privire la originea și măsurarea lor.

Tensiunile remanente în construcții și, îndeosebi, în organele de mașini au fost considerate, pînă recent, ca fiind, în general, nedorite, ele constituind adesea cauze de defecțiuni în exploatare sau de fisurări ori deformări supărătoare ale pieselor, chiar în timpul procesului de prelucrare sau al tratamentului termic (uzinarea pieselor turnate, laminare, călire etc.). Această poziție față de prezența tensiunilor remanente a predominat mulți ani, cu toate că, încă la sfîrșitul secolului trecut, au fost fabricate tuburi fretate utilizîndu-se tensiunile remanente. Întrebuințate, la început, în industria de armament, astăzi sistemele favorabile de tensiuni remanente sînt folosite pe scară largă, în numeroase cazuri ele reprezentînd mijlocul principal pentru sporirea rezistenței construcțiilor. Este lucru stabilit că rezistența la oboseală a metalelor — în anumite situații — este sensibil influențată de prezența tensiunilor remanente.

Tensiunile remanente pot fi clasificate în funcție de :

- a) cauzele formării lor
- b) volumul în care se echilibrează, și
- c) orientarea lor în spațiu.

a) *Cauzele apariției tensiunilor remanente sînt :*

În primul rînd deformațiile plastice neuniforme ce apar în cazul supraîncărcării elementelor solicitate la încovoiere și răsucire sau la prelucrarea lor la rece prin presare (matrițare).

Dacă în timpul încălzirii, deformările depășesc, în unele zone ale materialului, limita de elasticitate, după descărcare, în elementul considerat, apar deformări și tensiuni remanente.

În al doilea rând distribuția neuniformă a temperaturilor, într-un corp solid, provoacă — în timpul răcirii — în interiorul acestuia deformări elastice și elasto-plastice. Acestea din urmă duc la formarea de deformări și tensiuni remanente. Acest proces apare la sudarea pieselor ca și în cazul altor feluri de prelucrări la cald (forjare, laminare, sudare, ș.a). Tot în această grupă intră și tensiunile remanente din piesele bimetalice supuse variațiilor de temperatură.

În al treilea rând, în special la sudarea oțelurilor, în timpul procesului de sudare se produc modificări de structuri care sînt însoțite de modificări locale de volum și densitate. Aceste modificări în metal dau naștere la deformări și tensiuni remanente locale.

Factorii care influențează valoarea acestor tensiuni remanente sînt : compoziția și structura metalului, temperatura și durata de încălzire, viteza de răcire ș.a.

b) *În funcție de volumul corpului în limitele căruia tensiunile remanente se echilibrează reciproc, acestea se clasifică după cum urmează : *)*

Tensiuni de speța I, care se echilibrează într-un volum relativ mare, uneori, de același ordin de mărime cu cel al întregii structuri. Aceste tensiuni pot atinge valori ridicate, ajungînd pînă la limita de curgere a materialului și chiar depășind-o. Ele au o anumită orientare în funcție de forma piesei sau structurii, din care cauză se mai numesc și *tensiuni remanente orientate*.

În această categorie intră :

- tensiunile datorite deformărilor elasto-plastice produse de sarcinile exterioare ;
- tensiunile datorite încălzirii și răcirii neuniforme ;
- tensiunile datorite precomprimării sau pretensionării ;
- tensiunile datorite acoperirilor metalice ;
- tensiunile datorite nepotrivirilor de dimensiuni la montaj ș.a.

Tensiuni de speța a II-a, care se echilibrează în volume microscopice din corp, între limitele unuia sau mai multor grăunți cristalini. Ele nu au o orientare determinată și nu depind de forma piesei sau structurii.

În această categorie intră :

- tensiunile datorite modificărilor caracteristicilor fizico-chimice ale grăunților cristalini ;
- tensiunile datorite diferenței de dilatație a constituenților ;
- tensiunile produse de alunecarea sau fluajul constituenților, etc.

Tensiunile de prima speță se mai numesc și tensiuni remanente *macroscopice*, iar cele de speța a doua tensiuni remanente *microscopice* sau de structură.

*) Această clasificare a fost propusă pentru prima dată de E. Orowan [46].

c) *Tensiunile remanente pot fi clasificate și după orientarea lor.* În funcție de forma și mărimea piesei sau structurii, precum și de originea tensiunilor remanente, acestea pot fi :

- *monoaxiale*, când apar după o singură direcție ;
- *biaxiale*, când acționează după diferite direcții cuprinse în același plan, și

- *triaxiale* (spațiale), când acționează după toate direcțiile.

Pot fi determinate prin calcul — utilizând relațiile stabilite în teoria elasticității și plasticității — sau pe cale experimentală, numai valorile tensiunilor remanente de speța întâia. Cele de speța a doua pot fi determinate numai pe cale experimentală cu ajutorul razelor X (v. § 8.6).

În general, când se vorbește de tensiuni remanente se au în vedere numai cele de speța întâia.

Pentru stabilirea mărimii și distribuției tensiunilor remanente sînt cunoscute mai multe metode experimentale unele *distructive* iar altele *nedistructive*. În cele ce urmează se vor prezenta metodele cele mai frecvent utilizate.

8.2. METODE DISTRUCTIVE ȘI SEMIDISTRUCTIVE

Tensiunile remanente, în majoritatea cazurilor, au un caracter triaxial fiind caracterizate, într-un punct oarecare al piesei, prin tensorul respectiv, ele formînd, în lipsa sarcinilor exterioare, un sistem în echilibru. Prin reducerea dimensiunilor piesei, sau prin secționarea parțială a acesteia, echilibrul este deranjat, punîndu-se astfel în evidență existența lor. În același timp se dă posibilitatea de a se stabili distribuția și valoarea lor.

8.2.1. METODA SECȚIONĂRII

Metoda cea mai simplă și cea mai veche este aceea de secționare a piesei, ce face obiectul cercetării, în benzi paralele. Se consideră o platbandă în care se presupune că există tensiuni remanente dirijate în direcția Oy . După ce s-a făcut prelucrarea și rectificarea piesei la extremitatea $M-N$, aceasta se secționează în benzi de lungime l , paralele cu axa Oy (fig. 8.1). După secționare se observă că benzile s-au deformat cu Δl , pozitiv sau negativ. Dacă se neglijează efectul tensiunilor remanente după direcția Ox , valoarea medie a tensiunii remanente după direcția Oy într-o anumită bandă este

$$\sigma_y = \frac{\Delta l}{l} E \quad (8.1)$$

unde E este modulul de elasticitate al materialului.

Această metodă este utilizată, de mult timp, la evaluarea tensiunilor remanente în profile și în șinile de cale ferată [40], unde tensiunile pot fi considerate, practic, monoaxiale.

În fig. 8.2 se prezintă diagrama tensiunilor remanente longitudinale — după axa secțiunii și la marginile tălpii — dintr-o șină de cale

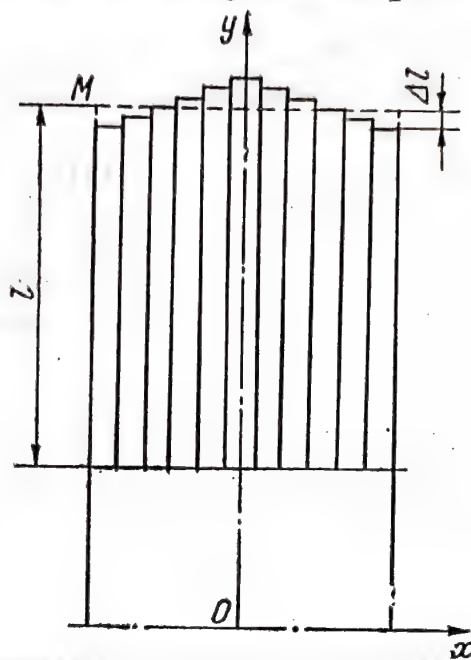


Fig. 8.1

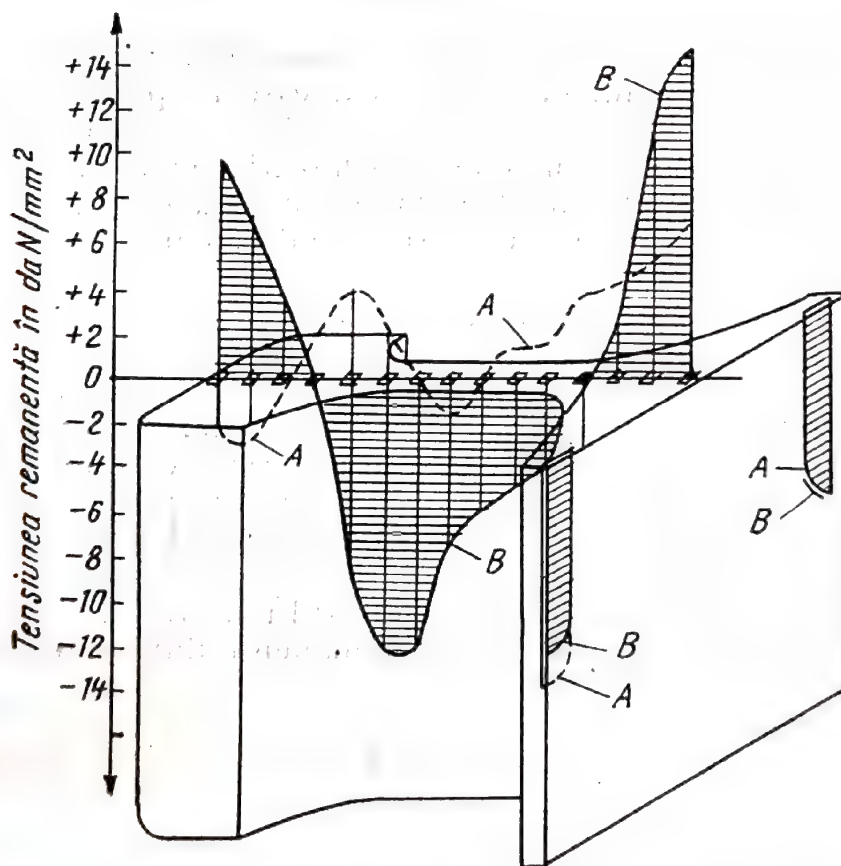


Fig. 8.2

ferată tip 40, determinate prin această metodă. Se poate considera că tensiunile remanente produse de operația de laminare sînt nule din cauza

temperaturii ridicate la care se face laminarea, în schimb, tensiunile remanente care apar în şină în timpul răcirii — care nu se face uniform — au valori apreciabile (curba A). După operaţia de îndreptare a şinei, care se face la rece, apar, datorită deformaţiilor elasto-plastice, tensiuni remanente de valori şi mai mari (curba B).

Această metodă este simplă dar prezintă dezavantajul că necesită distrugerea piesei (structurii), şi că precizia măsurării tensiunilor este redusă, aceasta, în principal, datorită faptului că procesul de secţionare provoacă, el însuşi, tensiuni remanente în marginile benzilor, a căror lăţime este de 15–18 mm.

8.2.2. METODE UTILIZATE ÎN CAZUL PIESELOR CILINDRICE

Una dintre metodele ce se aplică la piese cilindrice, cu secţiunea circulară sau inelară, este metoda strunjirii. Principiul care stă la baza metodei este explicat în fig. 8.3. Suprafeţele frontale ale unui cilindru plan sînt reprezentate în fig. 8.3, a prin două discuri circulare. Tensiunile remanente existente în cilindru, de întindere în miez şi de compresiune în zona periferică, sînt imaginate ca fiind produse de trei resoarte. Resortul din mijloc, care evidenţiază această zonă, este solicitat la întindere, iar cele două resoarte exterioare, corespunzătoare zonei periferice, sînt solicate la compresiune. Dacă straturile periferice ale cilindrului plin se îndepărtează,

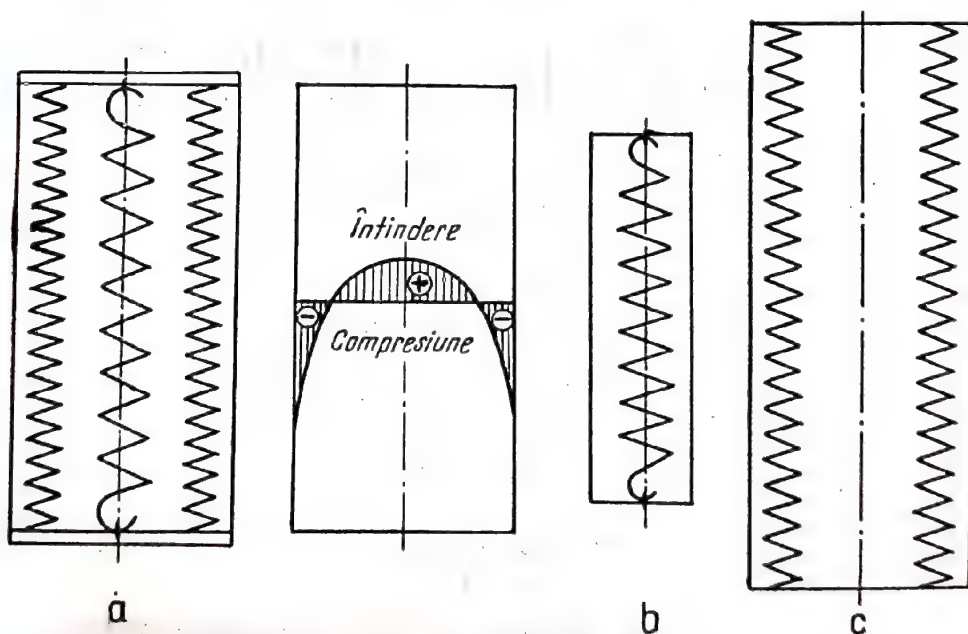


Fig. 8.3

prin strunjire, se micşorează şi tensiunile de compresiune corespunzătoare acestei zone. Prin această perturbare a echilibrului dintre tensiunile remanente, tensiunile din zona mijlocie se pot manifesta nestingherit, astfel încît această zonă devine mai scurtă (fig. 8.3, b). Dacă din cilindrul

plin, cu starea indicată de tensiuni remanente, se scoate zona din mijloc, se poate imagina efectul acestei măsuri cu ajutorul reprezentărilor din fig. 8.3, c, prin îndepărtarea resortului din mijloc. Prin aceasta, zonele de margine, deci cele două resoarte exterioare, nu mai sînt stingherite în tendința lor de a se întinde. Îndepărtarea zonei din mijloc deranjează echilibrul și provoacă o prelungire a zonei periferice. După metoda folosită de Sachs [54], strunjirea se face în etape, la temperatură constantă, prin creșterea treptată a diametrului interior, de la o strunjire la alta, pînă cînd nu mai rămîne decît un corp gol cu pereți subțiri.

Din fiecare operație de strunjire interioară (alezare) se măsoară pe fața exterioară a cilindrului alungirile în direcția longitudinală și în direcția tangențială, cu ajutorul traductoarelor rezistive așezate după cele două direcții.

S-a arătat de către Sachs [54] că cele trei tensiuni principale (longitudinală, tangențială și radială) pot fi determinate, pentru o valoare a razei interioare a cilindrului $\frac{D}{2}$, în funcție de deformațiile înregistrate, cu ajutorul următoarelor relații:

$$\begin{aligned}\sigma_l &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[(A_b - A) \frac{d\Delta}{dA} - \Delta \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[(A_b - A) \frac{d\theta}{dA} - \frac{A_b + A}{2A} \theta \right] \\ \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{A_b - A}{2A} \theta\end{aligned}\quad (8.2)$$

în care :

A_b este aria totală, înainte de strunjire;

A — aria după strunjire;

$$\Delta = \varepsilon_l + \mu \varepsilon_t;$$

$$\theta = \varepsilon_t + \mu \varepsilon_l;$$

Derivatele lui Δ și θ se determină prin înlocuirea valorilor lui ε_l , ε_t , Δ și θ și a valorilor suprafeței secțiunii transversale A , pentru două strunjiri consecutive. Dacă strunjirea se face pe suprafața exterioară a cilindrului aplicînd traductoarele pe fața interioară, tensiunile remanente se calculează cu expresiile de mai jos, care rezultă din primele, prin înlocuirea secțiunii totale A_b cu secțiunea interioară A_0 a cilindrului gol și dacă se introduce pentru ε_l și ε_t din expresiile lui Δ și θ valorile deforma-

țiilor măsurate cu traductoare rezistive aplicate pe fața interioară a cilindrului și anume

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[(A - A_0) \frac{d\Delta}{dA} - \Delta \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[(A - A_0) \frac{d\theta}{dA} - \frac{A + A_0}{2A} \theta \right] \\ \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[\frac{A - A_0}{2A} \right] \theta.\end{aligned}\quad (8.3)$$

Aplicarea acestor formule este indicată numai dacă lungimea cilindrului este cel puțin de trei ori diametrul.

Diverși cercetători au elaborat metode speciale pentru măsurarea tensiunilor remanente după direcția tangentei în piesele cu secțiune inelară (cilindri, tuburi). În toate cazurile atât tensiunile longitudinale, cât și cele radiale sînt neglijate, din care cauză rezultatele sînt aproximative.

Astfel, Kala Koutzky a strungit inele subțiri din cilindri. Aceste inele aveau pe o parte trasate un cerc și diametrul acestor cercuri era măsurat înainte și după tăiere. Dacă diametrul cercului crește, aceasta indică prezența de tensiuni circumferențiale de compresiune, iar o descreștere a diametrului indică tensiuni de întindere.

Pentru determinarea tensiunilor remanente în cilindrii plini, Siebel [40] a tăiat discuri transversale din cilindru și le-a perforat sau strunjit, în etape succesive, înregistrînd variația de diametru în baza căreia s-a calculat valoarea și distribuția tensiunilor remanente.

În cazul cilindrilor cu secțiune inelară, după Sachs, tensiunea remanentă după direcția tangentă, se evidențiază printr-o secțiune longitudinală în cilindru (fig.8.4,a). Se măsoară diametrul exterior al tubului înainte și după tăiere.

Tensiunea remanentă longitudinală se evidențiază prin tăiere din cilindru a unei fișii longitudinale (fig. 8.4, b). Aceasta după tăiere se încovoie. Mărimea săgeții f dă valoarea tensiunii longitudinale.

Relațiile pentru determinarea lui σ_t și σ_r , într-un punct oarecare corespunzător distanței x , sînt

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} (e - 2x) \frac{D_1 - D_0}{D_1 \cdot D_0} \quad (8.4)$$

$$\sigma_r = E(e - 2x) \frac{f}{l^2};$$

în care :

- e este grosimea peretelui tubului (cilindrului);
- D_0 — diametrul înainte de tăiere;
- D_1 — diametrul după tăiere;

- x — distanța de la punctul considerat pînă la fața interioară, respectiv exterioară, a tubului, măsurată pe direcția razei;
 f — săgeata capătului fișiei.

Dacă fișia a fost tăiată pe toată lungimea tubului, f este dat de distanța de la capătul fișiei pînă la tangenta dusă la celălalt capăt al fișiei.

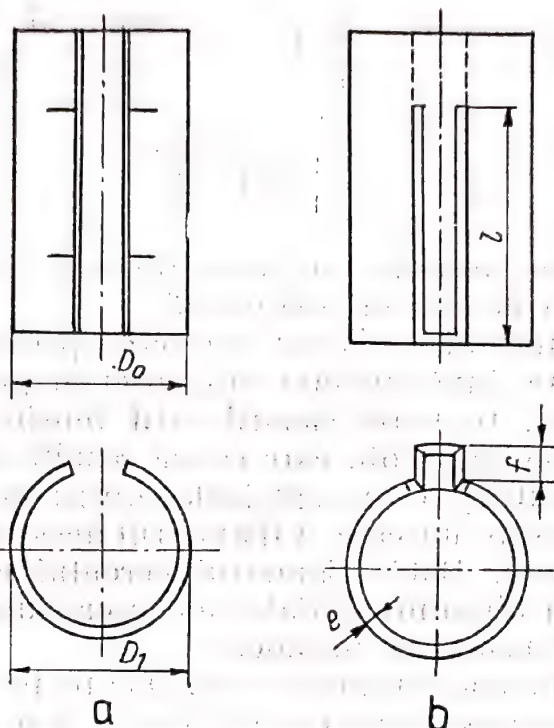


Fig. 8.4

Această metodă simplă este folosită, îndeosebi, pentru determinarea tensiunilor remanente din tuburile trase. Tăierea se face cu pînze subțiri de ferăstrău. Lățimea optimă a fișiei longitudinale este de $(0,1 \dots 0,2)D_0$.

Metoda este aplicată numai dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

- tensiunile remanente sînt de întindere pe o față (interioară sau exterioară) și de compresiune pe cealaltă față (exterioară sau interioară);
- tensiunile remanente sînt constante atît pe circumferința tubului, cît și de-a lungul tubului;

- lungimea cilindrului nu este prea mică față de diametru ($L \geq 2D$).

Stabilirea tensiunilor remanente în tuburile cu pereți subțiri prin metoda lui Sachs, descrisă mai sus, se face cu erori destul de mari din cauza valorilor mici ale deformațiilor.

Rezultate mai precise se obțin, în asemenea cazuri, cu metoda stabilită de *N.N. Davidenkov* [40], care folosește secționarea pieselor tubulare de-a lungul unei generatoare și îndepărtarea treptată pe calea chimică a unor straturi de grosime uniformă (fig. 8.5).

În acest caz se admite că tensiunile remanente sînt distribuite simetric în raport cu axa tubului și sînt constante de-a lungul acesteia. Se admite, de asemenea, ca și la metoda Sachs, că grosimea tubului este mică

în comparație cu raza medie $\left[\frac{h}{R_m} < \frac{1}{3} \right]$ ceea ce face posibilă admiterea repartiției liniare a tensiunii pe grosimea țevii, fapt ce simplifică întrucîtva calculul. Tensiunile suplimentare ce apar, ca rezultat al decupării mostrei tubulare, se neglijează, fapt care se poate admite în cazul cînd :

$$l \geq 4 \cdot l_1$$

unde l_1 este lungimea capetelor tubului de lungime l (fig. 8.5, c), pe care, conform principiului lui Saint-Venant, acționează efectul de margine. Pe baza teoriei învelișurilor subțiri cilindrice, se poate admite

$$l_1 \geq 3 \sqrt{R_m \cdot h}.$$

Rezultă deci

$$l \geq 4 \cdot l_1 = 12 \sqrt{R_m \cdot h}.$$

De exemplu, în cazul cînd

$$h = 0,25 R_m; \quad l \geq 3D_m;$$

$$h = 0,10 R_m; \quad l \geq 2D_m.$$

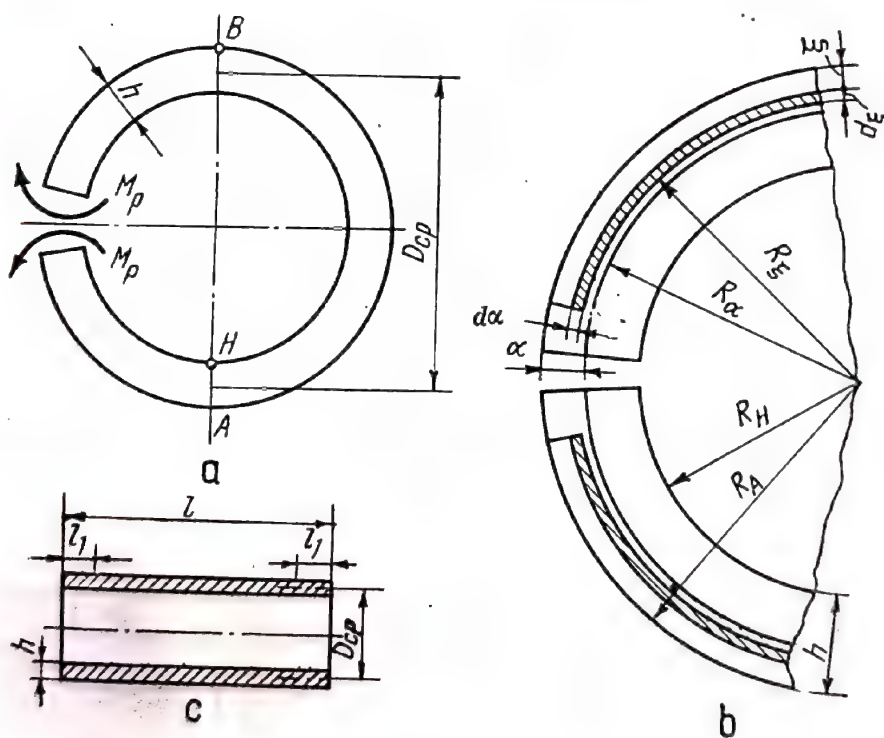


Fig. 8.5

Se face tăierea tubului de-a lungul unei generatoare și, apoi, îndepărtarea treptată, pe cale chimică, cu acizi, a unor straturi exterioare sau interioare (fig. 8.5, b)

Valoarea tensiunii remanente după direcția tangentei, în stratul α , după tăierea și eliminarea straturilor anterioare, se calculează cu formula

$$\sigma_{t\alpha} = \pm \left\{ 2 \frac{E \cdot \delta_p}{(1 - \mu^2) D_{cp}} \left(\frac{h}{2} - \alpha \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{E(h - \alpha)^2}{(1 - \mu^2) D_{cp}} \cdot \frac{d\delta}{dx} + \right. \\ \left. + \frac{E}{3(1 - \mu)} \int_0^\alpha \frac{2h - 3\alpha + \xi}{D} \cdot \frac{d\delta}{d\xi} d\xi \right\}. \quad (8.5)$$

în care :

$D_{cp} = R_A + R_H$ este diametrul mediu al inelului după tăiere ;

$$\delta_p = \frac{D_{cp}}{2EI} M_p ;$$

EI — rigiditatea secțiunii inelului.

Semnificația celorlalte mărimi rezultă din fig. 8.5, a și 8.5, b. Semnul + se folosește în cazul strunjirii de straturi exterioare, iar semnul — în cazul strunjirii de straturi interioare.

8.2.3. METODA GĂURIRII (PERFORĂRII)

În cazul plăcilor supuse unei stări plane de tensiuni remanente determinarea acestora se poate face practicînd, cu burghiul sau prin frezare, o gaură circulară de diametru $2a$ în placă și apoi se măsoară ovalizarea găurii care dă cu aproximație direcția și valoarea tensiunilor principale remanente în zona respectivă [27]. Metoda a fost propusă de Mathar [36] și poate fi utilizată și la măsurarea tensiunilor de la suprafața unei piese de formă oarecare ; adîncimea găurii, în acest caz, este limitată la aproximativ jumătatea diametrului acesteia, care variază între 6 și 12 mm.

Se consideră o placă în care a fost perforată o gaură de diametru $2a$. (fig. 8.6) solicitată de tensiuni remanente uniform repartizate pe grosimea acesteia. Se consideră, de asemenea, că tensiunile principale σ_1 și σ_2 sînt cunoscute.

La o distanță r de centrul găurii tensiunile după direcția razei (σ_r) și după direcția perpendiculară pe aceasta (σ_t) au următoarele expresii, stabilite în teoria elasticității*).

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left[1 - \frac{1}{k^2} \right] + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left[1 - 4 \frac{1}{k^2} + 3 \frac{1}{k^4} \right] \cos 2\theta \quad (8.6a)$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left[1 + \frac{1}{k^2} \right] - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left[1 + 3 \frac{1}{k^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\text{unde } k = \frac{r}{a}.$$

*) În relațiile (8.6) σ_1 și σ_2 sînt tensiuni care au loc la distanțe mari de gaură, deci, practic, valoarea lor este aceeași indiferent dacă placa este sau nu găurită.

În cazul plăcii fără gaură ($a = 0$), pentru direcția θ , măsurată față de σ_1 , precum și perpendicular pe aceasta, tensiunile se pot calcula cu relațiile

$$\begin{aligned}\sigma_r' &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_t' &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (8.6b)$$

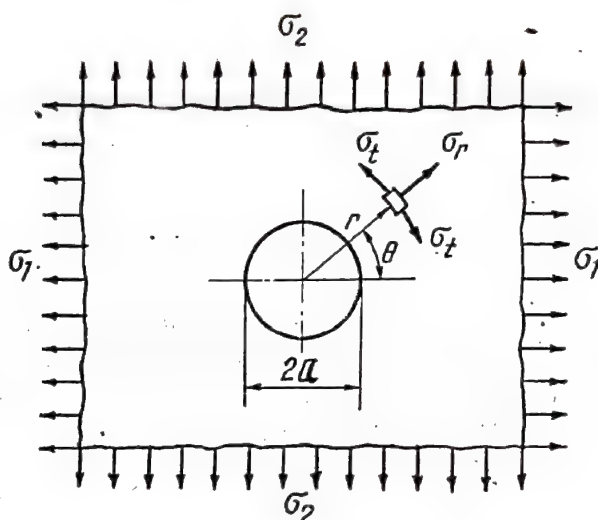


Fig. 8.6

care rezultă din relațiile (8.6 a) unde $k = \frac{r}{a} = \infty$.

În urma practicării găurii, în punctul situat la distanța r de centrul acesteia, au loc variații de tensiuni obținute prin scăderea relațiilor (8.6b) din relațiile (8.6 a).

$$\Delta \sigma_r = \sigma_r - \sigma_r' = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(-4 \frac{1}{k^2} + 3 \frac{1}{k^4} \right) \cos 2\theta \quad (8.7)$$

$$\Delta \sigma_t = \sigma_t - \sigma_t' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{1}{k^2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 3 \frac{1}{k^4} \cos 2\theta.$$

Acesteor variații de tensiuni le corespund, în punctul respectiv, deformațiile specifice

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_r - \mu \Delta \sigma_t) \quad (8.8)$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} (\Delta \sigma_t - \mu \Delta \sigma_r)$$

În realitate, nu pot fi măsurate alungirile corespunzătoare unui punct, ci utilizând traductoare rezistive cu baza $l_0 = r_2 - r_1$, acestea măsoară, pe direcția radială θ , o alungire medie a cărei valoare este dată de relația [25]

$$\varepsilon_\theta = A \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} + B \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E} \cos 2\theta \quad (8.9)$$

unde :

$$A = -\frac{a^2}{2} \frac{1 + \mu}{r_1 r_2}$$

$$B = \frac{2a^2}{r_1 r_2} \left[-1 + \frac{1 + \mu}{4} a^2 \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \right]. \quad (8.10)$$

Practic, pentru determinarea lui σ_1 și σ_2 , se utilizează următoarele metode :

a) *Utilizarea rozetelor cu traductoare rezistive.* În relația (8.9) σ_1 , σ_2 și θ sînt necunoscute. Pentru a le putea determina sînt necesare trei ecuații. Acestea se obțin dacă se măsoară alungirile după trei direcții radiale. Se utilizează, în acest scop, o rozetă tensometrică formată din trei traduc-

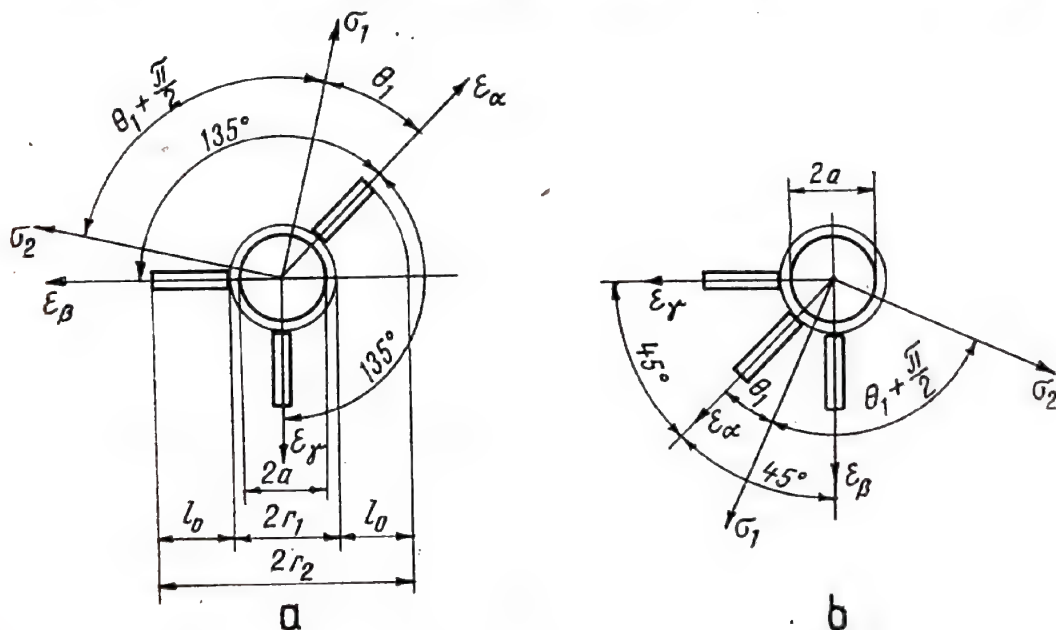


Fig. 8.7

toare rezistive, special construită pentru măsurarea tensiunilor remanente (v. fig. 8.7).

Rozeta se lipește, în locul unde se face măsurarea, și apoi se execută în piesă, — în centrul rozetei — o gaură de diametrul $2a$ și — după ce puntea a fost echilibrată, pe rînd, pentru fiecare traductor ce alcătuiește rozeta — se măsoară alungirile ε_α , ε_β , și ε_γ corespunzătoare (fig. 8.7, a).

Dacă se ia ca origine pentru unghiuri traductorul α , cele trei alungiri, conform relației (8.9), sînt

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{A}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta_1 \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{A}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \varepsilon_{\gamma} &= \frac{A}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{B}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\left(\theta_1 - \frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}\quad (8.11)$$

Rezolvînd acest sistem, în funcție de necunoscutele σ_1 , σ_2 și θ_1 se obțin tensiunile remanente principale și direcțiile lor

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{4A}(\varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\gamma}) + \frac{E}{4B} \sqrt{(2\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})^2 + (\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})^2} \\ \sigma_2 &= \frac{E}{4A}(\varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\gamma}) - \frac{E}{4B} \sqrt{(2\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})^2 + (\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})^2}\end{aligned}\quad (8.12)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\beta}}{2\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma}}. \quad (8.13)$$

Unghiul θ_1 dintre direcția traductorului ε_{α} și tensiunea principală σ_1 se măsoară în sens trigonometric de la direcția ε_{α} .

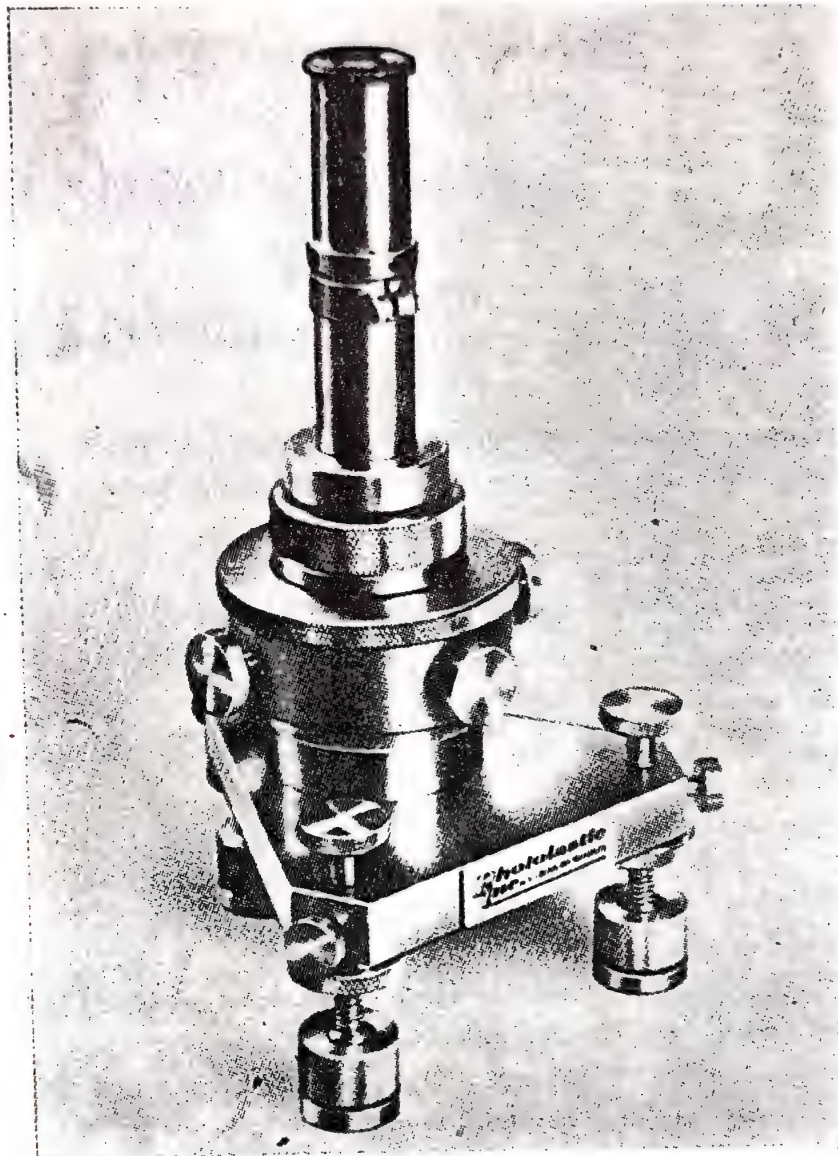
Dacă se utilizează rozeta dreptunghiulară din fig. 8.7, b relațiile (8.12) rămîn valabile, iar relația (8.13) are semnul schimbat.

Se menționează că la stabilirea relațiilor de mai sus nu a fost luată în considerare sensibilitatea transversală. După calculele făcute de Boiten și Ten Cate [5], în cazul cînd se utilizează rozeta Δ din fig. 8.7a avînd baza traductoarelor $l_0 = 4$ mm și $r_1 = 2,5$ mm iar diametrul găurii $2a = 2$ mm, eroarea ce se face, din această cauză, este de maximum 10%.

În general, se recomandă ca distanța de la cel mai apropiat punct al traductoarelor față de gaură să fie inferioară diametrului găurii, iar acesta să fie cel mult, $\frac{l_0}{2}$ (deci $a \leq \frac{l_0}{4}$).

În fig. 8.8, este dată fotografia dispozitivului confecționat de firma Photolastie utilizat pentru poziționarea corectă a găurii și efectuarea operației de găurire, iar în fig. 8.8, b se dau trei secvențe din timpul efectuării acestor operații [70] și anume:

1) operația de centrare, cu ajutorul unui microscop, a dispozitivului pe centrul rozetei;



a)



b)

Fig. 8.8

2) după scoaterea microscopului din dispozitivul de ghidaj, în acesta se introduce o freză pentru efectuarea operației de găurire și

3) practicarea găurii în axul rozetei.

b) *Utilizarea lacurilor casante.* În locul rozetei cu traductoare rezistive, pentru măsurarea tensiunilor remanente, eliberate prin perforare, pot fi utilizate lacurile casante (v. cap. 7). Cu toate că această metodă, de regulă, este utilizată pentru obținerea unor informații calitative, ea poate fi utilizată și pentru obținerea de informații cantitative cu privire la mărimea și distribuția tensiunilor [27].

Dacă se admite ipoteza lui Durelli [16], că fisurarea lacului are loc dacă piesa, ce face obiectul cercetării, este supusă unei tensiuni de întindere superioară limitei de curgere σ_c , raza zonei de fisurare este

$$R_c = a \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_c}} \quad (8.14)$$

Tensiunea remanentă σ_0 este deci, proporțională cu pătratul lungimii fisurii, iar cîmpul de fisuri se prezintă ca în fig. 8.9.

Dacă tensiunea remanentă este o compresiune hidrostatică, se aplică același raționament. În acest caz rezistența de rupere σ_r și respectiv

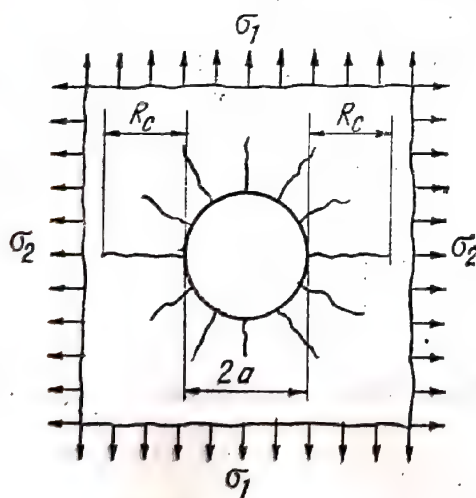


Fig. 8.9

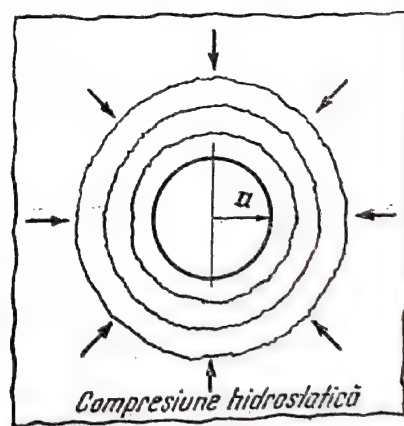


Fig. 8.10

deformația specifică ε , condiționează fisurarea lacului, iar zona fisurată este formată din cercuri concentrice (fig. 8.10).

Se consideră cazul solicitării de întindere monoaxială $\sigma_1 = \sigma_0$ și $\sigma_2 = 0$ (fig. 8.11). Tensiunile după direcția razei și a tangentei, exprimate

în coordonate polare, înainte de perforare sînt

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_0}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \tau_t &= -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{8.15}$$

După perforarea piesei, acestea devin (vezi relațiile (8.6 a)).

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_t &= -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{8.16 a}$$

Făcînd diferența între cele două stări de tensiune, se obține

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left[-1 + \left(-4 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left[1 - \frac{3a^2}{r^2} \cos 2\theta \right] \\ \tau_t &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(-2 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{8.16 b}$$

Direcțiile principale corespunzătoare unui punct de coordonate r și θ , sînt date de relația

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + \frac{1}{2 - \frac{3a^2}{r^2}}}\tag{8.17}$$

În fig. 8.11 este indicată direcția fisurilor. Cele mai lungi fisuri corespund pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, fiind perpendiculare pe direcția sollicitării.

După această direcție tensiunile principale au valorile

a) Dacă $\frac{r}{a} \leq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{3\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad (8.18 \text{ a})$$

b) Dacă $\frac{r}{a} > \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{3\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad (8.19 \text{ b})$$

Dacă tensiunea remanentă este o compresiune monoaxială (fig. 8.12), fisurile sînt concentrice, cea mai depărtată fisură de centrul găurii fiind după direcția $\theta = 0$, paralelă cu direcția tensiunii remanente.

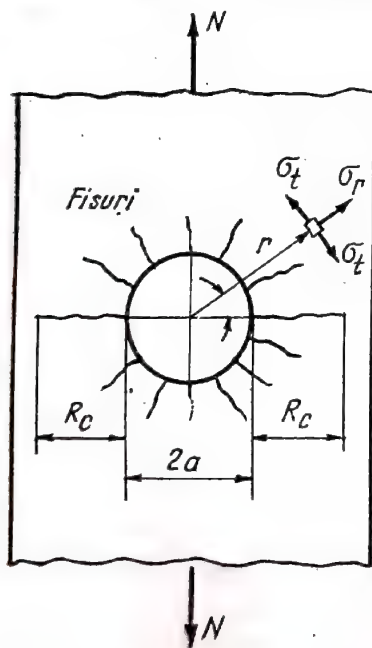


Fig. 8.11

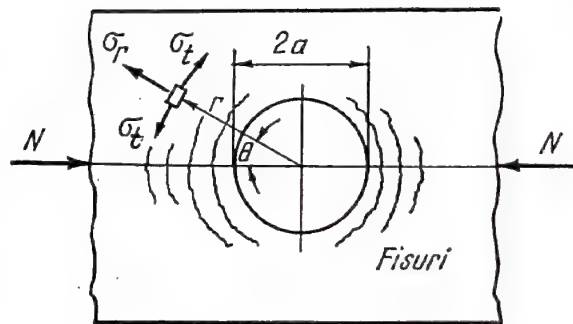


Fig. 8.12

Tensiunile principale după această axă au valorile

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(-5 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right).\end{aligned}\quad (8.19 \text{ b})$$

În fig. 8.13 se prezintă câmpul de fisuri în cazul stării de tensiune biaxiale și anume :

În fig. 8.13, a pentru cazul unei plăci solicitate la întinderea biaxială cu $\sigma_1 > \sigma_2$.

În fig. 8.13, b, idem compresiune biaxială $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ și

În fig. 8.13, c idem, dacă solicitările la întindere și compresiune sînt egale.

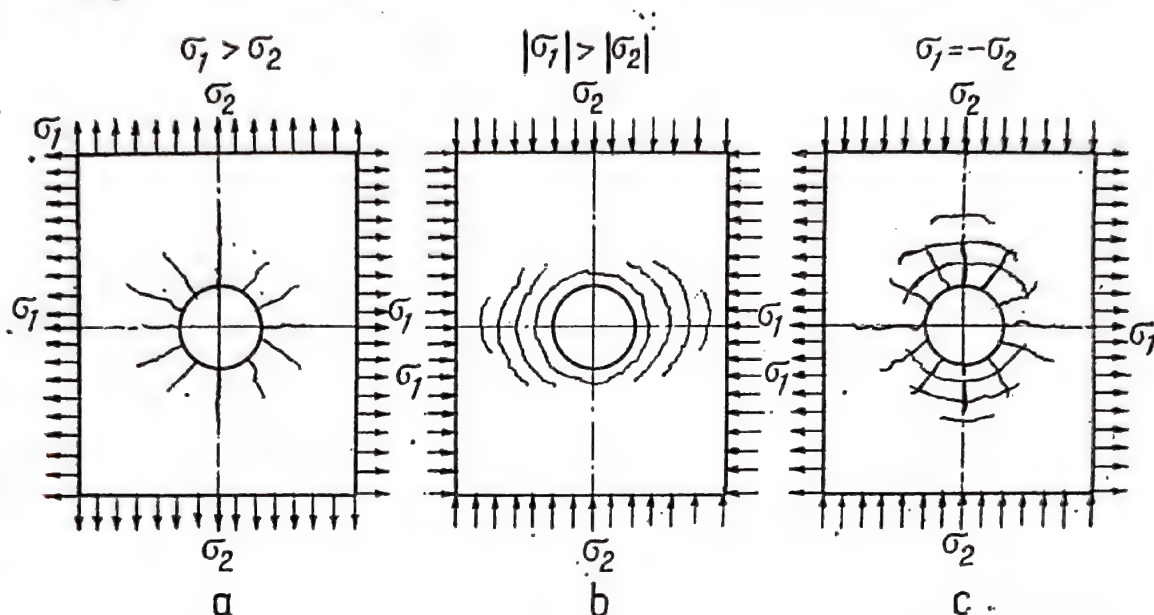


Fig. 8.13

Firma MAGNAFLUX recomandă următoarele etape în cazul utilizării lacurilor casante la determinarea tensiunilor remanente.

1°. Se acoperă suprafața piesei de cercetat cu un strat de lac, a cărui prag la deformare este $0,2 \cdot 10^{-3}$ până la $0,6 \cdot 10^{-3}$. Pentru a preveni fisurarea lacului în timpul uscării, uscarea se face la o temperatură superioară, cu $5-10^\circ\text{C}$, temperaturii camerei. După uscare se aduce piesa la temperatura camerei și se sensibilizează o zonă mică a suprafeței piesei cu CO_2 sau cu apă rece. Dacă zona fisurează se pot începe determinările (fisurarea este esențială pentru obținerea rezultatelor cantitative).

2°. Se practică, în zona unde urmează a fi determinate tensiunile remanente, o gaură cu diametrul cuprins între 1 și 3 mm. Adâncimea găurii este egală cu diametrul acesteia. Pentru a preveni încălzirea materialului de bază este indicat ca gaura să fie practică cu o mașină de găurit manuală.

3°. După găurire, imediat, se sensibilizează cu CO_2 sau cu apă rece, zona din jurul găurii, până începe să apară fisuri.

4°. Tensiunile remanente de întindere produc câmpuri de fisuri radiale (fig. 8.11) în timp ce tensiunile de compresiune produc fisuri circulare (fig. 8.12). Valorile deformațiilor specifice produse de tensiunile eliberate pot fi estimate prin măsurarea dimensiunii câmpului de fisuri, începînd de la marginea găurii; unitatea de măsură fiind diametrul găurii. Astfel în cazul lacurilor „Stresscoat” (v. cap. 7), se consideră că o fisură a cărei lungime este egală cu diametrul găurii corespunde la o

deformație specifică de $700 \frac{\mu\text{cm}}{\text{cm}}$ ($0,7 \cdot 10^{-3}$). Dacă, de exemplu, în cazul unei găuri cu diametrul de 3 mm, câmpul de fisuri se întinde pînă la 6 mm de la marginea găurii, deformația specifică remanentă este de $1400 \frac{\mu\text{cm}}{\text{cm}}$ ($1,4 \cdot 10^{-3}$). Această corespunde, în cazul oțelurilor, la o tensiune reziduală de $2940 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$ (conșiderînd că limita de elasticitate a oțelului nu este depășită.)

c) *Utilizarea lacurilor fotoelastice.* Pentru determinarea tensiunilor remanente principale σ_1 și σ_2 , într-un punct situat pe suprafața unei structuri, zona din vecinătatea punctului considerat se acoperă cu un strat de lac fotoelastic. Dacă suprafața este plană, se poate utiliza o folie fotoelastică reflectorizantă lipită pe structură cu un adeziv. În cazul suprafețelor curbe folia fotoelastică se mulează sub forma unui înveliș care se fixează pe structură cu adeziv reflectorizant. În punctul în care urmează să se determine tensiunile principale se execută o gaură cu diametrul de 1,5–3,0 mm, care trebuie să străbată stratul de lac și să pătrundă în structură pe o adîncime egală cu diametrul găurii.

Prin găurire tensiunile remanente de la suprafața structurilor se redistribuie, astfel că efectul fotoelastic observat va fi proporțional cu modificarea stării de tensiune în punctul din zona studiată. După găurire, în jurul găurii se formează un câmp simetric de franje fotoelastice. Axele de simetrie ale câmpului fotoelastic vor da direcțiile tensiunilor principale. Astfel: axa pe care se înregistrează valoarea cea mai mică a ordinului de bandă pe conturul găurii va da direcția tensiunii principale σ_1 (fig. 8.14). Valoarea maximă a ordinului de bandă determinat pe această axă va da tensiunea principală σ_2 . Axa pe care se înregistrează valoarea cea mai mare a ordinului de bandă va coincide cu direcția tensiunii principale σ_2 , iar ordinul de bandă maxim de pe această axă, va da valoarea tensiunii principale σ_1 .

De multe ori, gradientul tensiunilor este foarte ridicat pe conturul găurii și ordinul de bandă nu poate fi determinat cu precizie.

Pe de altă parte conturul găurii făcute în învelișul fotoelastic este, în majoritatea cazurilor, neregulat, datorită așchiilor care se desprind prin găurire, astfel că evaluarea ordinului de bandă pe conturul găurii, de multe ori, se face cu precizie foarte scăzută. Din aceste motive este recomandabil ca determinarea ordinului de bandă să se facă într-un punct situat pe un cerc distanțat de contur. N. Nishida (45) propune ca tensiunile să fie determinate în puncte situate pe un cerc (fig. 8.14) cu raza $r = \sqrt{3}a$. În

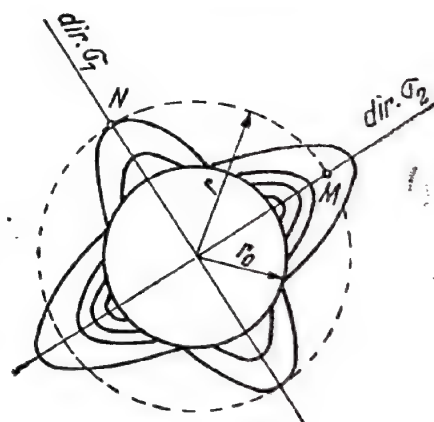


Fig. 8.14

acest caz tensiunile principale σ_1 și σ_2 vor fi calculate în cele două puncte M și N cu următoarele relații

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \frac{k_M \cdot f \cdot E}{1 + \mu} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = \frac{3}{2} \frac{k_N \cdot f \cdot E}{1 + \mu} \quad (8.20)$$

unde k_M și k_N reprezintă ordinele de bandă determinate pe cele două direcții (σ_1 și σ_2), la distanța $r = \sqrt{3}a$ (a fiind raza găurii și f constanta de bandă a lacului fotoelastic).

8.2.4. METODA GĂURIRII INELARE

Determinarea tensiunilor remanente prin metoda găuririi inelare se bazează, ca și metoda găuririi, prezentată mai sus, pe măsurarea deformațiilor ce se produc datorită modificării stării de tensiune din piesa studiată. Măsurarea deformațiilor se face, de regulă, cu ajutorul traductoarelor rezistive aplicate în punctele în care se urmărește cunoașterea tensiunilor remanente.

Anularea stării de tensiune din zona unui traductor rezistiv, în vederea măsurării deformației corespunzătoare, se face practicînd o gaură inelară în jurul acestuia, care conduce la eliberarea materialului, din dreptul traductorului, de legătură cu materialul înconjurător și, deci, la descărcarea lui de tensiunile corespunzătoare acestei legături. Gaura inelară trebuie să fie atît de adîncă încît starea de tensiune din piesă să nu mai influențeze materialul din interiorul găurii inelare unde este plasat traductorul sau rozeta de traductoare.

Dacă tensiunile sînt uniform distribuite pe grosimea piesei, metoda permite determinarea valorii efective a tensiunilor. În cazurile cînd tensiunile nu sînt uniform distribuite pe grosimea piesei, metoda permite determinarea tensiunilor existente la nivelul suprafeței care, de obicei, au cea mai mare valoare.

Dacă traductorul rezistiv, sau rozeta de traductoare, se aplică pe o piesă nesolicitată, prin efectuarea găurii inelare se determină tensiunile remanente existente înainte de efectuarea găurii.

Dacă traductorul, sau rozeta de traductoare, se aplică pe o piesă supusă unei anumite stări de solicitare măsurările, cu această metodă, indică suma algebrică a tensiunilor produse de solicitarea respectivă și a tensiunilor remanente.

Pe măsura creșterii adîncimii găurii materialul de la suprafața piesei se descarcă de efort. Adîncimea la care efectul stării de tensiune de la baza cilindrului format prin efectuarea găurii inelare nu se mai resimte asupra traductorului, sau rozetei de traductoare, s-a determinat, de autor, prin măsurări efectuate pe două tipuri de epruvete : o grindă simplu rezemată cu secțiune dreptunghiulară, solicitată la încovoiere pură și o bară comprimată centric.

* Metoda este dezvoltată în cuprinsul tezei de doctorat elaborată de dr. ing. Gădeanu Liviu de la Institutul politehnic din Timișoara (conducător științific ; acad. prof. Dan Mateescu).

Grinda simplu rezemată, avînd secțiunea transversală dreptunghiulară, a fost solicitată la încovoiere pură într-o mașină universală de încercări mecanice (fig. 8.15).

Găurirea inelară a fost realizată în trepte, de cîte un milimetru adîncime, cu o mașină de găurit cu burghiu inelar. Rezultatele măsurărilor

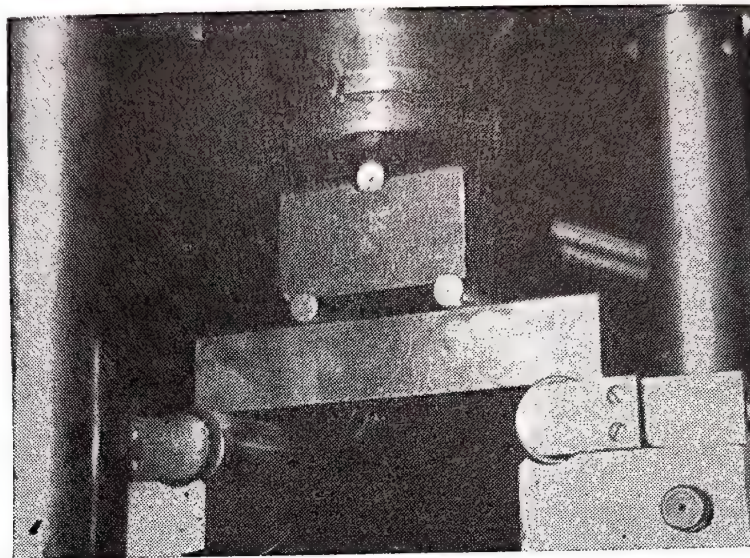


Fig. 8.15

sînt date în fig. 8.16. Ele indică o relaxare completă a materialului la o adîncime h a găuririi inelare de 6 mm, corespunzătoare jumătății diametrului mediu al găurii inelare ($D = 12$ mm.).

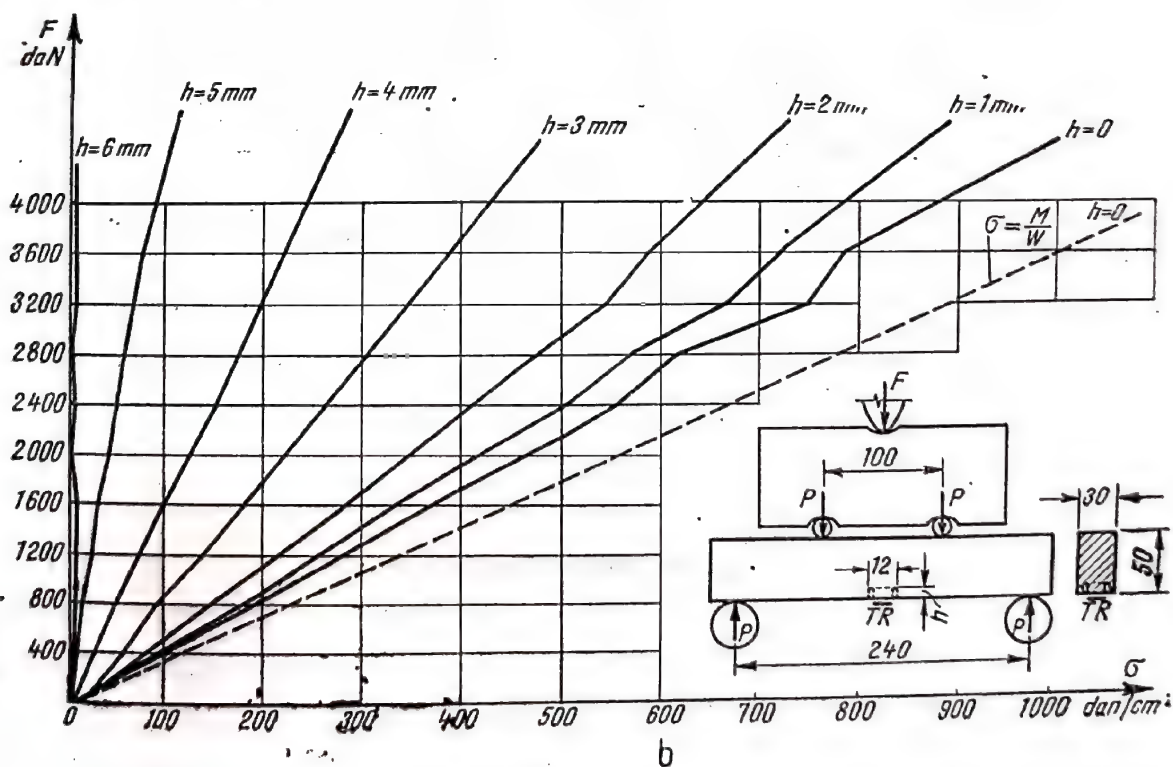


Fig. 8.16

Bara comprimată centric a fost solicitată într-un dispozitiv special, de forma unui jug (fig. 8.17), care a permis menținerea constantă a solicitării în timpul operației de găurire și măsurarea deformațiilor după fiecare treaptă de 1 mm adâncime. Rezultatele măsurărilor sînt date în (fig. 8.18).

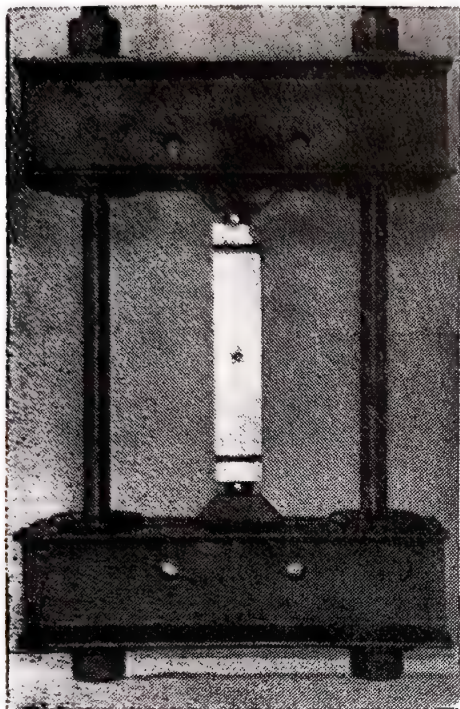


Fig. 8.17

Din analiza rezultatelor se observă că tensiunile introduse inițial în bară, prin strîngerea piulițelor șuruburilor laterale, în zona încercuită prin găurire, dispar la o adâncime h a găurii de cca. 5 mm. La descărcarea barei (desfacerea piulițelor), s-a constatat că traductoarele rezistive indică reapariția unor tensiuni de compresiune de cca 100–200 daN/cm². Acest fenomen conduce la concluzia că în cazul existenței unor tensiuni mari la baza găurii, pentru măsurări exacte, adâncimea acesteia trebuie să fie de ordinul a 0,65 D.

Aplicație. Cu metoda prezentată mai sus, autorul a efectuat măsurări pe eșantioane reprezentînd legătura prin sudare dintre etajele componente ale unui grinzii cu inimă plină de mari dimensiuni. Datorită unor abateri de execuție care au provocat denivelări ale tălpilor celor două etaje, între fețele acestora, au rămas spații libere cu valori cuprinse între 0 și 12 mm. Sudurile dintre cele două tălpi ale etajelor au fost executate după ce în spațiile libere au fost introduse pene metalice (fig. 8.19).

Prin măsurările efectuate s-a urmărit determinarea tensiunilor remanente în lungul cusăturii (fața A) și după direcția catetei cusăturii de sudură (fața B). Rezultatele măsurărilor, pentru cele 10 traductoare, efectuate pe eșantionul cu distanța între fețele tălpilor $d = 0$ mm., sînt date, în funcție de adâncimea găurii, în fig. 8.20, a. În fig. 8.20, b este dată variația tensiunilor remanente în lungul cusăturilor de sudură ale aceluiași eșantion.

Pentru efectuarea măsurărilor pe diferite elemente ale unei construcții metalice, autorul metodei a realizat o instalație mobilă care permite efectuarea găuririi pentru orice poziție a elementului (fig. 8.21). Instalația este compusă dintr-o mașină de găurit cu un burghiu inelar și un dispozitiv de fixare a acesteia pe construcție. Este în curs de realizare o instalație, mai perfecționată, la care prinderea acesteia de construcție se face pe cale electromagnetică, iar în cablul de legătură al traductorului trece prin axul burghiului, astfel încît, variația tensiunii în traductor poate fi urmărită continuu în funcție de adâncimea găurii inelare h .

8.2.5. METODA DECUPĂRII

Tensiunile remanente din plăcile groase, datorite prelucrărilor la cald (laminare sau sudare), pot fi puse în evidență detașînd din placă, — prin tăiere cu flacăra oxiacetilenică sau cu ferăstrăul — un element ABCD avînd laturile de ordinul a cîțiva centimetri. Elementul detașat

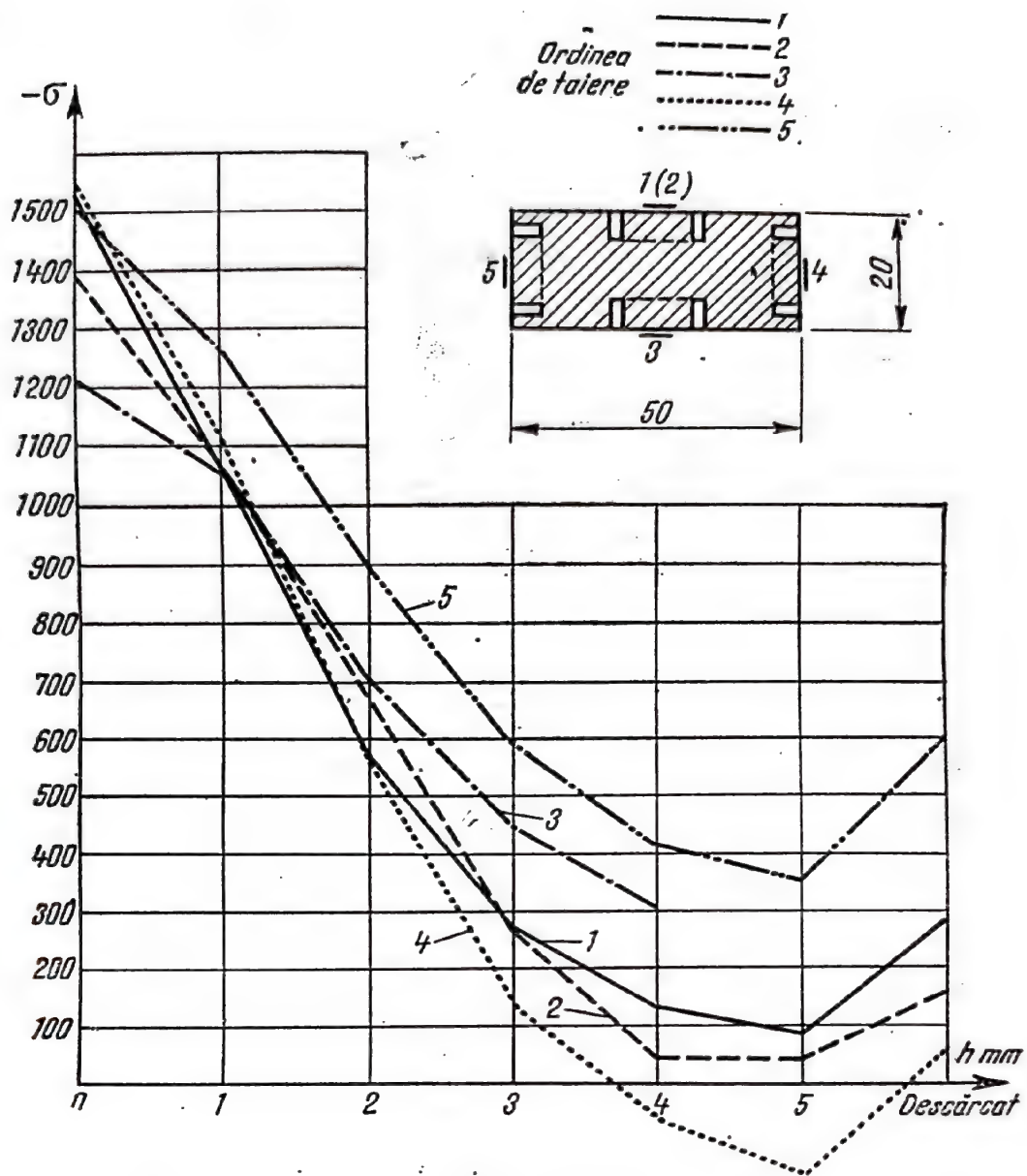


Fig. 8.18

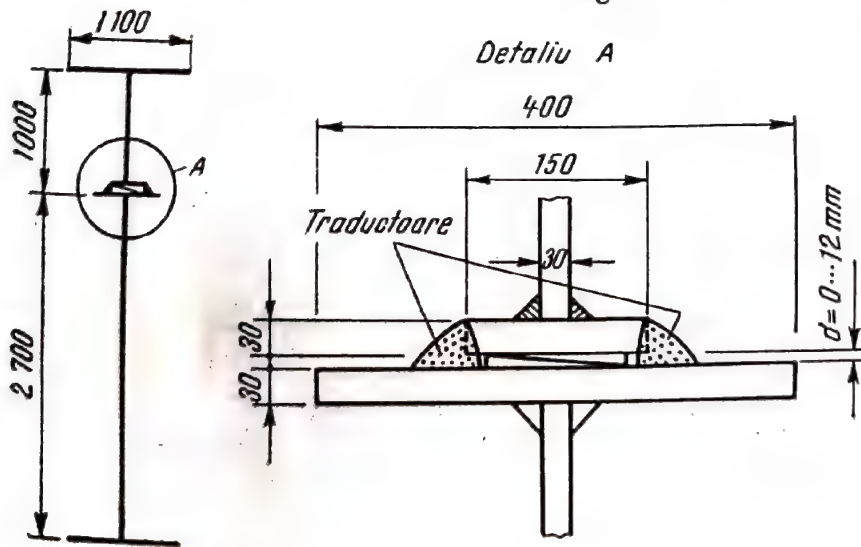


Fig. 8.19

este eliberat de tensiunile remanente exercitate asupra sa de către restul plăcii.

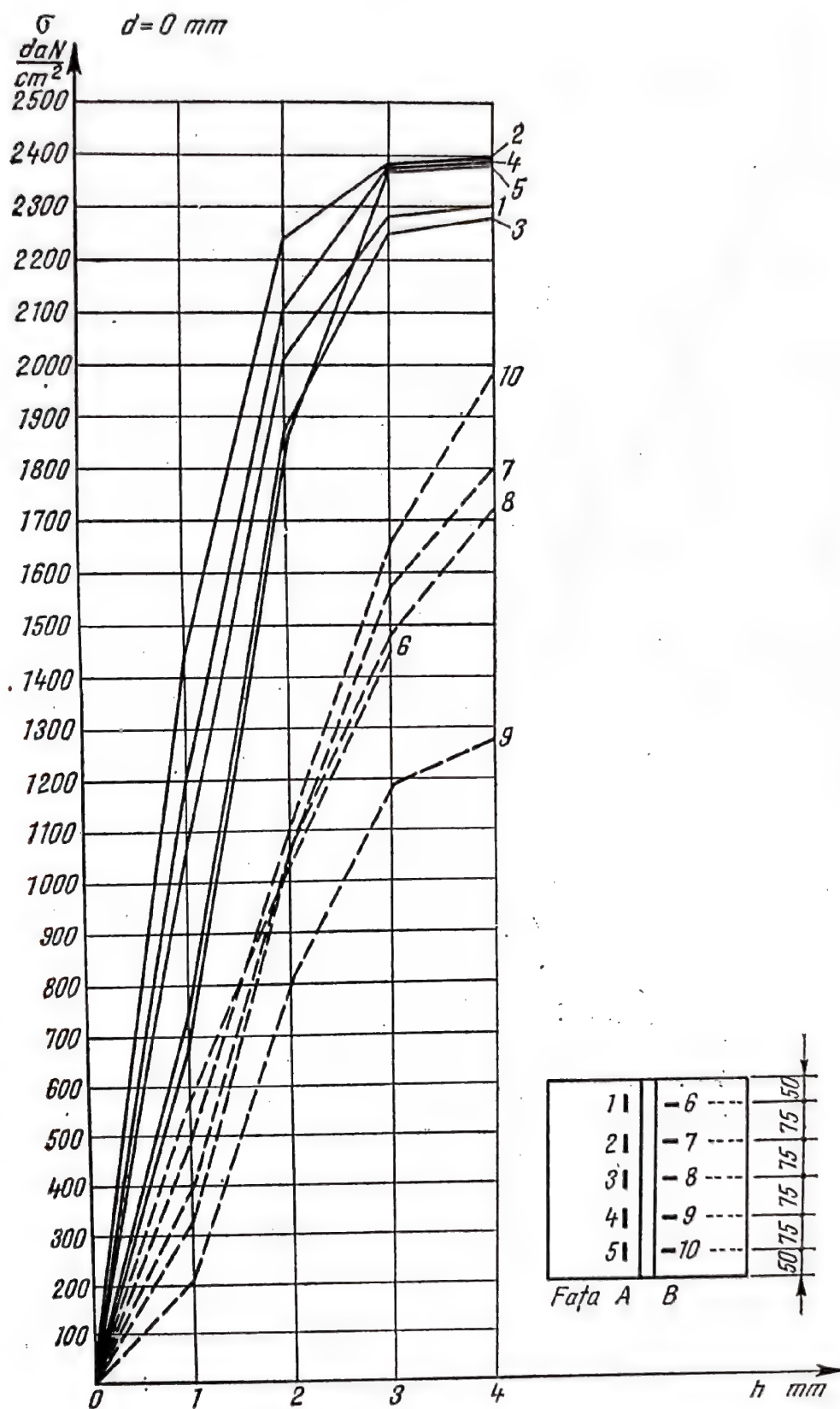


Fig. 8.20 a

Înainte de decupare, pe elementul $ABCD$ (fig. 8.22) se fixează reperele 1, 2, 3 și 4 între care se măsoară distanțele l_{12} , l_{13} și l_{14} de regulă cu ajutorul unui extensometru mecanic. Măsurînd, după tăiere, aceleași

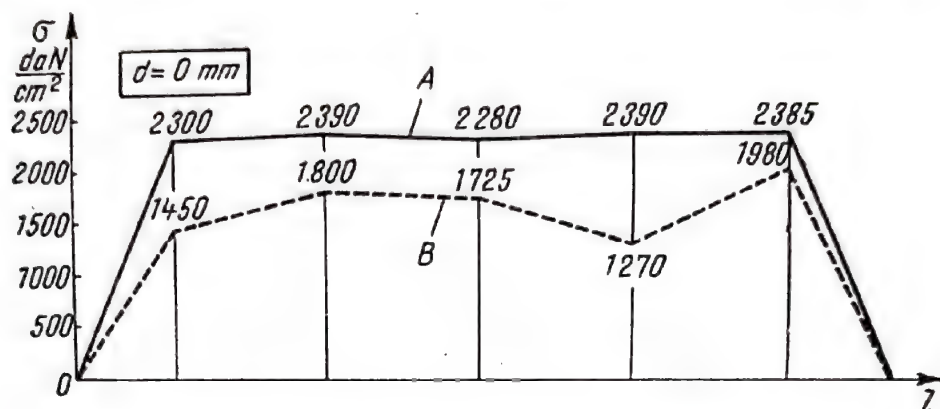


Fig. 8.20 b

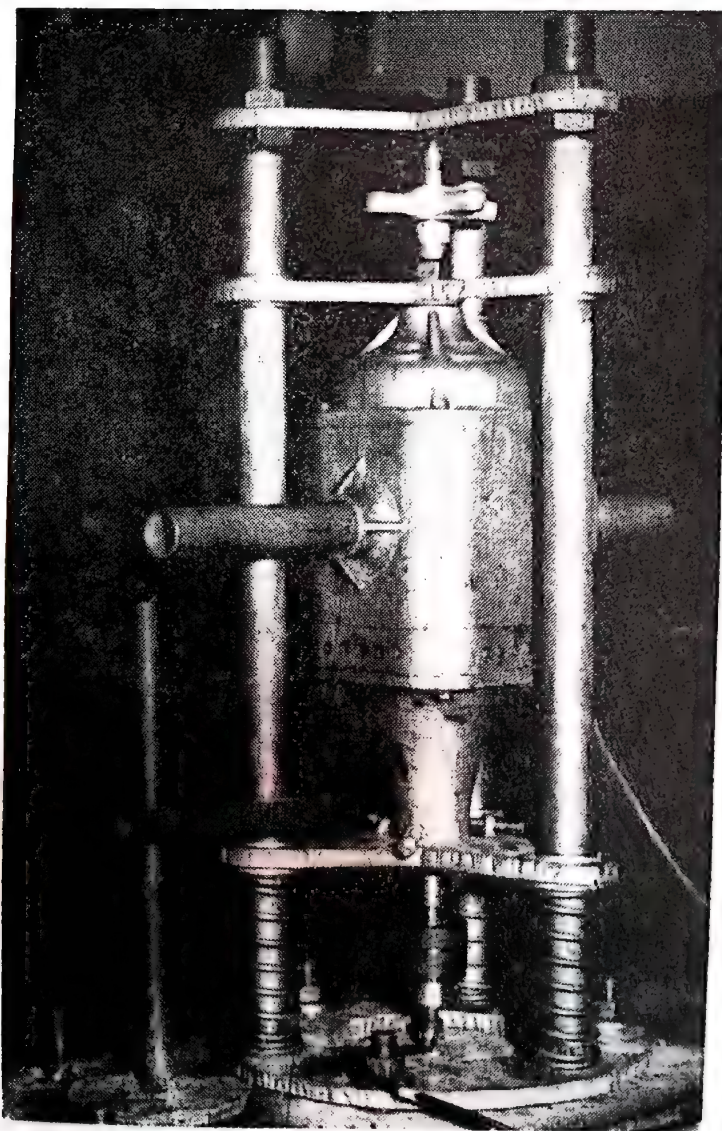


Fig. 8.21

distanțe, se constată că ele au variat cu Δl_{1-2} , Δl_{1-3} și Δl_{1-4} datorită tensiunilor remanente eliberate. Sînt cunoscute, deci, deformațiile specifice după direcțiile respective — datorite acestor tensiuni

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{\Delta l_{1-2}}{l_{1-2}}, \quad \varepsilon_{1-3} = \frac{l_{1-3}}{l_{1-3}} \quad \text{și} \quad \varepsilon_{1-4} = \frac{\Delta l_{1-4}}{l_{1-4}}. \quad (8.21)$$

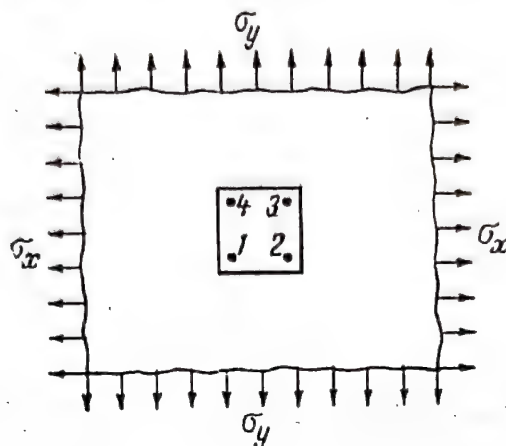


Fig. 8.22

Cu ajutorul relațiilor din tabelul 1.5 corespunzătoare rozetei dreptunghiulare, se calculează valorile tensiunilor remanente eliberate prin detașarea elementului considerat.

Măsurătorile se fac cu ajutorul unui extensometru de construcție specială care pentru marcarea punctelor 1, 2, 3 și 4 folosește bile de oțel, aplicate pe placă ca în fig. 2.19, cu diametrul de 1,5 mm (v. § 2.7).

8.2.6. METODA RABOTĂRII

În cazul profilelor cu secțiune T sau I, pentru măsurarea tensiunilor remanente orientate, provenite din laminare sau din sudare (cînd acestea sînt alcătuite din elemente îmbinate prin sudare), se folosește frecvent metoda îndepărtării succesive a straturilor prin rabotare.

Ca exemplu se consideră un profil laminat cu secțiune din fig. 8.23, a. Se îndepărtează prin rabotare un strat, de pe talpa grinzii, cu secțiunea a_1 și grosimea constantă în care se presupune că acționează tensiunea remanentă σ_1 .

Dacă σ_1 este o tensiune de întindere, îndepărtarea stratului a_1 este echivalentă cu adăogirea la partea rămasă de secțiune a unei forțe de întindere

$$N_1 = a_1 \sigma_1 \quad (8.22)$$

și a unui moment încovoetor

$$M_1 = a_1 \sigma_1 e_1 \quad (8.23)$$

*) Metoda a fost introdusă ca lucrare de laborator cu studenții, la catedra de utilaj și tehnica sudării de la Institutul Politehnic Timișoara.

care provoacă curbarea grinzii cu săgeata v_1

$$v_1 = \frac{M_1 l^2}{8EI_1} \quad (8.24)$$

unde l este lungimea grinzii iar produsul EI , este rigiditatea acesteia (după îndepărtarea stratului a_1).

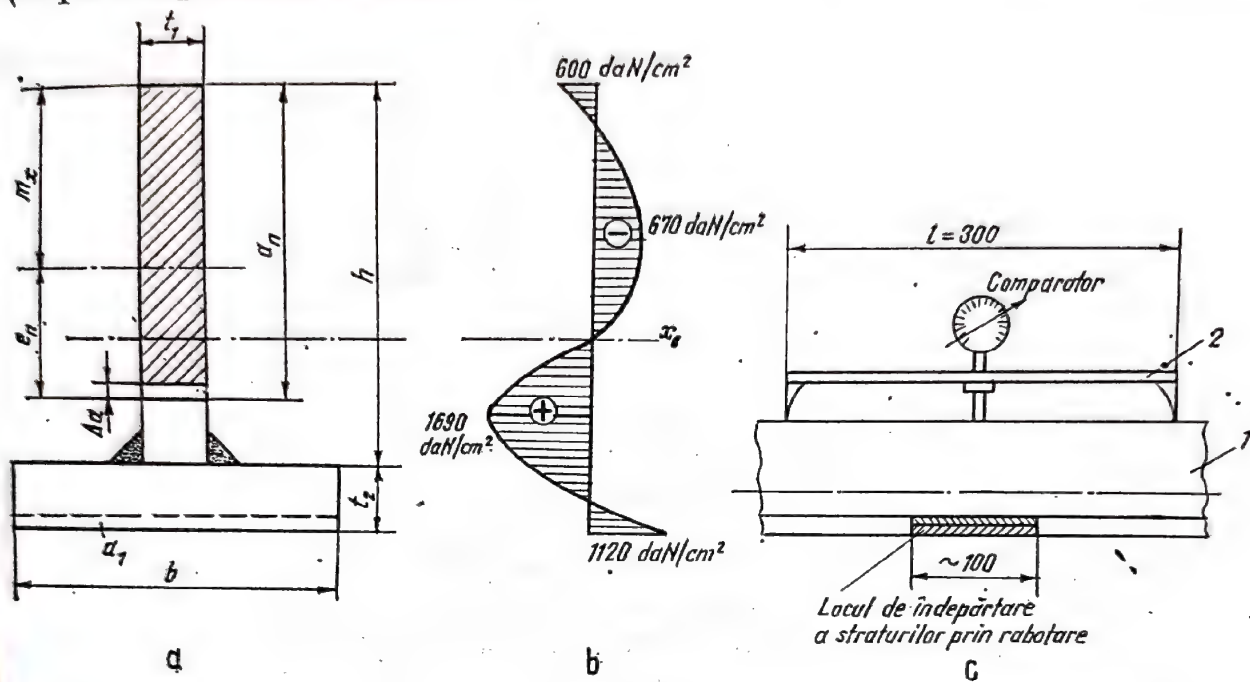


Fig. 8.23

Din relațiile de mai sus rezultă tensiunea remanentă din stratul îndepărtat, cu secțiunea a_1

$$\sigma_1 = \frac{8EI_1 v_1}{a_1 e_1 l} \quad (8.25)$$

Îndepărtarea stratului a_1 va produce, în secțiunea rămasă A_1 a profilului, apariția unei tensiuni datorite forței N_1

$$\sigma_{N_1} = \frac{\sigma_1 a_1 e_1}{I_1} y_1 = \frac{8E v_1}{l^2} y_1 \quad (8.26)$$

și alta datorită momentului încovoietor M_1

$$\sigma_{M_1} = \frac{\sigma_1 a_1 e_1}{I_1} y_1 = \frac{8E v_1}{l^2} y_1 \quad (8.27)$$

unde: y_1 este distanța dintre centrul de greutate al secțiunii profilului și linia de rabotare considerată; A_1 — secțiunea rămasă a profilului după îndepărtarea stratului a_1 .

I_1 — momentul de inerție al secțiunii profilului, rămasă după îndepărtarea stratului de secțiune a_1 , în raport cu axa neutră.

Pentru cazul general, dacă se notează cu :

σ_n tensiunea remanentă în stratul a_n al profilului T care nu a fost supus rabotării;

σ_x — tensiunea remanentă, în același strat după ce au fost eliminate straturile subadiacente; tensiunea remanentă în stratul a_n va fi

$$\sigma_n = \sigma_x - \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} \sigma_N - \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} \sigma_M. \quad (8.28)$$

Substituind valorile lui σ_N și σ_M cu cele date de relațiile (8.26) și (8.27) și ținând seama că $\sigma_x = \frac{8v_n EI_n}{a_n e_n l^2}$ relația (8.28) devine

$$\sigma_n = \frac{8v_n EI_n}{a_n e_n l^2} - \frac{8E}{l^2} \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} \frac{v_x I_x}{e_x A_x} - \frac{8E}{l^2} \sum_{x=h}^{x=a_n+\Delta a} v_x (a_n - m_x) \quad (8.29)$$

unde :

v_n este curbura (săgeata) elementului cu secțiune hașurată datorită îndepărtării stratului de secțiune a_n ;

e_n — distanța de la stratul a_n pînă la linia centrelor de greutate a părții hașurate rămase;

I_n — momentul de inerție al secțiunii rămase (hașurată), față de axa x_0 ce trece prin centrul de greutate;

v_x — curbura (săgeata) provocată de îndepărtarea stratului x cu suprafața a_x .

A_x — suprafața părții rămase din secțiune după îndepărtarea unui număr de x straturi;

l — lungimea elementului;

e_x — distanța de la stratul îndepărtat x pînă la centrul de greutate a părții rămase din secțiune.

m_x — distanța de la marginea superioară a secțiunii pînă la centrul de greutate al părții rămase (axa x_0).

a_n — distanța de la marginea superioară a profilului T pînă la stratul n .

Măsurînd curbura (săgeata) produsă după îndepărtarea fiecărui strat se pot estima tensiunile remanente introduse de operația de sudare.

În fig. 8.23, b se dă diagrama tensiunilor remanente în cazul unei grinzi realizată prin sudare, avînd următoarele dimensiuni : $h = 110$ mm ; $b = 60$ mm ; $t_1 = t_2 = 10$ mm ; și $l = 300$ mm.

Ordinea operațiilor a fost următoarea :

1°. S-a pregătit o grindă sub forma unui profil T, din două platbande care s-au sudat electric manual (fig. 8.23, a).

2°. S-a reperat suprafața de referință și locul de plasare al cuțitelor dispozitivului pentru a evita eventualele erori la plasarea ulterioară a dispozitivului pe grindă.

3°. Înlăturînd dispozitivul, prin rabotare s-a îndepărtat un strat de grosime 3 mm, din partea centrală a feței inferioare a tălpii profilului.

4°. S-a montat dispozitivul de măsurare pe grindă (pe vechile locuri de pe inima grinzii) și s-a determinat săgeata v_1 (fig. 8.23, c), produsă prin

îndepărtarea stratului respectiv : valoarea săgeții se obține prin scăderea din indicația comparatorului a valorii de 3 mm (grosimea stratului îndepărtat).

5°. Cu ajutorul relației (8.25) s-a determinat valoarea tensiunii remanente în stratul îndepărtat.

6°. Se repetă operațiile de la punctele 3 și 4.

7°. Cu ajutorul relației (8.29) s-a determinat tensiunea remanentă în cel de al doilea strat.

8°. Se repetă operațiile de la 3, 4 și 7 pentru un număr suficient de straturi.

9°. Cu valorile tensiunilor remanente, astfel aflate, s-a trasat epura tensiunilor remanente, în secțiunea profilului T, din fig. 8.23, b.

8.3. METODE DISTRUCTIVE ȘI SEMIDISTRUCTIVE UTILIZATE ÎN CAZUL ÎMBINĂRILOR SUDATE

În cazul construcțiilor sudate tensiunile remanente apar, în principal, din cauza deformațiilor termoplastice ce au loc în perioada de răcire a pieselor ce se sudează. În funcție de forma și mărimea pieselor tensiunile remanente din construcțiile sudate pot fi : monoaxiale, biaxiale și triaxiale. De regulă tensiunile remanente din îmbinările sudate sînt triaxiale, dar dacă după una sau două din direcții tensiunile au valori mici se consideră, convențional, că este vorba de o stare mono sau biaxială de tensiuni.

Cunoscîndu-se influența pe care o au tensiunile remanente asupra rezistenței și a fiabilității construcțiilor sudate, mai ales cînd acestea sînt supuse la solicitări variabile, s-au dezvoltat — paralel cu extinderea construcțiilor sudate — o serie de metode experimentale pentru evaluarea acestora. Dintre metodele distructive se prezintă :

8.3.1. METODA ROSENTHAL ȘI NORTON

Metoda constă în tăierea din piesă a unui element (epruvetă) în formă de paralelipiped dreptunghic, la care se măsoară deformația rezultată prin tăiere.

Epruveta 1 din fig. 8.24 (cazul unei plăci sudate cap la cap) servește la măsurarea deformațiilor longitudinale. Pentru măsurarea deformațiilor

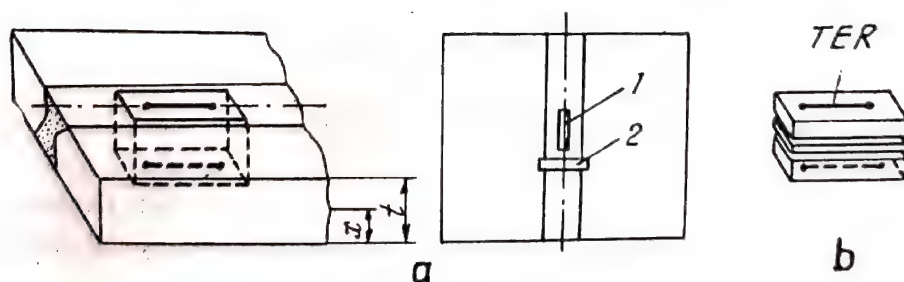


Fig. 8.24.

transversale este necesar să se taie o a doua epruvetă 2, asemănătoare cu prima, în direcția transversală pe cusătură.

Se admite că, în această regiune, deformarea pe o direcție dată nu se modifică apreciabil de la o epruvetă la alta. Cele două epruvete au o lungimea egală cu cel puțin de două ori grosimea. Cu ajutorul tensometriei electrice, utilizând TER aplicate pe ambele fețe ale celor două epruvete, se măsoară deformările specifice longitudinale și transversale.

Etapa următoare constă în determinarea valorii tensiunii remanente din epruvetă.

Pentru aceasta se secționează epruvete, pornind de la secțiunea mijlocie spre capete. Fiecare jumătate a epruvetei se secționează în fișii de circa 3 mm grosime. În fiecare stadiu, deformarea cauzată de relaxarea tensiunii se măsoară pe cele două fețe exterioare cu ajutorul TER. Tensiunea rămasă în ultima fișie se determină prin extrapolare, sau direct, folosind procedeul difracției razelor X (v. § 8.5).

Dacă se admite că, după fiecare tăiere, modificarea tensiunii din partea rămasă a epruvetei este o funcție liniară de grosime, tensiunea remanentă relaxată în straturile interioare, poate fi calculată din deformarea celor două straturi exterioare. Cele două deformări principale ε_l și ε_t la diferite nivele, fiind astfel determinate, rămâne să se găsească a treia deformare principală, care este perpendiculară pe suprafața plăcii. Aceasta poate fi calculată, la diferite nivele, din condițiile de echilibru al forțelor ce acționează pe un paralelipiped elementar. Cu aceasta, starea de deformare și de tensiuni este complet determinată.

Deformațiile măsurate pe cele două fețe, care apar în urma tăierii epruvetei, sînt ε'_l (pentru epruveta longitudinală) și ε'_t (pentru epruveta transversală).

Deformațiile suplimentare ε''_l și ε''_t apar ca rezultat al tensiunilor eliberate prin tăierea epruvetelor în fișii. Admițînd o eliberare parțială a tensiunilor în direcția longitudinală și o eliberare totală în direcția transversală, se obține

$$E\varepsilon'_l = \sigma'_l - \mu(\sigma'_l + \sigma'_t)$$

$$E\varepsilon'_t = \sigma'_t$$

și

$$E\varepsilon'_t = \sigma'_t - \mu(\sigma'_l + \sigma'_t)$$

$$E\varepsilon''_l = \sigma''_l$$

în care: σ'_l și σ'_t sînt valorile tensiunilor relaxate în direcția longitudinală, respectiv transversală, prin tăierea epruvetei din placă;

σ''_l și σ''_t — valorile tensiunilor, în aceleași direcții, obținute prin secționarea în fișii a epruvetei;

E și μ — constantele elastice ale metalului.

Rezolvând ecuațiile anterioare, se obține

$$\sigma'_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon'_1 + \mu \epsilon'_1) + \frac{\mu E}{1 - \mu^2} (\epsilon''_1 + \mu \epsilon''_1) \quad (8.22)$$

$$\sigma'_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon'_1 + \mu \epsilon'_1) + \frac{\mu E}{1 - \mu^2} (\epsilon''_1 + \mu \epsilon''_1).$$

Valorile celor două tensiuni de-a lungul grosimii pot fi calculate pe baza variației liniare a tensiunilor pe grosime. Tensiunea medie pe grosime poate fi stabilită cu ajutorul acestor valori.

Cînd epruveta se taie în două (fig. 8.24, b), se relaxează, atît tensiunile normale longitudinale, cît și cele după direcția transversală. Se produce o relaxare parțială a tensiunilor în direcția longitudinală, în ambele jumătăți ale epruvetei sectionate. Datorită variației liniare a tensiunilor pe grosime, mărimea tensiunii relaxate poate fi calculată, la fiecare nivel, din mărimea tensiunii relaxate pe partea superioară și cea inferioară a fețelor epruvetei, folosind condițiile de echilibru.

Autorii acestei metode au demonstrat că tensiunile longitudinale normale σ_x la un nivel dat x , relaxate prin tăierea epruvetei în două, au valoarea

$$\sigma_x''^0 = (5x - 4) \sigma_t''^0 + (1 - x) \sigma_b''^0 \quad (8.23)$$

unde :

$\sigma_t''^0$ este tensiunea relaxată în urma tăierii epruvetei pe fața superioară ;

$\sigma_b''^0$ — tensiunea corespunzătoare pe fața inferioară.

Deoarece epruveta este presupusă îngustă, tensiunea transversală este neglijabilă, deci

$$\sigma_t''^0 = E \epsilon_t''^0 \quad \text{și} \quad \sigma_b''^0 = E \epsilon_b''^0 ;$$

ca urmare relația (8.23) devine

$$\sigma_x''^0 = E[(5x - 4) \epsilon_t''^0 + (1 - x) \epsilon_b''^0]. \quad (8.24)$$

În mod similar, tensiunile relaxate, la un nivel dat, deasupra feței inferioare a epruvetei, au valoarea

$$\sigma_x''^0 = E[(5x - 4) \epsilon_b''^0 + (1 - x) \epsilon_t''^0]. \quad (8.25)$$

În relațiile de mai sus, x este distanța de la suprafața inferioară, respectiv de la suprafața superioară pînă la nivelul la care se face secționarea epruvetei, iar $\epsilon_t''^0$ și $\epsilon_b''^0$ sînt deformațiile măsurate cu ajutorul TER de pe suprafața superioară și cea inferioară, ca rezultat al tăierii epruvetei.

Mărimea tensiunii relaxate prin tăierea în fișii a jumătăților epruvetei, de la secțiunea medie spre fața exterioară, pentru jumătatea superioară a epruvetei, este

$$\sigma_x'' = E \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{d\varepsilon_t''}{dx} (1-x) - 2(\varepsilon_t'' - \varepsilon_t''^0) + 3(1-x) \int_{\frac{l}{2}}^x \frac{\varepsilon_t'' - \varepsilon_t''^0}{(1-v)^2} dv \right]. \quad (8.26)$$

Relația corespunzătoare jumătății inferioare se obține schimbînd indicele s cu i și t cu b .

Semnificația simbolurilor este următoarea :

ε_t'' și ε_b'' sînt deformațiile de relaxare măsurate cu ajutorul TER aplicate pe fața superioară, respectiv pe fața inferioară a epruvetei, pentru poziția x ;

$\varepsilon_t''^0$ și $\varepsilon_b''^0$ — deformațiile relaxate pe partea superioară și cea inferioară, care iau naștere prin tăierea în două a epruvetei ;

$\frac{d\varepsilon''}{dx}$ — înclinarea diagramei $\varepsilon'' = f(x)$, pentru valoarea corespunzătoare a distanței x ;

v — variabilă auxiliară de integrare.

Pentru efecuirea integralei $F = \int_{\frac{l}{2}}^x \frac{\varepsilon_t'' - \varepsilon_t''^0}{(1-v)^2} dv$, care cuprinde valorile

variabilei auxiliare v , se folosește metoda grafică.

Tensiunea remanentă longitudinală totală, pentru un nivel dat x , se obține prin însumarea tensiunilor corespunzătoare cauzate de :

- tăierea epruvetei din placă ; σ_1' și σ_t' ;
- tăierea epruvetei în două ; $\sigma_x''^0$;
- tăierea în fișii a epruvetei $\sigma_x''^s$

Termenul care conține integrala tinde să devină nedeterminat pentru suprafața inferioară și cea superioară. Din acest motiv, cînd cele două jumătăți ale epruvetei sînt reduse, prin tăierea în fișii, la aproximativ o zecime din grosimea inițială, pentru determinarea tensiunilor rămase încă pe fețele superioare și pe cele inferioare ale epruvetei se recomandă să se facă uz de metoda difracției razelor X . În această fază mărcile tensometrice sînt îndepărtate și se fac măsurători cu ajutorul razelor X în două sau în mai multe puncte, pentru a determina tensiunile medii pe cele două fețe.

Dacă tensiunile pentru fața superioară și cea inferioară — astfel determinate — sînt σ_t^* și σ_b^* , atunci tensiunile σ_t'' și σ_b'' sînt

$$\sigma_t'' = \sigma_t^* + E\varepsilon_t'', \quad \sigma_b'' = \sigma_b^* + E\varepsilon_b'' \quad (8.27)$$

unde ε_t'' și ε_b'' reprezintă deformațiile de relaxare pe fețele superioare și pe cele inferioare ale epruvetei, din momentul cînd ea a fost scoasă din placă pînă în momentul cînd a fost redusă la din grosimea $\frac{1}{10}$ inițială.

8.3.2. CAZUL CUSĂTURILOR DE SUDURĂ DE GROSIME MARE

În cazul cusăturilor de sudură groase, formate din mai multe straturi, nu se poate neglija componenta tensiunilor remanente după direcția grosimii cusăturii σ_z .

În laboratorul de sudură al Școlii superioare tehnice „Bauman” din Moscova, s-au efectuat măsurări pentru determinarea valorilor celor trei componente ale tensiunilor remanente în cazul sudurilor cap la cap de grosime mare. A fost utilizată în acest scop o metodă de cercetare a tensiunilor spațiale (triaxiale) cu ajutorul găurilor adânci.

Cu ajutorul acestei metode se pot determina tensiunile remanente atât în adâncimea îmbinării sudate, cât și la suprafața îmbinării, unde tensiunile sînt biaxiale.

Determinarea tensiunilor remanente se face cu ajutorul unor elemente de formă cilindrică (fig. 8.25) pe care sînt lipite traductoare rezistive. Elementele se introduc în găuri, executate în trepte în piesa de cercetat, orientate după direcția axelor principale ale cîmpului de tensiuni remanente sau sub un unghi determinat față de acestea.

Pentru a se asigura posibilitatea înregistrării deformațiilor elementului de ambele părți, înainte de introducerea lui în piesă, i se imprimă o anumită tensiune preliminară.

După ce s-a determinat deformația care corespunde acestei tensiuni, se taie din epruvetă o coloană de material (cu secțiunea de 40×40 mm)

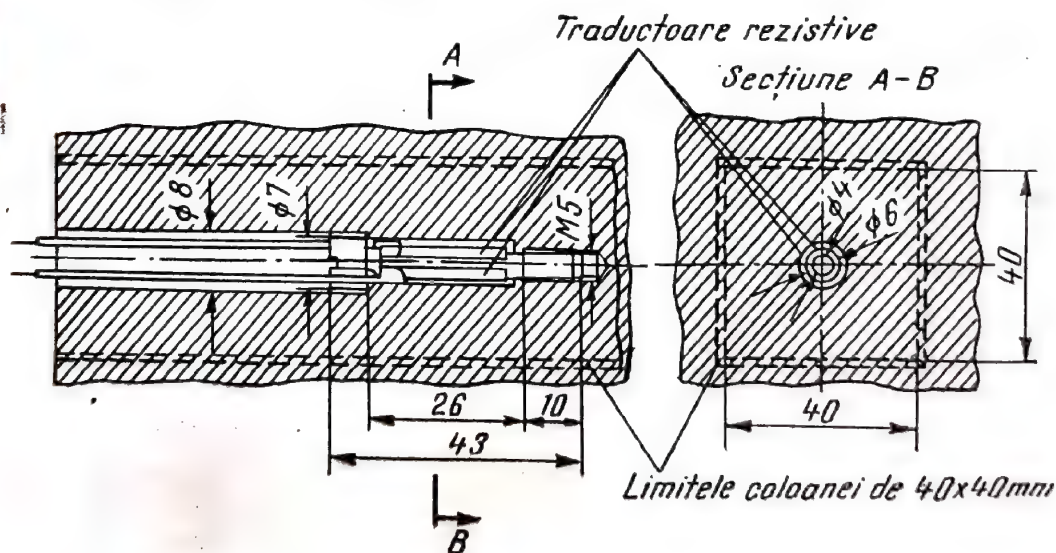


Fig. 8.25.

egală cu elementul de măsurare și se înregistrează o altă valoare a deformației.

Din diferența măsurărilor, înainte și după înlăturarea tensiunilor remanente, se obține valoarea deformațiilor specifice ϵ_x , ϵ_y și ϵ_z .

În cazul cînd axa găurii coincide cu una dintre direcțiile principale, componentele tensiunii remanente la o anumită adîncime se determină cu relațiile

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \Delta + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_z\end{aligned}\quad (8.28)$$

în care : $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Dacă axa găurii formează unghiuri oarecare cu direcțiile principale, mărimea tensiunilor remanente poate fi, de asemenea, stabilită cu ajutorul relațiilor cunoscute din teoria elasticității. Întrucît la suprafața îmbinării σ_z este zero, determinarea tensiunilor remanente la suprafață se reduce la determinarea componentelor σ_x și σ_y , orientate longitudinal, respectiv transversal față de cusătură.

Aceste componente se măsoară cu ajutorul unor traductoare rezistive, lipite de-a lungul cusăturii pentru măsurarea deformației ε_x și transversal pe cusătură pentru măsurarea deformației ε_y . Descărcarea tensiunii remanente se face prin tăierea metalului de bază în jurul traductorului, pe o adîncime $h = 0,7 l$ (fig. 8.26).

În fig. 8.27 sînt reprezentate rezultatele măsurărilor efectuate pe o epruvetă din oțel cu conținut redus de carbon, sudată

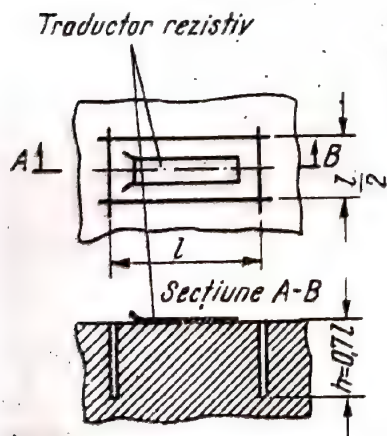


Fig. 8.26.

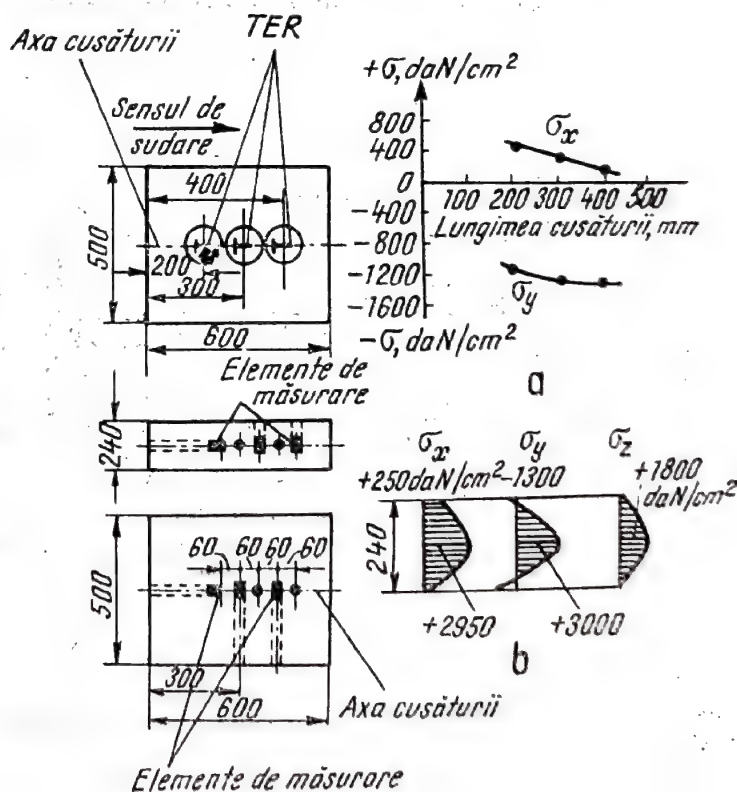


Fig. 8.27.

electric în baie de zgură, cu dimensiunile (după sudare) de $600 \times 500 \times 240$ mm.

Cu ajutorul a trei rozete în T formate din traductoare rezistive, s-au determinat tensiunile remanente la suprafața cusăturii σ_x și σ_y , în trei puncte situate la distanța de 200, 300 și 400 mm de la capăt. Rezultatele sînt prezentate în diagrama din fig. 8.27, a. Ele indică existența la suprafața îmbinării a tensiunii de întindere σ_x , de circa 500 daN/cm^2 în direcția cusăturii, și a unor tensiuni de compresiune, transversale față de cusătură, σ_y , de circa 1.400 daN/cm^2 .

Cu ajutorul elementelor de măsurare montate în interior s-a stabilit mărimea și modul de repartiție a tensiunilor σ_x , σ_y și σ_z în secțiunea mijlocie a epruvetei, obținîndu-se valorile indicate în diagramele din fig. 8.15, b.

8.3.3. UTILIZAREA EXTENSOMETRELOR MECANICE

Determinarea deformațiilor, ce rezultă în urma procesului de sudare, se poate face și cu ajutorul extensometrelor mecanice. În cele ce urmează se vor prezenta rezultatele cercetărilor efectuate la uzina „Electroputere”-Craiova, în cazul unor îmbinări sudate prin cusături cap la cap. Pentru măsurarea deformațiilor s-a utilizat un extensometru mecanic sistem Pfender (fig. 2.19).

Deformațiile au fost determinate prin măsurarea lungimii inițiale (baza de măsurare) în diferitele etape ale procesului de deformare. Baza de măsurare a fost delimitată prin bile de oțel cu diametrul $1/16''$, fixate pe suprafața probei. Bazele de măsurare cu care s-a lucrat au fost de 20 și de 40 mm.

Tehnologia pentru fixarea bilelor pe suprafața piesei a constat din următoarele operații:

- fixarea celor două centre care vor defini baza de măsurare;
- executarea locașurilor conice în care vor fi introduse bilele de oțel;
- introducerea bilelor și
- fixarea bilelor în material.

În fig. 8.28 se prezintă operațiile necesare pentru fixarea bilelor de oțel care delimitează baza de măsurare; în fig. 8.28, a se arată modul de executare a operației pentru centrare a locașurilor în care se introduc bilele. Dispozitivul (1) va imprima pe suprafața piesei de cercetat (2) centrul acestor locașuri (fig. 8.28, b), printr-o lovitură de ciocan. Urmează ca aceste locașuri să fie profilate după forma bilelor, cu ajutorul pcanso-nului din fig. 8.28, c.

În sfîrșit, se introduc bilele care delimitează baza de măsurare, conform fig. 8.28, d. Măsurarea bazei de măsurare, în diferite etape, se execută cu ajutorul extensometrului mecanic, cu pîrghii și comparator (fig. 2.19). Valoarea unei diviziuni este de $1/1000$ mm. În prealabil, extensometrul 5 este reglat pentru lungimea bazei de măsurare respective, cu ajutorul unui etalon din invar. Modul de efectuarea măsurării se prezintă în fotografia din fig. 2.21, unul din picioarele extensometrului este fix

(a), iar cel mobil (b) se înclină pentru a urmări variația lungimii bazei de măsurare. Diviziunile citite pe cadranul comparatorului indică cu cât baza de măsurare s-a mărit sau s-a scurtat față de valorile inițiale ținând cont și de corecțiile impuse de eventualele variații de temperatură determinate cu ajutorul etalonului din invar. În cazul extensometrului utilizat

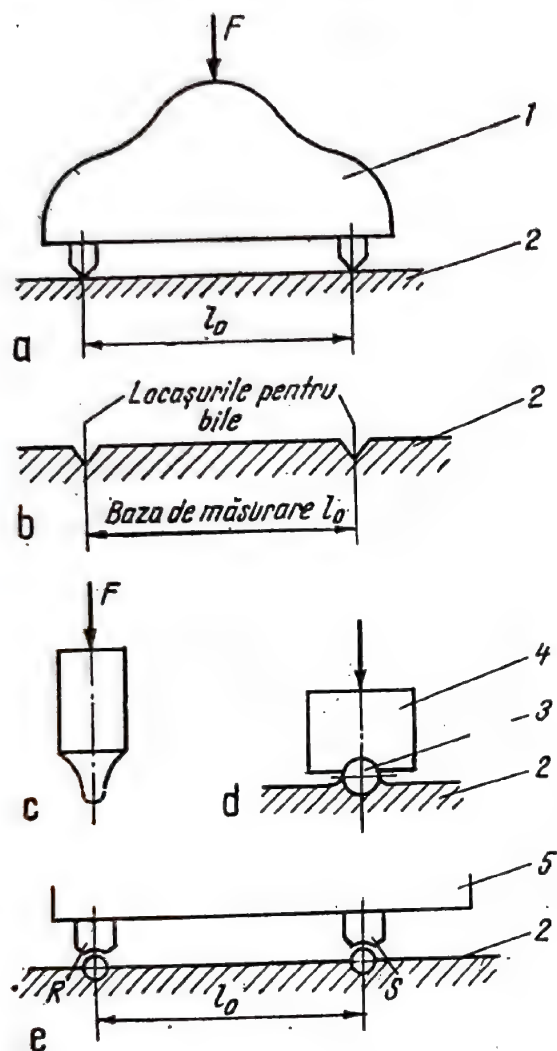


Fig. 8.28.

erorile determinărilor sînt cuprinse între 0,005% și 0,01%, funcție de baza de măsurare aleasă.

În primul caz, măsurările au fost efectuate pe o probă din OL 37 alcătuită din două plăci sudate, notate I și II, fiecare avînd dimensiunile $15 \times 350 \times 500$ mm. Marginile plăcilor au fost prelucrate în V, avînd unghiul de 60° . Regimurile de sudare alese au asigurat energia lineară corespunzătoare executării probelor de sudare, conform recomandărilor I.I.S., de maxim $85\,000$ J/cm.

Pe fața opusă rădăcinii cusăturii, au fost fixate bilele din oțel care au delimitat bazele de măsurare de 20 mm pe placa I, și 40 mm pe placa II. Segmentele au fost așezate după două direcții perpendiculare, la distanțele indicate în fig. 8.29. Una din direcții a fost paralelă la axa cusăturii de sudură, iar cealaltă perpendiculară pe aceasta.

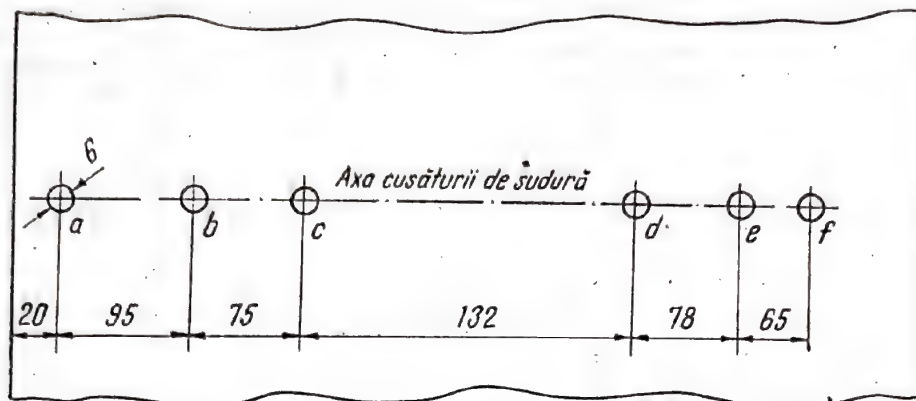
Înainte de sudare a fost determinată lungimea efectivă pentru fiecare bază de măsurare. Imediat după sudare s-a executat măsurarea acestora, iar la 72 de ore, după sudare, s-a efectuat o nouă măsurare obținîndu-se alte valori. Diferențele

valorilor găsite s-au raportat la valoarea inițială a bazei de măsurare. Pentru eliberarea parțială a tensiunilor remanente din proba sudată, au fost efectuate 6 găuri (a, b, . . . , f) în axa cusăturii de sudură situate după cum rezultă din fig. 8.29 și 8.30, a.

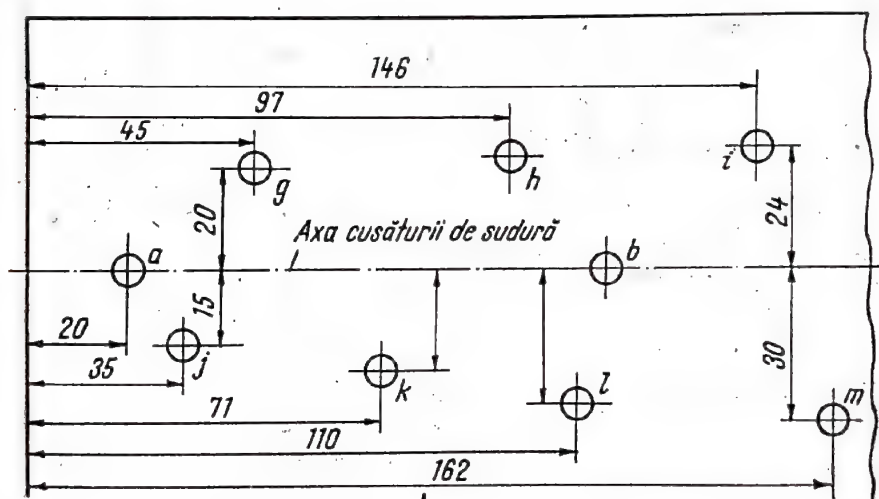
După această operație s-a determinat din nou valoarea distanțelor dintre punctele de măsurare. În continuare au mai fost executate 3 găuri la placa I (g, h, i) și 4 găuri în placa II (j, k, l, m). situate în zonele influențate termic (fig. 8.29 și 8.30, b). După găurire au fost măsurate din nou lungimile bazei de măsurare.

În sfîrșit, o altă operație a urmărit detașarea prin găurire a unei părți din proba sudată, așa cum rezultă din fig. 8.29 și 8.31. Măsurarea

deformațiilor specifice s-a efectuat după operația de găurire și după detașarea completă a acestei părți. Se precizează că valoarea lungimilor bazei de măsurare obținute, după efectuarea găurilor și a decupării, au fost raportate la lungimea bazei de măsurare după sudare, având în vedere că s-a urmărit efectul acestor operații față de situația creată după sudare.



a



b

Fig. 8.30.

De asemenea, în toate cazurile, înainte de efectuarea măsurărilor s-a determinat valoarea efectivă a bazei de măsurare, cu ajutorul etalonului de invar, așezat pe proba de măsurat, pentru ca ambele să aibă aceeași temperatură.

Pe baza măsurărilor efectuate prin extensometria mecanică s-au determinat deformațiile specifice pentru cele două plăci ale probei sudate după efectuarea operațiilor de găurire și decupare menționate mai sus.

După ce au fost determinate deformațiile specifice, pe baza legii lui Hooke generalizate, (v. § 1.4.2.) au fost determinate tensiunile principale considerându-se pentru $E = 2,05 \cdot 10^4$ daN/mm² și pentru $\mu = 0,33$. În acest caz direcțiile principale s-au considerat a fi cunoscute, respectiv cea paralelă și cea perpendiculară la cusătura de sudură.

Au fost urmărite deformațiile, în diferitele etape, pe placa I în 80 de puncte de măsurare, iar pe placa II în 54 de puncte, conform fig. 8.29.

Se constată că operația de găurire în axa cusăturii sudate eliberează complet tensiunile remanente numai în zona punctelor de măsură (22, 21)

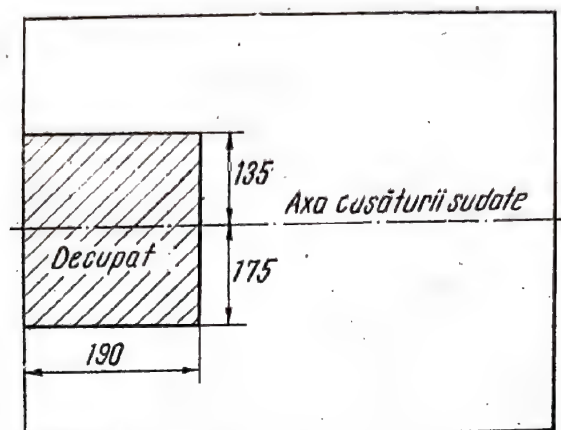


Fig. 8.31.

și (42, 41), unde deformațiile după această operație devin nule (fig. 8.32, a). Același lucru s-a produs la placa II, din aceeași figură (fig. 8.29) în zona punctelor de măsurare (40, 39) după operația de decupare (fig. 8.32, b și 8.32, c); în celelalte zone analizate deformațiile nu mai devin nule ca urmare a efectuării operațiilor tehnologice amintite și rezultă existența unor deformații cu caracter permanent.

Folosind extensometria mecanică măsurările s-au efectuat și în cazul utilizării rozetelor alcătuite din trei direcții de măsurare decalate la 45° una față de alta (v. tab. 1.5) cu baza de măsurare $l_0 = 20$ m. În acest caz se consideră că nu sînt cunoscute direcțiile tensiunilor principale.

Folosind rozeta cu trei traductoare (tab. 1.5, poz. 1) se pot determina deformațiile specifice principale ε_1 și ε_2 , tensiunile principale σ_1 și σ_2 și direcțiile acestora, prin aflarea unghiului φ_1 , dintre direcția orizontală după care s-a efectuat măsurarea deformațiilor specifice notate cu ε_x și direcția tensiunii principale σ_1 (v. tab. 1.5).

Probele au fost executate din oțel slab aliat cu mangan OL 52—3K STAS 500—68, avînd grosimea de 21 mm (fig. 8.33). Probele sudate au avut rostul pregătit în X, cu unghiul de 60° . Au fost utilizați electrozi bazici tip Unibaz. Sudarea s-a executat controlat cu determinarea energiei liniare și respectarea prevederilor I.I.S. Una din probe, notată cu 3, s-a sudat fără preîncălzire, iar la proba 4 sudarea s-a executat cu preîncălzire. Ambele probe au avut aceleași dimensiuni și s-a utilizat același tip. de electrod.

În cele ce urmează se prezintă rezultatele măsurărilor efectuate în următoarele cazuri :

- a) înainte de sudare ;
- b) după sudare ;

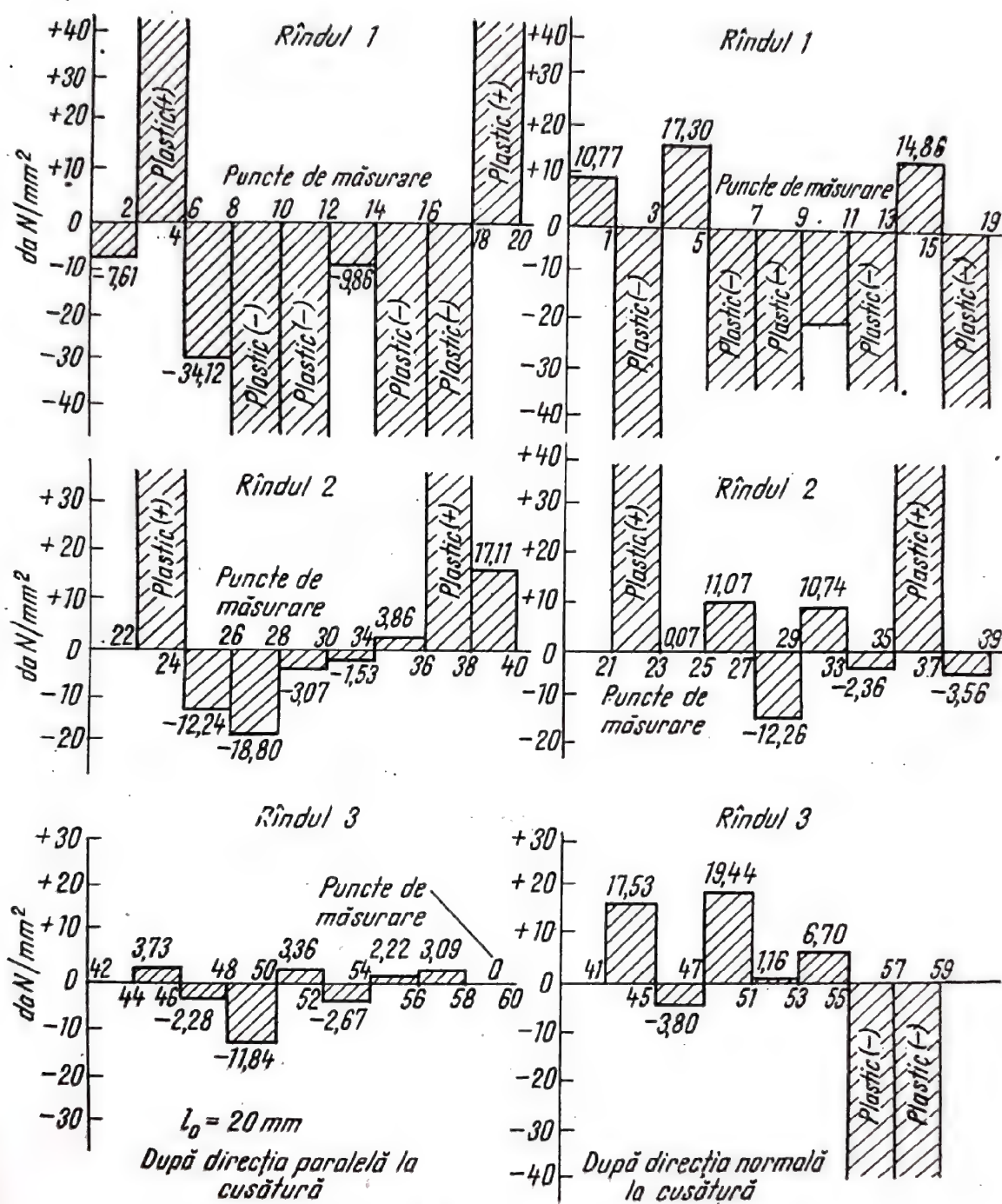


Fig. 8.32.

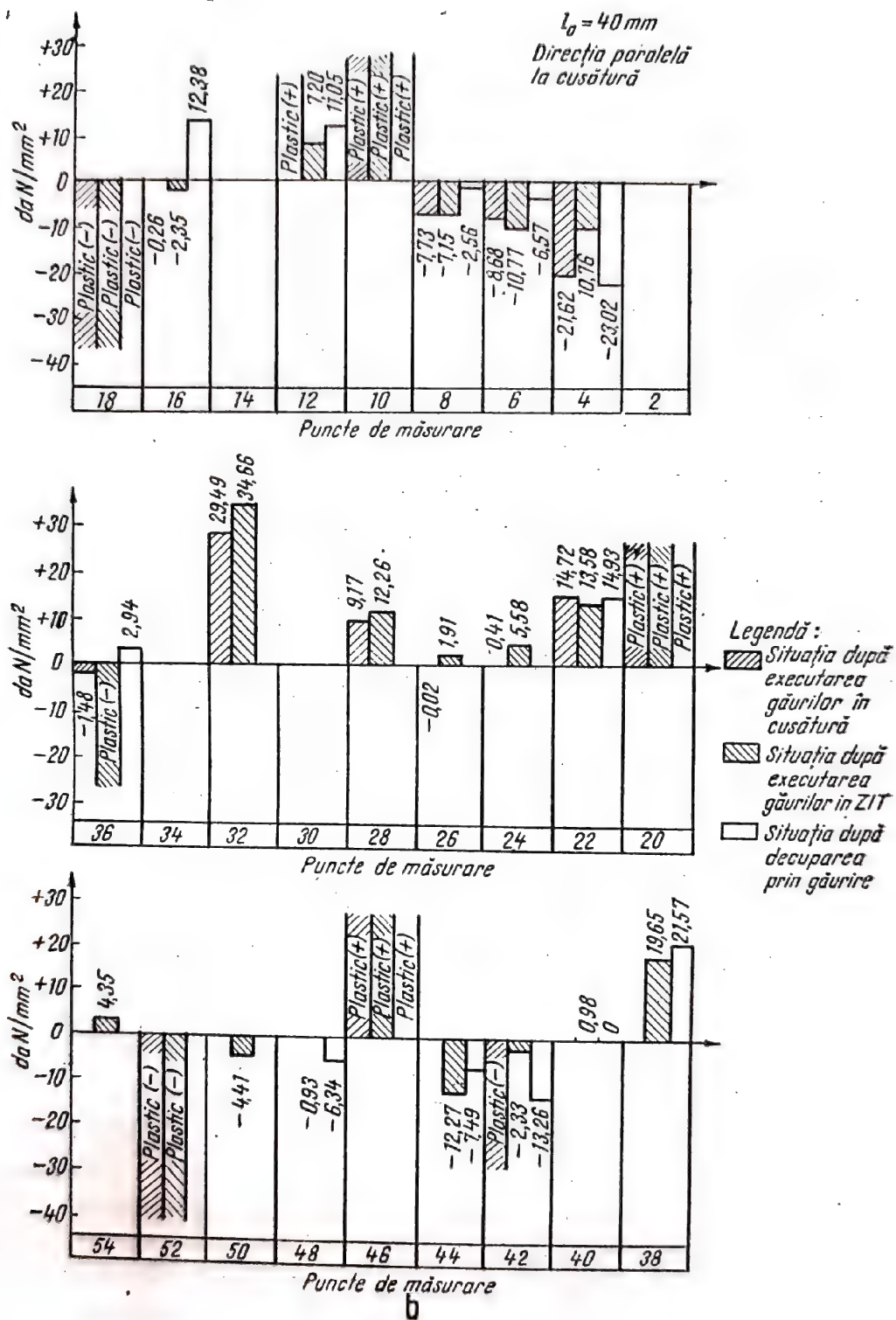


Fig. 8.32.

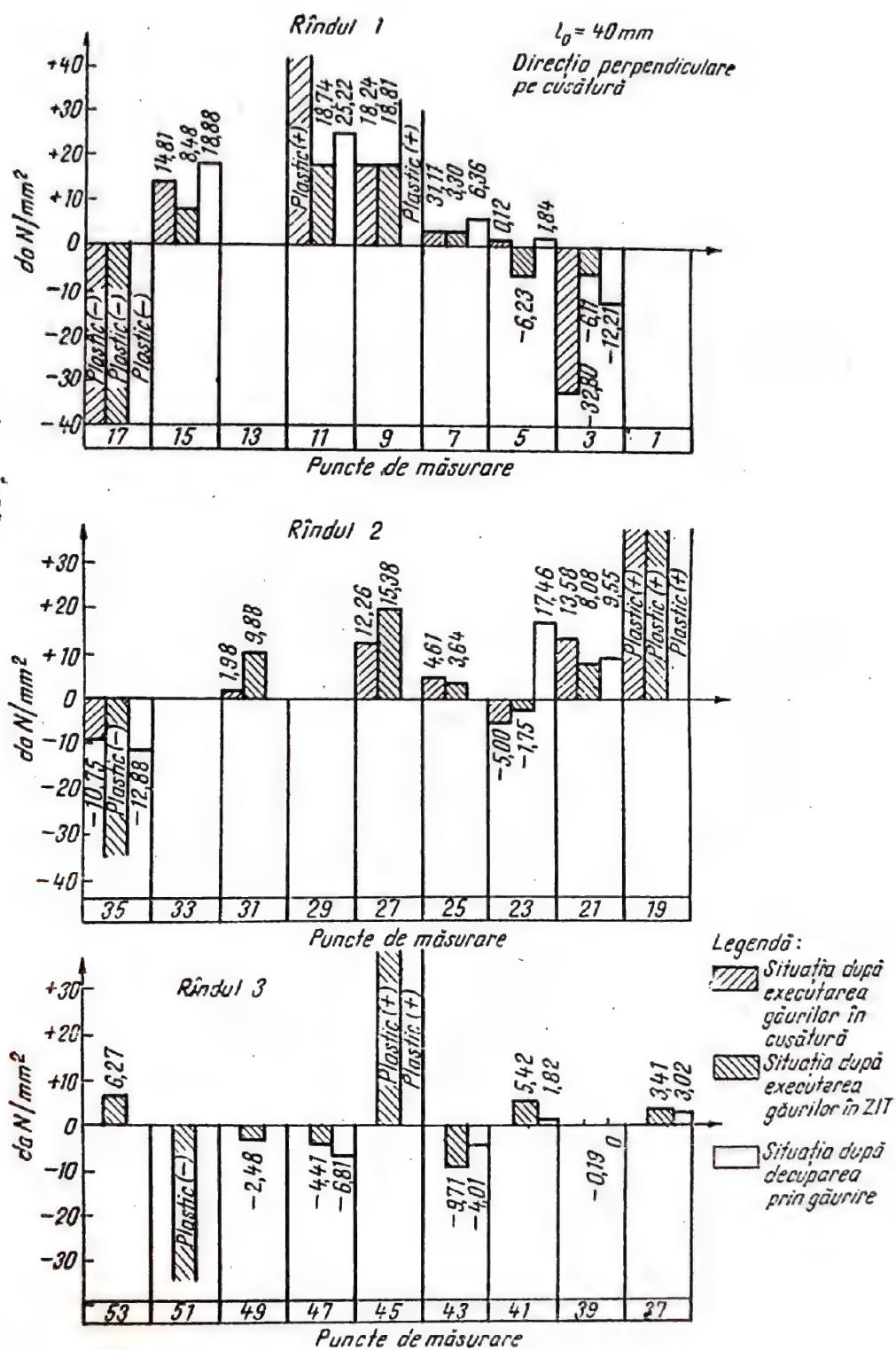
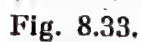


Fig. 8.32.

d) după executarea unor găuri cu diametrul de 5,8 mm la mijlocul bazei de măsurare.



Din tabelul 8.1 se observă dinamica deformațiilor specifice determinate cu ajutorul dispozitivului din fig. 2.19 pentru fiecare punct de măsurare care alcătuiesc rozeta respectivă. În cazul rozetei A se constată că $\epsilon < 0,2\%$, respectiv materialul s-a deformat sub limita de curgere.

Tabelul 8.1.

Valorile deformațiilor specifice pentru două rozete de pe proba 3, apărute după efectuarea celor patru operații

Rozeta	Traductorul	Poziția	Valoarea lui ε %				Observații
			după sudare	după decupare	după găurire	efectul găuririi	
0	1	2	3	4	5	6	8
A	12	90°	-0,0247	-0,0297	-0,0396	-0,0099	în domeniul elastic
	13	45°	-0,0298	0	-0,0149	-0,0149	
	14	0°	+0,0049	+0,0149	+0,0240	+0,0091	
B	38	90°	+0,2929	-0,2768	-0,2669	+0,0099	în domeniul plastic în domeniul elastic
	40	45°	-0,0544	+0,0198	+0,0049	-0,0149	
	41	0	-0,0444	-0,0148	-0,0395	-0,0247	

Se poate observa că pentru traductorul 13, după decupare, se ajunge la $\varepsilon = 0$, deci materialul s-a găsit în domeniul elastic în această zonă. De asemenea, se constată că deformațiile își păstrează aceleași semn după efectuarea diferitelor operații. În schimb în cazul rozetei B se constată valori ca $\varepsilon > 0,2\%$, pentru traductorul 38, deci oțelul se găsește în domeniul plastic și se constată schimbarea sensului deformației. Se poate ușor remarca, că, după direcția normală la axa cusăturii de sudură, deformațiile au valori mai mari.

Cu ajutorul relațiilor din tabelul 1.5, poz. 1 au fost calculate, în cazul deformațiilor elastice, valorile tensiunilor remanente principale, deformațiile specifice principale și direcțiile acestora pentru rozeta A (tabelul 8.2).

Observație. Se menționează că și alte metode prezentate în cadrul acestui capitol, în special metoda rabotării (§ 8.2.5), pot fi utilizate la determinarea tensiunilor remanente din construcțiile sudate.

Tabelul 8.2

Tensiunile și deformațiile specifice principale corespunzătoare rozetelor din tabelul 8.1.

Ro- zeta	Traduc- torul	Tensiunile normale principale normale		Tensiunea de forfecare principală	Deformațiile specifice principale		tg φ_1	φ_1
		σ_1	σ_2	τ max.	ε_1	ε_2		
		daN/mm ²			(%)			
A	14	+0,7935	-6,8517	+3,8226	+0,0224	-0,0421	-1,3446	63°16'
	13	+1,3573	-3,8857	+3,6215	+0,0258	-0,4065	0,3318	9°10'
	12	+2,6356	-7,4087	+5,0227	+0,0449	-0,605	-0,2233	83°45'
		+4,2640	-1,7826	+3,0233	+0,0225	-0,0143	-3,7572	53°2'

8.3.4. UTILIZAREA FRANJELOR MOIRÉ

Primul care a utilizat franjele moiré pentru măsurarea deformațiilor și tensiunilor remanente în cazul îmbinărilor sudate a fost Dantu [18].

Detalii în legătură cu tehnica utilizată sînt date la § 5.2.10 .

8.4. METODE NEDISTRUCTIVE

8.4.1. METODA CU ULTRASUNETE

Metoda se bazează pe dependența vitezei de propagare a undelor ultrasonore transversale de valoarea tensiunilor ce solicită materialul. Undele ultrasonore transversale, utilizate în tensometrie, se obțin cu ajutorul unor elemente piezoelectrice șlefuite în formă de Y cu dimensiunile de 5×5 sau 10×10 mm. Frecvențele utilizate sînt cuprinse între 3 și 6 MHz.

Măsurarea vitezei de propagare a ultrasunetelor trebuie să se facă cu multă precizie, eroarea maximă să nu depășească 0,1—0,2%. Această precizie poate fi asigurată dacă se utilizează pentru măsurarea vitezei una din metodele interferometrice. Guscia [23] a construit un aparat pe principiul autocirculației impulsului, care măsoară viteza de propagare a ultrasunetelor cu o precizie de $0,01\%$, la care undele ultrasonore cu polarizare maximă se obțin la frecvență de 5 MHz.

Pentru a se obține o succesiune suficient de mare de ecouri se recomandă ca suprafața probei sau structurii să fie prelucrată și șlefuită pentru a se asigura, astfel, condiții optime de cuplare a palpatorului.

Direcția fasciculului de unde ultrasonice trebuie să fie perpendiculară pe direcția de solicitare a materialului. La măsurarea vitezei undelor transversale se are în vedere : viteza după direcția solicitării v_1 și viteza perpendiculară pe aceasta v_2 . Diferența între vitezele corespunzătoare celor două situații extreme și anume : cînd planul de polarizare este perpendicular și apoi paralel cu direcția tensiunilor dă, cu ajutorul unei diagrame de etalonare, valoarea tensiunilor ce solicită materialul.

S-a constatat că, în cazul unei epruvete confecționată din OLC45, solicitată la întindere — o variație a tensiunii de $10 \frac{\text{da N}}{\text{mm}^2}$ corespunde la o

variație a vitezei transversale după direcția solicitării v_1 de 2 m/s în timp ce viteza v_2 rămîne constantă și nulă, indiferent de valoarea tensiunii*).

Unii cercetători au stabilit relații matematice ce exprimă dependența dintre viteza de propagare a undelor sonore transversale și tensiunea la care este solicitat materialul. Dintre aceștia se menționează Toupin și Bernstein; relațiile stabilite fiind date în lucrarea [64].

*) Cercetările au fost efectuate la CCP-Craiova de către un colectiv condus de ing. M. Băltănoiu.

Aplicație. În fig. 8.34 se dau valorile tensiunilor remanente dintr-o îmbinare sudată, prin cusături cap la cap, determinate cu ajutorul ultrasunetelor (linia continuă) și prin tensometria electrică cu traductoare rezistive (linia întreruptă).

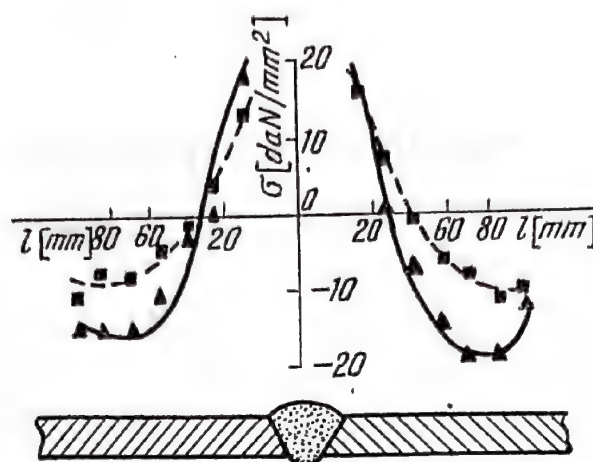


Fig. 8.34.

Se menționează, că, în comparație cu metodele distructive prezentate anterior, metoda bazată pe utilizarea undelor ultrasonice este mai precisă.

8.4.2. METODA ELECTROMAGNETICĂ

Metoda electromagnetică de determinare a tensiunilor este tot o metodă nedistructivă, ea se bazează pe faptul că proprietățile magnetice ale metalelor feromagnetice sînt foarte sensibile la modificările valorii tensiunilor din masa metalului. Primul cercetător care a conceput un tensometru ce se bazează pe variația permeabilității magnetice în funcție de solicitare a fost Reimbert (anul 1946). Cercetările experimentale au arătat că pînă în apropiere de limita de elasticitate a materialului legătura dintre tensiune și permeabilitate, practic, poate fi considerată liniară și depinde de intensitatea cîmpului magnetic [40].

O serie de cercetători au căutat să stabilească relații cantitative între valoarea tensiunii și caracteristicile magnetice ale metalului, dintre aceștia se citează Lagasse [34]. Rezultatele obținute, însă, nu pot fi considerate satisfăcătoare fiind eterogene și incomplete.

În lucrarea [39] se prezintă rezultatul cercetărilor privind determinarea tensiunilor remanente prin depistarea componentelor armonice produse de forța electromotrice a unui traductor electromagnetic. S-a constatat că variațiile amplitudinilor, armonicilor cu soț, corespund variației tensiunii (fig. 8.35) sensibilitatea crescînd cu intensitatea cîmpului magnetic (curbele 1, 2, 3, și 4 corespund cîmpurilor de magnetizare de 1, 2, 4 și 6 Ōersted, pentru armonica a doua).

În fig. 8.36 este prezentat schematic dispozitivul de lucru utilizat pentru măsurarea tensiunilor remanente în cazul unei îmbinări sudate prin cusături cap la cap. Blocul traductor constă dintr-un electromagnet E în formă de U, cu miez din tole de transformator, și traductorul pro-

priu-zis B cu miez din ferită. Aparatura de înregistrare este compusă dintr-un analizor de spectre și un instrument de înregistrare potențiometric [39].

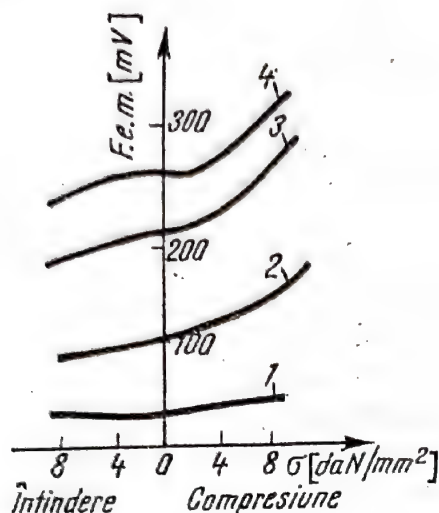


Fig. 8.35.

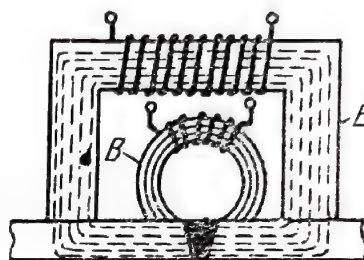


Fig. 8.36.

8.4.3. METODA POMEY

Pomey și colaboratorii săi au utilizat, pentru evaluarea tensiunilor remanente, legătura dintre valoarea acestora, la suprafața piesei, și duritate. Se utilizează în acest scop, limita elastică de pătrundere a unei bile în suprafața piesei. Această limită poate fi pusă în evidență cu ajutorul unui microsclerometru construit special pentru acest scop.

Detalii în legătură cu aplicarea practică a acestei metode sînt date în lucrările [25] și [47].

8.5. MĂSURAREA TENSIUNILOR REMANENTE DIN STRATURILE METALICE DEPUSE ELECTROLITIC

8.5.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Acoperirea unei suprafețe metalice printr-un alt metal, destinat a da stratului superficial proprietăți speciale, este un procedeu practic care este foarte mult folosit, la ora actuală, în construcția de mașini pentru a se atinge anumite scopuri.

Unul din numeroasele procedee tehnice de acoperire folosit în industrie este galvanostegia.

În construcția de mașini și în alte domenii ale industriei acest procedeu este aplicat cu scopul de a proteja metalul împotriva coroziunii, de a îmbunătăți caracteristicile de uzură ale suprafețelor metalice în contact (cilindrii de la motoare cu ardere internă, unelte și scule, matrițe etc.),

de a reface părțile uzate ale diferitelor piese cu suprafețe purtătoare sau de a da unor suprafețe exterioare un aspect decorativ.

Dintre metalele care pot fi depuse pe cale electrolitică cele mai utilizate sînt cromul și nichelul, întrucît acestea răspund cel mai bine din punct de vedere al proprietăților fizico-mecanice cerute în practică.

Privind depunerile de crom, în literatura de specialitate se vorbește de două feluri de depuneri : depuneri de crom dur și depuneri decorative. Prima denumire este improprie, deoarece însuși cromul prezintă o duritate foarte ridicată de (400—1 000) HB și atunci mai logic ar fi ca depunerile de (1—25) μm și chiar peste 100 μm (în cazul refacerii părților uzate) să fie denumite depuneri groase, în opoziție cu depunerile decorative, care au grosimi de ordinul a 1 μm . Acestea din urmă, în majoritatea cazurilor, se realizează printr-o depunere mixtă de Cu-Ni.

Tot în categoria depunerilor groase de crom intră și depunerile de crom poros [3], care, pe lângă faptul că are coeficientul de frecare mic și este rezistent la temperaturi ridicate, datorită rețelilor de canale ce iau naștere în timpul depunerii prin atacul anodic de 1—2 min. joacă, în același timp, și un rol important de ungere. Pe baza acestor proprietăți, cromajul poros este aplicat pe cilindrii din metale ușoare de la motoarele cu ardere internă.

Depunerile de nichel sînt folosite în majoritatea cazurilor ca depuneri decorative și ca protecție împotriva coroziunii. În momentul actual unde este nevoie de grosimi de depunere mai mari, pe baza costului mai mic, este preferat nichelul în locul cromului, deși nu este așa de dur.

În straturile metalice depuse electrolitic, în timpul depunerii, iau naștere *tensiuni remanente*. Acțiunea lor se manifestă prin modificări în proprietățile fizice și mecanice ale stratului depus. Sub acțiunea acestor tensiuni, straturile de acoperire sînt solicitate la întindere sau la compresiune.

În raport cu efectul tensiunilor remanente, în practică se pot întîlni două cazuri și anume : în cazul depunerilor pe piese rigide, în stratul metalic depus pot apărea microfisuri sau chiar fisuri, care favorizează producerea atacului corosiv și distrugerea stratului metalic depus, iar în cazul depunerilor pe piese de grosime foarte mică — cazul filmelor utilizate în calculatoare de mare rapiditate — pot produce distorsionarea secțiunii transversale, făcîndu-le neutilizabile.

Avînd în vedere acțiunea nefavorabilă a tensiunilor remanente din straturile metalice depuse electrolitic asupra duratei de funcționare a pieselor tratate astfel, pe de o parte, iar pe de altă parte, dorind să găsească originea cauzelor lor, de aproape un secol, au fost întreprinse cercetări pentru determinarea și studierea lor. Totodată, aceste cercetări sînt îndreptate în direcția găsirii unor compoziții de soluții electrolitice și regimuri de depunere (temperatură, densitate de curent, etc.) care să conducă la micșorarea tensiunilor remanente în așa măsură încît acțiunea lor să nu afecteze calitățile stratului de acoperire.

8.5.2. METODE PENTRU DETERMINAREA TENSIUNILOR REMANENTE

Pentru determinarea tensiunilor remanente menționate au fost elaborate mai multe metode, care, în general, pot fi clasificate în :

— Metode bazate pe măsurarea săgeții benzilor sau plăcilor acoperite unilateral [7], [17], [33], [50], [58]

— Metode bazate pe măsurarea forței de compensare la benzile acoperite unilateral [26], [19], [59], [28]

În cadrul metodelor bazate pe măsurarea săgeții, pentru determinarea tensiunii remanente, sînt folosite o serie de formule, care au fost deduse în ipoteza lui Stoney, adică a *momentului încovoietor constant*.

Astfel, folosind fig. 8.37 și 8.38 se ajunge la relația

$$\sigma_0 = \frac{4}{3} \frac{E h^2 \cdot f}{l^2 \cdot d} \quad (8.29)$$

unde : σ_0 este tensiunea remanentă ;

E — modulul de elasticitate longitudinală ;

f — săgeata benzii ;

d — grosimea stratului de metal depus și

h — grosimea benzii,

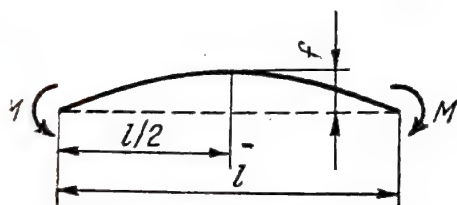


Fig. 8.37.

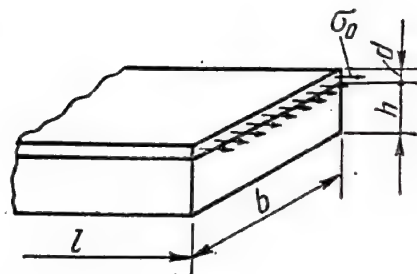


Fig. 8.38.

O variantă a benzii acoperite unilateral este contractometrul lui Brenner și Senderoff [32] (fig. 8.39), care a fost construit pentru a mări sensibilitatea de măsurare a deformației.

Pentru a-l face mai sensibil la depuneri foarte subțiri, construcția acestui aparat a fost îmbunătățită de către Starek, Fry, Morris, Watkins și Kolk. Îmbunătățirea a constat în micșorarea frecărilor în lagăre prin montarea unor cuzineți de o construcție specială.

Folosindu-se de aceeași ipoteză, Brenner și Senderoff deduc următoarea formulă

$$\sigma_0 = \frac{E h^2 p \Delta \varphi}{6 \pi b D d} \quad (8.30)$$



unde : h este grosimea benzii elicoidale ;

d — grosimea stratului de metal depus ;

b — lăţimea benzii ;

p — pasul elicei ;

$\Delta\varphi$ — unghiul de la centru produs de deplasarea capătului liber al spiralei

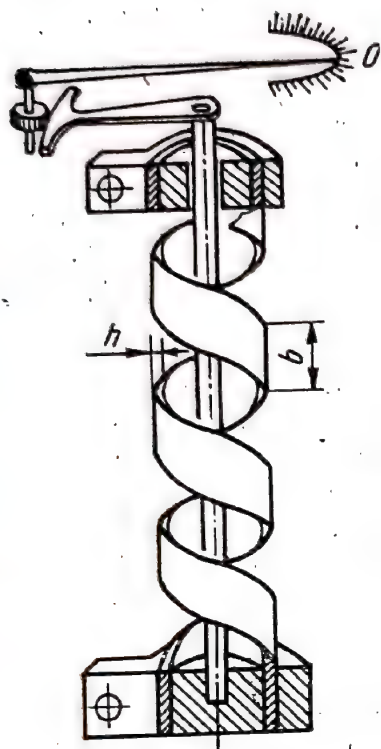


Fig. 8.39.

Ipoteza lui Stoney a fost infirmată de rezultatele cercetărilor lui M.I. Propereka în sensul că săgeata calculată cu ajutorul formulei lui Stoney este mai mare decât cea obținută pe cale experimentală. Pe baza acestor cercetări Propereka emite ipoteza *întinderii sau compresiunii constante* a stratului de metal depus, care duce la o încărcare a benzii sub formă de momente repartizate (fig. 8.40) a cărei curbura teoretică se suprapune cu cea experimentală,

Făcând o comparație între formula dedusă în ipoteza lui Stoney și cea dedusă pe baza ipotezei lui Propereka, se constată că, pentru valorile foarte mici ale raportului d/h , adică tocmai pentru cazurile întâlnite în practică, prima formulă dă tensiuni foarte mari (chiar de zeci de ori mai mari) în raport cu cele obținute cu a doua formulă [30].

În continuare, Propereka arată că ipoteza momentului încovoiator constant (fig. 8.43) nu constituie singura cauză a rezultatelor contradictorii obținute de diferiți cercetători ; o altă cauză constă în aceea că, prin încovoierea probelor acoperite unilateral, o parte din tensiunile remanente se relaxează, deci ceea ce se determină în acest caz este o tensiune accidentală, denumită și tensiune instantanee. Cum, în general, depunerea de metal se face pe piese care nu se deformează datorită tensiunilor remanente, înseamnă că nu are loc fenomenul de relaxare și, în consecință, pentru

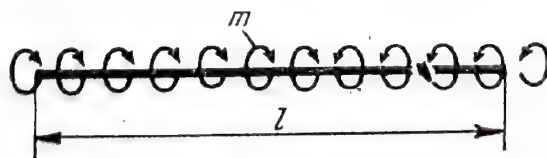


Fig. 8.40.

determinarea tensiunilor remanente trebuie folosite metode care să reproducă cât mai fidel condițiile reale de depunere.

O încercare de a înlătura neajunsurile remarcate în metodele analizate mai sus a fost făcută de Hoar și Arrowsmith [26] prin adaptarea la capătul

liber al benzii ce tinde să se încovoie în timpul depunerii a unui dispozitiv „de zero”, care menține cu intermitență capătul benzii în poziția inițială cu o forță crescătoare, denumită *forța de compensare*.

La acest aparat (fig. 8.41) pe partea superioară a benzii de metal 1 ce servește drept catod, se fixează o tijă subțire 2, în formă de T. La capătul de sus al piesei 2 se montează oglinda 3, care reflectă raza de lumină e

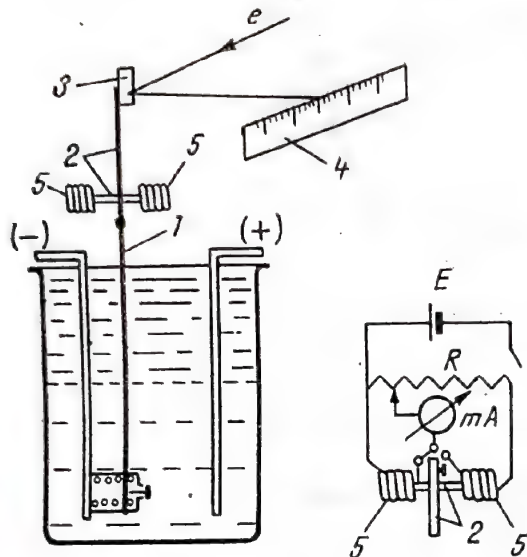


Fig. 8.41.

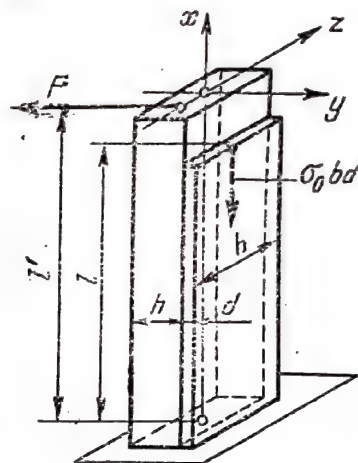


Fig. 8.42.

pe o scală gradată 4, ce servește pentru aducerea la zero. Pe cele două ramuri ale piesei în T se fixează bobinele 5, care servesc ca electromagneți, astfel că la o trecere a curentului se exercită o anumită forță de atracție pe unul din capetele tijei în T. După ce s-a stabilit poziția de zero a indicatorului, curentul se reglează în timpul depunerii în așa fel că forța ce ia naștere prin împiedicarea deplasării să fie compensată de forța de atracție dată de una din cele două bobine. Reglarea curentului se face cu ajutorul reostatului R .

Raționînd pe baza fig. 8.42, Hoar și Arrowsmith deduc următoarea formulă pentru calculul tensiunilor remanente

$$\sigma_0 = \frac{2Fl}{bhd} \quad (8.31)$$

unde: F este forța de compensare.

La deducerea formulei (8.31), s-a considerat că l' este foarte apropiat de l , adică punctul de acțiune al forței de compensare se confundă cu extremitatea lungimii de depunere. În realitate, această diferență este apreciabilă, conducînd la valori eronate pentru σ_0 .

Stalzer [59] realizează un aparat care are posibilitatea să preia forța de compensare foarte aproape de nivelul electrolitului.

Se demonstrează că în cazul în care lungimea de depunere este egală cu lungimea brațului forței de compensare (fig. 8.43), banda rămâne nedeformată [28].

Determinarea cât mai precisă a tensiunilor remanente cu ajutorul metodei benzii nedeformate cere ca aparatul folosit pentru măsurarea forței de compensare să îndeplinească următoarele condiții :

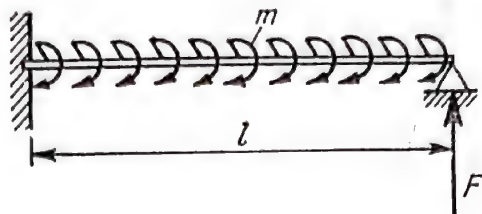


Fig. 8.43.

- 1) preluarea forței de compensare să se facă sub nivelul electrolitului, iar punctul ei de aplicare să fie cât mai aproape de capătul liber al benzii ;
- 2) măsurarea continuă și automată a forței de compensare ;
- 3) posibilitatea de preluare automată a forței de compensare în ambele sensuri ;

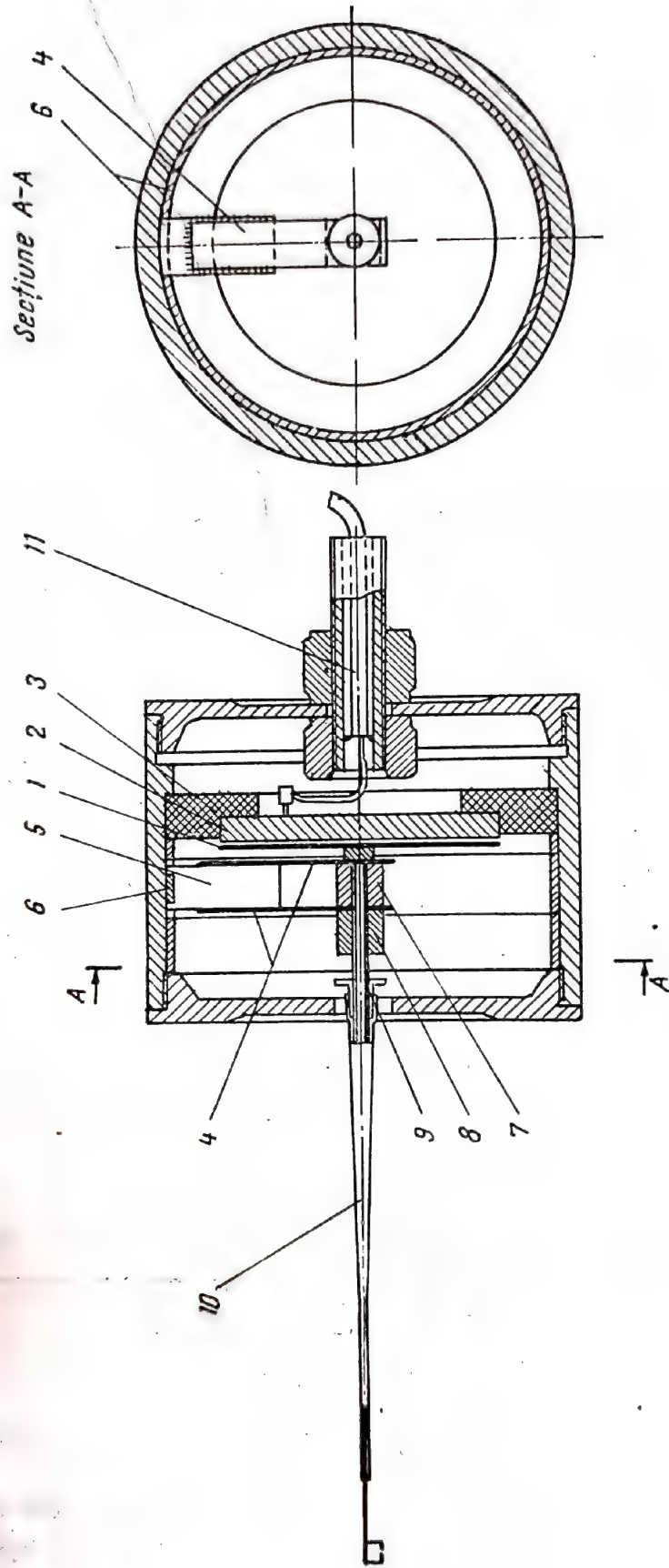
4) deplasarea capătului benzii ce se reazămă pe elementul de preluare a forței de compensare să nu fie mai mare de $5\mu\text{m}$.

Acestor condiții răspunde cu destulă fidelitate traductorul capacitiv — utilizat în metoda prezentată în lucrarea [28]

Condensatorul traductorului (fig. 8.44) este format din plăcile 1 și 2. Placa 1 este sudată pe capătul tijei 9 și montată cu ajutorul distanțierului 7 și piulița 8 pe sistemul elastic alcătuit din benzile 4. Acestea sînt lipite pe inelul 6 prin intermediul suportului 5. La celălalt capăt al tijei 9 se înșurubează piesa cu sonda 10. La capătul sondei este introdusă o piesă specială, prevăzută cu o creștătură la partea inferioară, ce servește pentru prinderea capătului liber al epruvetei pe care se efectuează depunerea. Forma specială a capului sondei este făcută cu scopul de a prelua forța de compensare sub nivelul electrolitului. Apoi cu ajutorul creștăturii și a elasticității sistemului de la capătul sondei se realizează o prindere punctuală a benzii, care permite preluarea forței de compensare în ambele sensuri. Placa 2 este fixată în piesa 3, realizată din material plastic, pentru a realiza izolarea electrică față de carcasă și este legată de aparatul electronic prin cablul ecranat 11.

La această metodă, epruveta pe care se face depunerea trebuie să îndeplinească o condiție esențială în ceea ce privește dimensiunile ei, adică să aibă o asemenea lățime încît să se comporte la deformare ca o grindă și nu ca o placă. Se demonstrează experimental [28] că pentru epruvete de grosimi în jur de $0,1\text{ mm}$ se pot folosi benzi cu lățimi de $1-3\text{ mm}$; influența lățimii asupra mărimii reale a forței de compensare în acest caz este neînsemnată.

De asemenea, avînd în vedere că la această metodă se permite totuși o deplasare foarte mică a capătului liber al epruvetei, înseamnă că prin



aceasta se introduce o eroare în măsurarea forței de compensare. În lucrarea [28] se demonstrează că eroarea este cu atât mai mică cu cât rigiditatea epruvetei este mai mică față de rigiditatea sistemului de susținere a armăturii mobile. Ca urmare, dimensiunile epruvetei și ale sistemului elastic de susținere a armăturii mobile pot fi calculate în așa fel încît eroarea să fie foarte mică.

Prin urmare, un prim avantaj prezentat de acest traductor constă în aceea că el poate fi construit, de așa manieră, încît valoarea măsurată a forței de compensare să fie cît mai apropiată de cea care se produce în grinda nedeformată.

Cel de-al doilea avantaj rezidă în aceea că etalonarea traductorului se face chiar în poziția de lucru.

8.5.3. INSTALAȚIA FOLOSITĂ*)

Electrolitul este conținut în vasul cilindric de sticlă 15 care este introdus în vasul 16. Încălzirea electrolitului se face prin circulația apei calde asigurată de pompa termostatului 18 și tuburile de cauciuc 17. Vasul 16 are pereții exteriori dubli umpluți cu vată de sticlă pentru a menține temperatura constantă în timpul depunerii (fig. 8.45).

Electrozii 11 și 12 sînt solidarizați de bușa alunecătoare 4 prin intermediul pieselor 9 și 10. De aceeași bușă este prins și traductorul capacitiv 1 cu ajutorul pieselor 2 și 3, care permit realizarea deplasării acestuia pe orizontală și pe verticală. Aceste deplasări ale traductorului

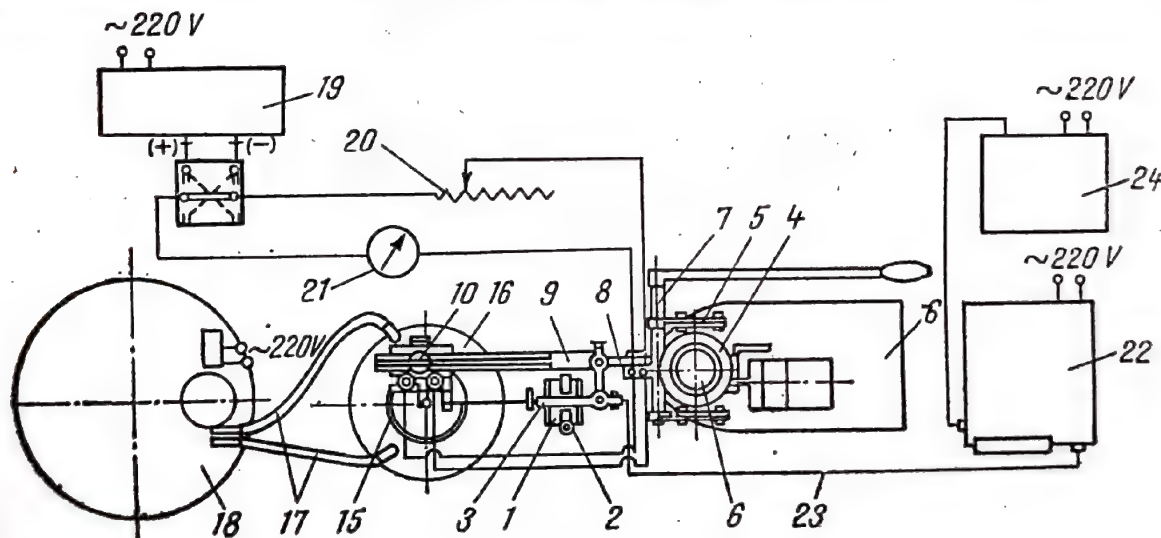


Fig. 8.45.

serveșc la prinderea capătului de sus al epruvetei 14 în creștătura capului sondei.

Întregul ansamblu traductor-electrozi fiind prins de bușa alunecătoare 4 de pe stativul 6 este manevrat pe verticală cu ajutorul manetei

*) Instalația a fost realizată de autor în laboratorul catedrei de Rezistența materialelor de la Institutul politehnic Iași, unde s-au făcut și încercările.

7 și a mecanismului 5 la introducerea electrozilor în baia de acoperire și terminarea acoperirii.

Pentru obținerea intensităților de curent continuu, necesar realizării diferitelor densități de curent pe suprafețele de acoperire ale epruvetelor folosite, s-a dovedit a fi suficient un redresor de curent cu seleniu 19 de 0—24 V și 0—6 A, cuplat cu reostatul 20 de 30 Ω și 5 A. Măsurarea curentului s-a făcut cu miliampermetrul 21.

Semnalul dat de variația de capacitate, datorită variației distanței dintre armăturile condensatorului produsă de tendința epruvetei de a se deforma sub acțiunea tensiunilor remanente din stratul metalic depus, este transmis amplificatorului electronic 22 prin cablul ecranat 23. Aici semnalul este tradus într-o variație de curent, care se citește pe microampermetrul din amplificator. Înregistrarea automată a acestei variații de curent se face cu ajutorul milivoltmetrului înregistrator 24.

8.5.4. REZULTATE EXPERIMENTALE

Depunerile s-au făcut în băi cu compoziție clasică. Astfel :

- a) depunerile de crom în baie cu
 - 250 g/l anhidridă cromică
 - 2,5 g/l acid sulfuric
- b) depunerile de nichel în baia Watts cu
 - 300 g/l sulfat de nichel
 - 55 g/l clorură de nichel
 - 40 g/l acid boric
 - $pH = 5,8$

Depunerile de crom s-au efectuat la temperaturile de 30°, 40°, 50° și 60° C, iar cele de nichel la 35°, 45°, și 55°C

La cromare au fost folosite densități de curent de 20, 30, 40, 50, 60 și 70 A/dm², iar la nichelare densități de 2, 3, 4, 5 A/dm².

Acoperirile s-au făcut timp de 6 minute, deoarece s-a observat că după această durată variația forței de compensare a fost mică.

Grosimea stratului de acoperire s-a calculat cu relația

$$d_i = \frac{\Delta G_i}{\gamma_g b l} \quad (8.32)$$

iar

$$\Delta G_i = \frac{G_i - G_0}{t} \cdot \Delta t_i \quad (8.34)$$

unde : γ_g este greutatea specifică a metalului depus ;

l — lungimea de depunere pe epruvetă ;

b — lățimea epruvetei ;

G_i — greutatea metalului depus în intervalul de timp t_i

Δt_i — intervalul de timp
 G_f — greutatea epruvetei după depunere;
 G_0 — greutatea inițială a epruvetei;
 t — durata totală de depunere.

La cromare s-au folosit epruvete de oțel de $70 \times 2 \times 0,35$ mm, iar la nichelare epruvete de alamă și de oțel de $50 \times 3 \times 0,3$ mm.

Calculul tensiunii remanente s-a făcut cu formula (8.31) transformată în

$$\sigma_{0i} = \frac{2\gamma_0 l}{h} \frac{\Delta F_i}{\Delta G_i} = K \frac{\Delta F_i}{\Delta G_i} \quad (8.35)$$

Pentru cele trei categorii de epruvete, coeficientul K are următoarele valori :

$$K_{\text{epruv. cromare}} = 19,85 \cdot 10^3$$

$$K_{\text{epruv. nichelare, oțel}} = 14,85 \cdot 10^3$$

$$K_{\text{epruv. nichel - alamă}} = 13,25 \cdot 10^3$$

8.5.5. CONFECTIONAREA ȘI PREGĂTIREA EPRUVETELOR

Epruvetele au fost confecționate din lame sau benzi, din metalul pe care s-a făcut depunerea, cu dimensiunile astfel alese încît rezultatele experimentale să fie cît mai apropiate de cele reale.

După controlul dimensional epruvetele au fost izolate cu un strat foarte subțire din lac de bachelită (sub $1 \mu\text{m}$), atît fața opusă suprafeței de depunere cît și muchiile laterale ale epruvetei. Îmbătrînirea lacului s-a făcut în etuvă la temperaturi crescătoare pînă la maximum 140°C .

În vederea finisării suprafeței neizolate, epruvetele au fost lipite cu schellack pe plăci rigide și perfect plane.

După desprinderea lor de pe plăci, suprafețele de depunere au fost degresate și uscate într-un curent de aer.

8.4.6. METODICA MĂSURĂRII ȘI DETERMINĂRII FORȚEI DE COMPENSARE

Toate măsurările, atît la etalonarea traductorului cît și în timpul depunerilor, s-au făcut după ce aparatul electronic a ajuns la temperatura de regim. Apoi, în momentul în care temperatura dorită a băii a fost atinsă, electrozii cu epruveta fixată între capul sondei și locașul de fixare de la electrodul marcat cu semnul (—) s-au introdus în electrolit, manevrînd cu maneta 7 (fig. 8.45).

După această operație, se face legătura electrică pentru efectuarea depunerii.

În timpul depunerii variația forței de compensare, prin intermediul traductorului și amplificatorului electronic, este transformată într-o variație de curent, care este înregistrată de milivoltmetrul înregistrator.

Pe hîrtia de înregistrare se obțin curbe de forma celor din figura 8.46, marcate prin puncte la intervale de timp egale. Curbele din figura 8.46a, rezultă în cazul cînd în stratul depus iau naștere tensiuni inițiale de același semn pe toată durata depunerii, pe cînd cele din figura 8.46, b corespund cazului cînd pe durata depunerii sensul tensiunilor se schimbă.

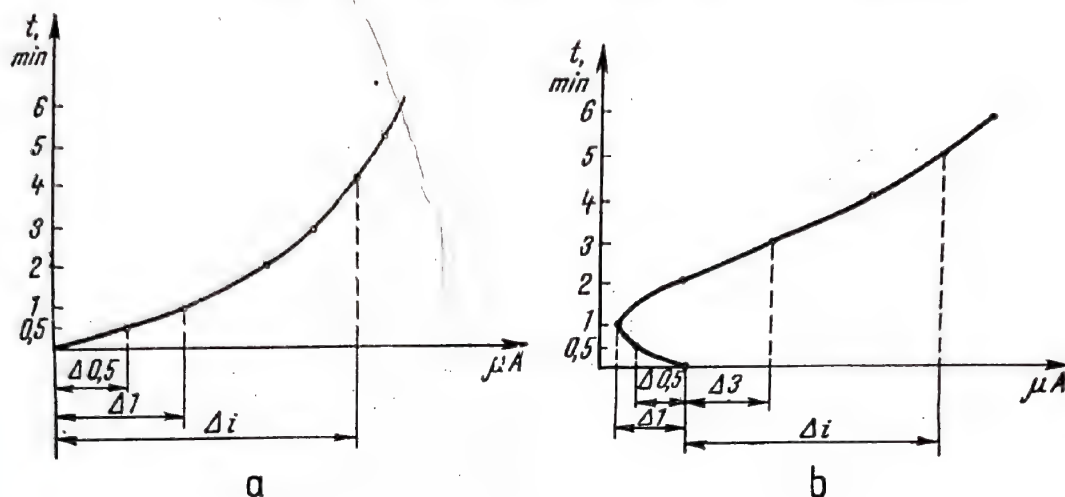


Fig. 8.46.

Convertirea microamperilor înregistrați pe diagramele curbelor obținute, în timpul depunerii, în mărimi de forțe, se face prin utilizarea curbelor de etalonare în felul următor : distanțele Δi de pe fig. 8.46, corespunzînd diviziunilor de pe scara microampermetrului, sînt transpuse pe diagrama curbei de etalonare. În cazul în care s-a menținut aceeași sensibilitate la aparatul electronic, atît la etalonare cît și la depunere, convertirea este directă. În caz contrar, se va ține seama de acest lucru.

a) *Depunerile de crom.* Curbele de variație ale tensiunilor remanente sînt reprezentate în figurile 8.47 a, b, c, d.

Din studiul diagramelor de variație ale tensiunilor remanente rezultă :

- la temperatura de 30°C, tensiunile remanente cresc odată cu creșterea densității de curent δ ;
- la temperatura de 40°C, 50° și 60°C tensiunile descresc odată cu creșterea densității de curent ;
- calitatea suprafeței pe care se face depunerea influențează mărimea tensiunilor remanente, în sensul că acestea cresc odată cu scăderea gradului de finisare a suprafeței de depunere ;
- valorile maxime ale tensiunilor remanente au loc — în depunerile ce se efectuează în băi cu raportul 100 între anhidrida cromică și acid sulfuric — în jurul temperaturii de 50°C.

— tensiunile normale de întindere ating valorile cele mai mari pentru grosimi de strat de 0,25—1 μm , pe cînd cele de compresiune la grosimi de strat de 0,02—0,25 μm . Primul interval se referă la depunerile efectuate la temperaturile de 30°, 40°, 50° și 60°C, iar ultimul la cele obținute la temperatura de 60°C. Apariția tensiunilor de compresiune la începutul depunerilor este semnalată și de lucrările [14] și [19]. În lucrarea [32]

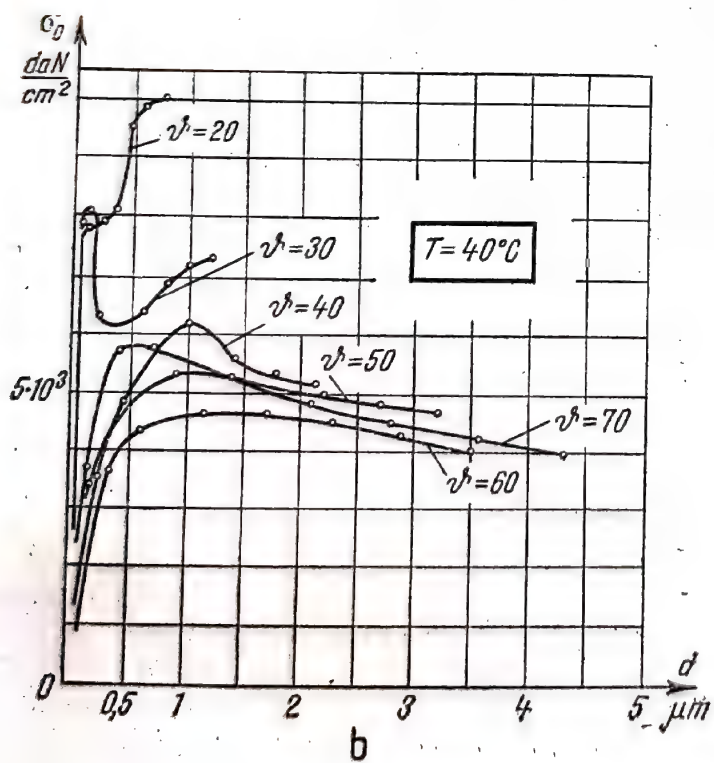
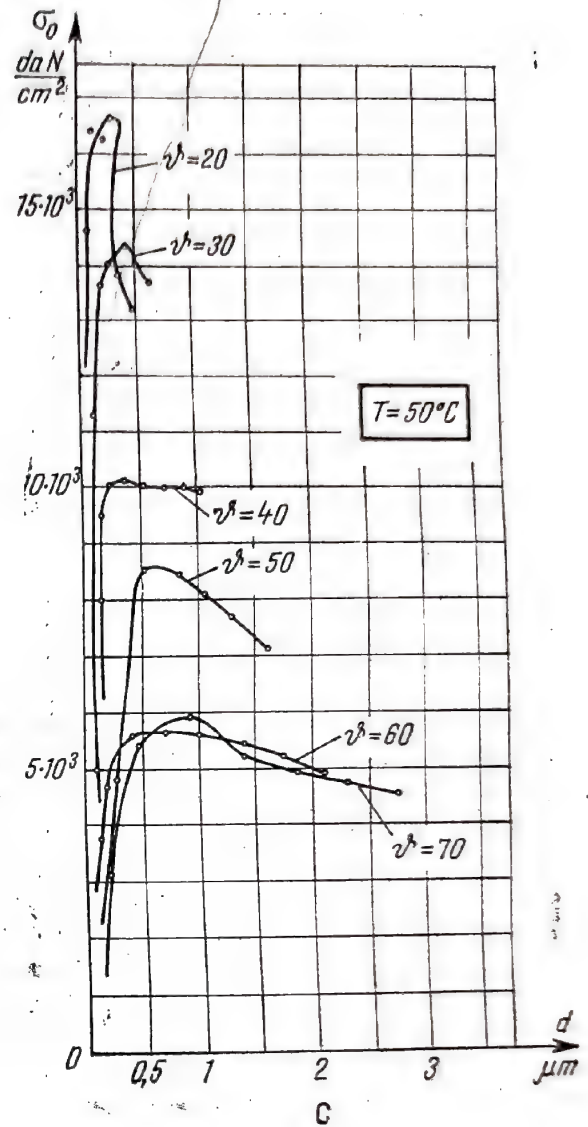
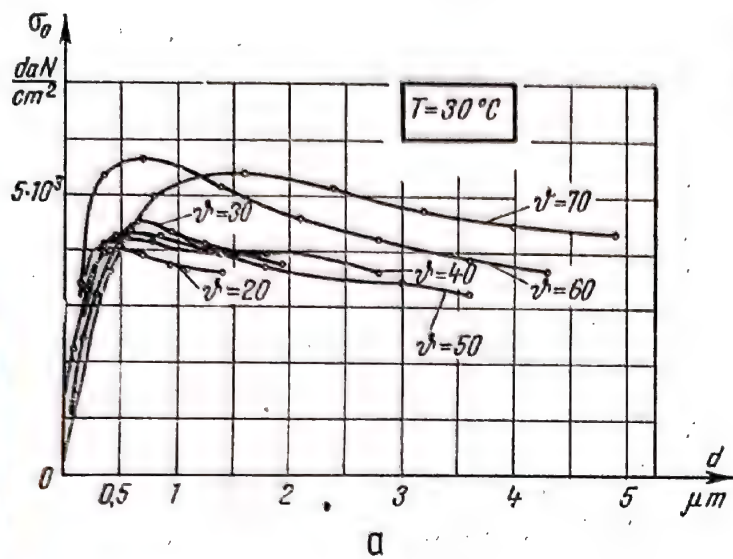


Fig. 8.47

cu toate că s-au făcut depuneri de crom la temperaturi mai mari de 50°C, nu se semnalează apariția acestor tensiuni, probabil din cauza insensibilității aparatului lui Brenner și Senderoff la asemenea forțe mici.

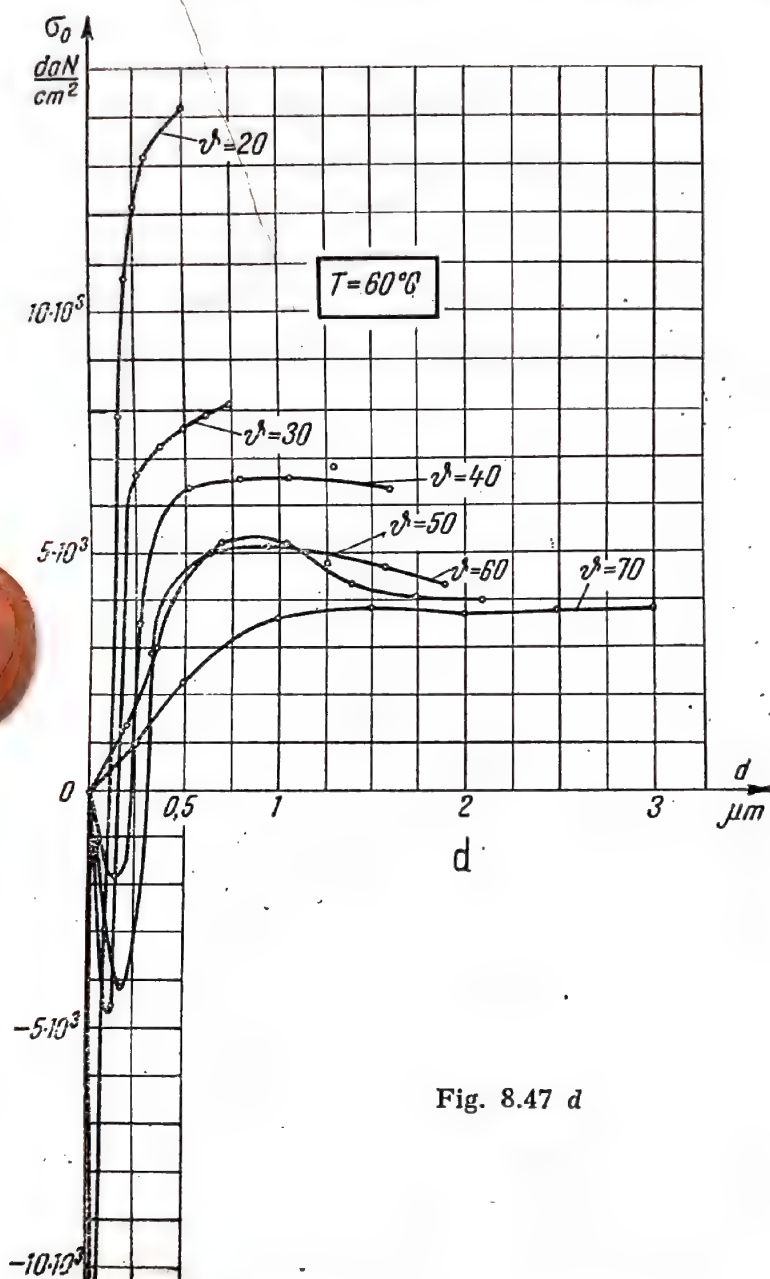


Fig. 8.47 d

b) *Depunerile de nichel.* Din studiul diagramelor prezentate în fig. 8.49 rezultă :

- Efectul temperaturii și a naturii materialului de bază asupra valorii tensiunilor remanente este mic ;
- pH-ul și starea suprafeței pe care se efectuează depunerea influențează mărimea tensiunilor remanente ;

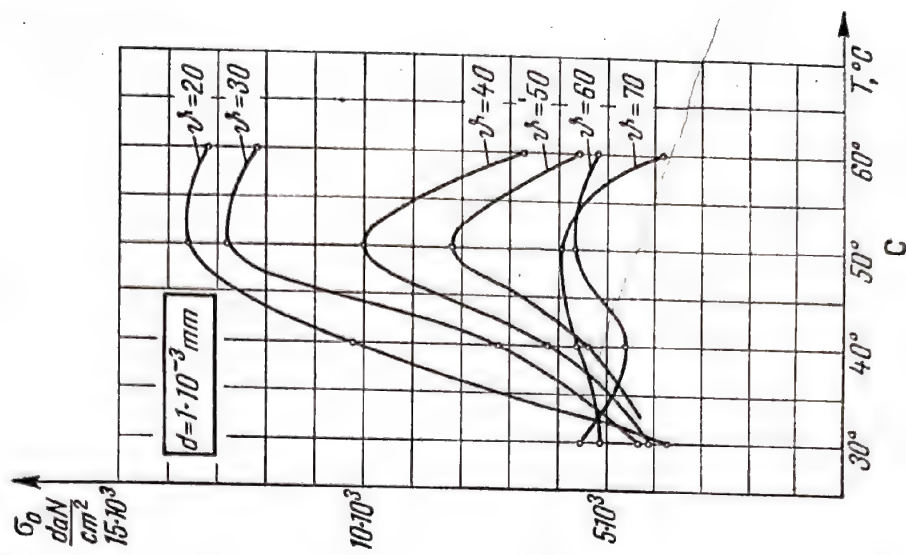
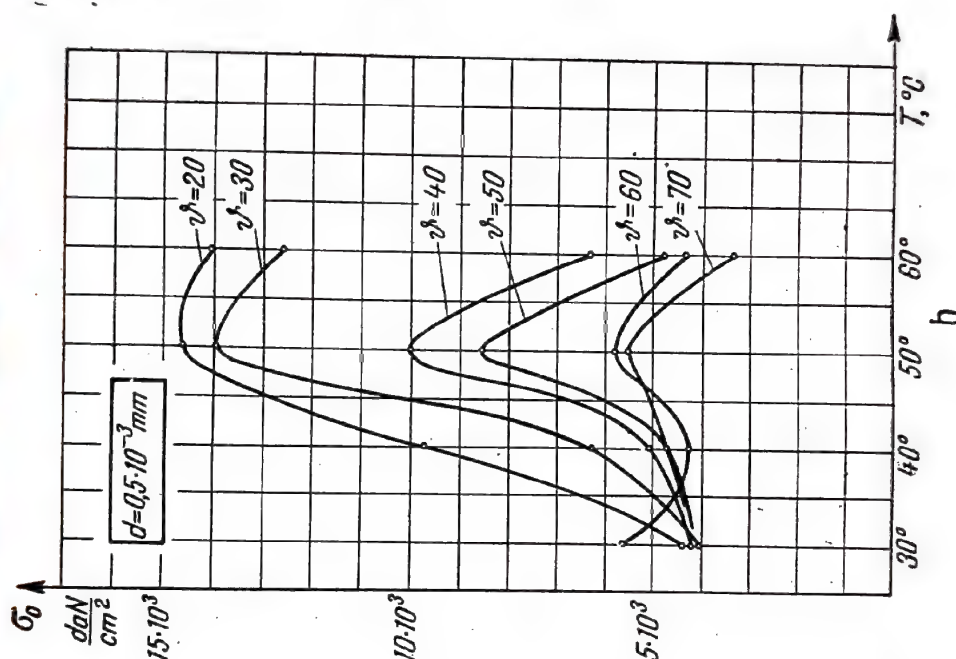
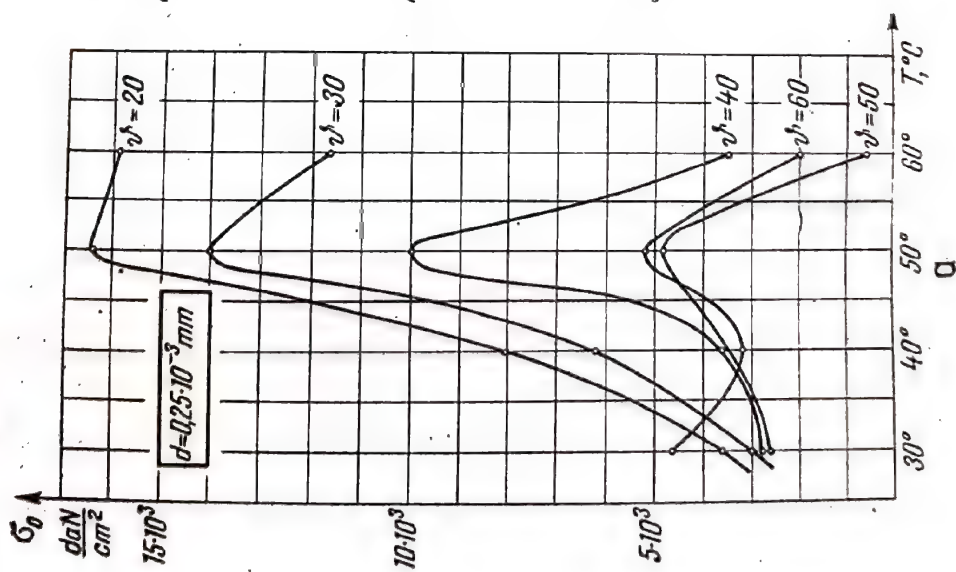


Fig. 8.48

— la temperatura de 55°C tensiunile remanente descresc odată cu creșterea densității de curent.

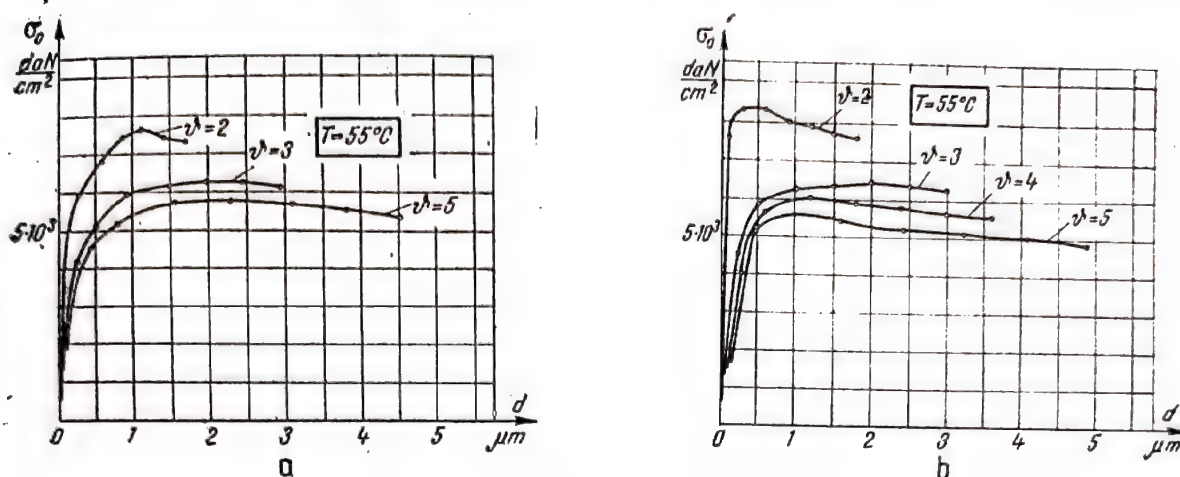


Fig. 8.49

8.6. UTILIZAREA RAZELOR X ÎN TENSOMETRIE

8.6.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Determinarea tensiunilor cu ajutorul razelor Röntgen se bazează pe măsurarea distanțelor dintre planele rețelelor atomice, care se găsesc în constituția internă a tuturor materialelor cristaline.

Se știe că razele Röntgen, sau X sînt datorite emisiei de electroni dintr-un fir catodic incandescent, în tuburi Röntgen cu vid — tuburi electronice. Tubul electronic este format dintr-un tub de sticlă cu un vid foarte înaintat de $(10^{-6} - 10^{-7})$ mm Hg. În tub sînt fixați, prin lipire, cei doi electrozi. Catodul este format dintr-un filament de wolfram în formă spirală, încălzit pînă la incandescență cu ajutorul unui curent de joasă tensiune. Filamentul este înconjurat de un cilindru care modifică în așa fel cîmpul, încît electronii se concentrează pe anod sau anticatod într-un focar fin. Anodul sau anticatodul este format dintr-un bloc masiv de metal refractar dens (platină sau tungsten), a cărui suprafață plană este înclinată la aproximativ 45° . Diferența de potențial dintre anod și catod este de $(40 - 200)$ kV. Filamentul incandescent al catodului emite în vid electronii care obțin o viteză foarte mare în cîmpul electric de mare intensitate, cu care se ciocnesc de catod, radiind, sub anod, raze Röntgen în toate direcțiile. Mantaua de protecție, postamentul anodului și tubul de metal sînt legate de pămînt.

Razele Röntgen au proprietăți analoge proprietăților razelor luminoase și altor radiații electromagnetice. Aceste proprietăți sînt următoarele :

- se propagă rectiliniu ;
- traversează cu ușurință corpurile opace pentru lumină vizibilă ;
- sînt reflectate de planele atomice ale cristalelor ;
- impresionează placa fotografică ;
- produc fluorescența tubului de sticlă care, în zona situată sub anod, ia o culoare verzuie ;

— ionizează aerul;

— nu sînt deviate de cîmpul magnetic (fiindcă nu au sarcină electrică).

Unele din aceste proprietăți fac posibilă determinarea tensiunilor cu ajutorul acestor raze în cazul materialelor cristaline. Deosebirea între corpurile cristaline și amorse constă în constituția cristalelor, în limitarea prin suprafețe plane sau curbe. De aici derivă proprietățile importante, între care dependența proprietăților fizice de direcție (interferență, rezistență, solubilitate, viteză de creștere etc.).

Această dependență de direcție este bazată pe constituția cristalelor de atomi. Configurația exterioară este o urmare a constituției interioare. Cristalele sînt așezări neregulate de particule identice, plasate în vîrfurile unor paralelipiede egale și alăturate. Particulele constituente ale cristallului pot fi atomi sau ioni, molecule sau grupuri de molecule. Forțele de coeziune în cristal sînt forțele electrostatice dintre ioni. Ansamblul paralelipipedelor egale constituie o rețea. Vîrfurile în care sînt așezate particulele formează nodurile rețelei. O proprietate importantă a rețelei cristaline este periodicitatea ei spațială. Aceasta constă în proprietatea rețelei de a coincide cu ea însăși, prin translația cu o anumită mărime numită parametru de translație. Parametrii de translație ai rețelei pot fi reprezentați prin vectori corespunzători translațiilor.

În spațiul cu o singură dimensiune, deci pe o dreaptă, dacă se alege un nod al rețelei ca origine, întregul spațiu poate fi umplut prin alipirea (de o parte și de alta a originii) de vectori egali cu parametrul rețelei. În spațiul cu două dimensiuni, deci în plan, această adunare se poate face prin alipirea de paralelograme.

În spațiul cu trei dimensiuni se pot alege trei parametri reprezentați prin trei vectori necoplanari, pe care se poate construi un paralelipiped, numit celula elementară. Întreaga rețea cristalină este formată din alăturarea, pe cele trei direcții spațiale, a unor astfel de celule elementare, identice în ce privește proprietățile lor geometrice și fizice. Mulțimea tuturor nodurilor echivalente care pot fi aduse la suprapunere prin translații formează așa numita *rețea Bravais* a cristallului. Rețeaua Bravais nu cuprinde toate nodurile rețelei cristaline, deci în cristal există mai multe rețele Bravais.

În anumite cazuri trebuie să se precizeze un plan oarecare în rețeaua cristalină. Planele definite prin trei noduri oarecare ale rețelei cristaline se numesc *plane reticulare*. Toate planele reticulare paralele între ele formează o familie de plane. Ele sînt plane de mare densitate reticulară.

Pentru determinarea planelor cristalografice se utilizează două sisteme de referință și anume:

— Sistemul Weiss și Rose, sau sistemul parametric — axa Ox dirijată cu sensul pozitiv spre observtor, axa Oy spre dreapta, iar axa Oz verticală cu sensul pozitiv în sus (fig. 8.50);

— Sistemul Miller utilizează indicii hkl . Aceasta este notația curent utilizată în calculele cris-

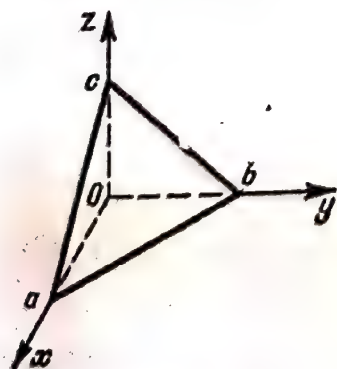


Fig. 8.50

talografice. Indicii se obțin din valorile reciproce ale tăieturilor planului de bază pe axele de coordonate, care se înmulțesc cu un anumit număr, astfel ca indicii să fie numere întregi.

De exemplu planul cu indicii (324) taie axele la distanțele $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{4}$; planul (001) taie pe axe distanțele $a = b = \frac{1}{0} = \infty$ și $c = \frac{1}{1} = 1$.

Planele care taie părțile negative ale axelor au indicii negativi, iar semnul minus se pune deasupra numărului ($\bar{h} \bar{k} \bar{l}$):

Dispoziția reglată a nodurilor rețelei constituie simetria structurii cristaline, care la rândul ei determină o aranjare regulată a fețelor, muchiilor și colțurilor. Repetarea regulată a acestor forme exterioare constituie simetria geometrică a cristalului. După caracterele lor generale de simetrie, cristalele se împart în șapte sisteme cristalografice. După Weiss, prin sistem cristalografic se înțelege totalitatea formelor poliedrice ale căror fețe pot fi raportate, ca poziție în spațiu, la același sistem de referință, adică la aceleași axe cristalografice.

Determinarea tensiunilor se bazează pe deformația rețelei cristaline, adică pe modificarea distanței dintre planele reticulare, datorită solicitării. Prin distanța d a rețelei se înțelege distanța — măsurată pe perpendiculară — dintre două plane succesive ale aceleiași rețele. Deformația specifică este

$$\epsilon = \frac{d_1 - d}{d} \quad (8.36)$$

unde d_1 este distanța reticulară după solicitare.

Deci, pentru calculul deformației specifice trebuie să se cunoască distanța d . Determinarea acestei distanțe se poate face pe cale analitică sau pe cale experimentală.

8.6.2. DETERMINAREA DISTANȚEI RETICULARE PE CALE ANALITICĂ

Se consideră un plan caracterizat de indicii (hkl) și un nod așezat în acel plan care are raza vectoare \bar{R}_{mnp} , un vector cuprins în plan. Vectorul unitate al normalei la plan este

$$\frac{\bar{H}_{hkl}}{H_{hkl}}.$$

Ecuatia planului se obține scriind condiția ca produsul scalar al celor doi vectori să fie nul

$$\bar{R}_{mnp} \cdot \frac{\bar{H}_{hkl}}{H_{hkl}} = 0. \quad (8.37)$$

În funcție de vectorii-parametri ai rețelei, raza vectoare are expresia

$$\bar{R}_{mnp} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}. \quad (8.38)$$

Vectorul normalei la plan se poate scrie în funcție de parametrii rețelei și în funcție de indicii planului

$$\bar{H}_{hkl} = \frac{(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot k}{V} + \frac{(\bar{c} \times \bar{a}) \cdot l}{V} + \frac{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot l}{V}. \quad (8.39)$$

Această expresie poate fi scrisă și în funcție de *vectorii reciproci* ai rețelei

$$\bar{H}_{hkl} = h\bar{a}^* + k\bar{b}^* + l\bar{c}^*. \quad (8.40)$$

Acest vector este paralel cu normala la planul (hkl) și se numește vectorul reciproc al planului (hkl) .

Se introduce această valoare în ecuația planului și se ține seamă de condițiile care definesc vectorii reciproci

$$(m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}) \cdot (h\bar{a}^* + k\bar{b}^* + l\bar{c}^*) = 0;$$

$$hm + kn + lp = 0$$

După cum se știe, primul plan poate fi obținut prin translație de la 0 la $\frac{a}{h}$ sau la $\frac{b}{k}$ sau la $\frac{c}{l}$. Dacă se mută originea coordonatelor cu un vector $-\frac{a}{h}$, numărătoarea nodurilor rămâne aceeași, raza vectoare a nodului (mnp) va fi egală cu

$$\bar{R}_{mnp} \cdot \frac{\bar{H}_{hkl}}{H_{hkl}} = d_{hkl}. \quad (8.41)$$

în care d_{hkl} este distanța acestui plan la origine, adică distanța dintre plane. Rezultă deci

$$\left(m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c} + \frac{a}{h} \right) \cdot \frac{(h\bar{a}^* + k\bar{b}^* + l\bar{c}^*)}{H_{hkl}} = d_{hkl}$$

sau

$$d_{hkl} = \frac{1}{H_{hkl}}. \quad (8.42)$$

Vectorul reciproc \bar{H}_{hkl} al planului (hkl) este îndreptat după normala la planul (hkl) și este egal cu distanța dintre planele familiei (hkl) . Lungimea vectorului \bar{H}_{hkl} se calculează cu formula

$$H_{hkl}^2 = h^2\bar{a}^{*2} + k^2\bar{b}^{*2} + l^2\bar{c}^{*2} + 2hk\bar{a}^*\bar{b}^* \cos \gamma + 2kl\bar{b}^*\bar{c}^* \cos \alpha + 2lh\bar{c}^*\bar{a}^* \cos \beta \quad (8.43)$$

care servește pentru determinarea echidistanței, căci

$$H_{hkl}^2 = \frac{1}{d_{hkl}^2}. \quad (8.44)$$

Parametrii reciproci ai rețelei se pot înlocui cu parametri direcți

$$\left\{ \begin{array}{l} a^* = \frac{1}{V} bc \sin \alpha \\ b^* = \frac{1}{V} ca \sin \beta \\ c^* = \frac{1}{V} ab \sin \gamma \\ \cos \alpha^* = \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\ \cos \beta = \frac{\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} \\ \cos \gamma = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \end{array} \right. \quad (8.45)$$

Expresia echidistanței devine

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{V^2} [& h^2 b^2 c^2 \sin^2 \alpha + k^2 c^2 a^2 \sin^2 \beta + l^2 a^2 b^2 \sin^2 \gamma + \\ & + 2hkabc^2(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) + 2kla^2bc(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) + \\ & + 2lhab^2c(\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta)]. \end{aligned}$$

Se fac următoarele notații

$$\begin{aligned} S_{11} &= b^2 c^2 \sin^2 \alpha \\ S_{22} &= c^2 a^2 \sin^2 \beta \\ S_{33} &= a^2 b^2 \sin^2 \gamma \\ S_{12} &= abc^2(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \\ S_{23} &= a^2 bc(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \\ S_{31} &= ab^2 c(\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Cu aceste notații expresia echidistanței devine

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{V^2} (S_{11} \cdot h^2 + S_{22} \cdot k^2 + S_{33} \cdot l^2 + 2S_{12} \cdot hk + 2S_{23} \cdot kl + 2S_{31} \cdot lh). \quad (8.47)$$

Volumul celulei elementare se calculează cu ajutorul determinantului Gram

$$V^2 = (\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c})^2 = \begin{vmatrix} a^2 \bar{a} \ \bar{b} \ \bar{a} \ \bar{c} \\ \bar{b} \ \bar{a} \ b^2 \ \bar{b} \ \bar{c} \\ \bar{c} \ \bar{a} \ \bar{c} \ \bar{b} \ c^2 \end{vmatrix};$$

$$V^2 = abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \quad (8.48)$$

Ținând seamă de parametrii a, b, c și de unghiurile α, β, γ ale celulei elementare, se va scrie expresia volumului și a distanței dintre planele reticulare. Sistemele cristalografice sînt:

Sistemul triclinic. Înglobează cristalele lipsite de elemente de simetrie și cele care au cel mult un centru de simetrie. Axele cristalografice de referință se aleg după trei muchii principale ale cristalului, care se întîlnesc într-un colț. Parametrii rețelelor pe cele trei direcții sînt diferiți și unghiurile dintre axe sînt diferite

$$a \neq b \neq c;$$

$$V = abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Sistemul monoclinic sau clinorombic în care parametrii au lungimi diferite și unul este perpendicular pe ceilalți doi

$$a \neq b \neq c; \quad \alpha = \gamma = 90^\circ; \quad \beta \neq 90^\circ;$$

$$V = abc \sin \beta; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2 \sin^2 \beta} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2 \sin^2 \beta} - \frac{2 hl \cos \beta}{ac \sin^2 \beta}. \quad (8.49)$$

Sistemul rombic (paralelipipedic) în care parametrii au lungimi diferite și formează între ei unghiuri drepte

$$a \neq b \neq c; \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ;$$

$$V = abc; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2. \quad (8.50)$$

Sistemul hexagonal în care, dintre cei trei parametri, doi au valori egale și fac între ei 120° , fiind perpendiculari pe al treilea

$$a = b \neq c; \quad \alpha = \beta = 90^\circ; \quad \gamma = 120^\circ$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{4}{3} \frac{h^2 + k^2 + hk}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}. \quad (8.51)$$

Caz particular : sistemul ortohexagonal

$$a_0 = a\sqrt{3}; \quad b_0 = a; \quad c_0 = c; \quad \alpha = \beta = 90^\circ; \quad \gamma = 120^\circ; \quad (8.52)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 c; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 + \left(\frac{l}{c} \right)^2.$$

Sistemul romboedric în care parametrii au valori egale și fac între ei unghiul α .

$$V = a^3 \sqrt{1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha};$$

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{(h^2 + k^2 + l^2) \sin^2 \alpha + 2(hk + kl + lh)(\cos^2 \alpha - \cos \alpha)}{a^2(1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha)}. \quad (8.53)$$

Sistemul tetragonal (pătratic) în care doi dintre parametri au valori egale și toate unghiurile sînt drepte

$$a = b \neq c; \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ;$$

$$V = a^2 c; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}. \quad (8.54)$$

Sistemul cubic (teseral) în care parametrii au valori egale și unghiurile sînt drepte

$$a = b = c; \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ;$$

$$V = a^3; \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2}. \quad (8.55)$$

Din aceste relații rezultă că, în funcție de indicii planului reticular și de parametrii rețelei, se poate calcula distanța dintre planele reticulare pentru fiecare sistem de cristalizare.

8.6.3. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A DISTANȚEI RETICULARE D

Determinarea experimentală a distanței d se face utilizînd formula Bragg-Wulf.

Se presupune o rețea de plane reticulare, deci o familie de plane, situate la aceeași distanță. Se consideră două plane vecine P_1 și P_2 . Planele atomice ale cristalului reflectă razele X (fig. 8.51).

Planul P_1 reflectă raza incidentă I , dînd o rază reflectată R în direcția reflexiei regulate. În virtutea proprietății razelor X de a trece prin

material, fasciculul paralel de raze traversează planul P_1 și va fi reflectat de planul P_2 în direcția reflexiei regulate. Deci razei incidente I' îi corespunde raza reflectată R' . Planele P_1 și P_2 fiind paralele, razele reflectate de ele sînt, de asemenea, paralele și, în general, defazate. Pentru ca să fie în fază, trebuie să fie satisfăcută condiția ca diferența de drum dintre razele reflectate R și R' să fie egală cu un număr întreg de lungimi de undă.

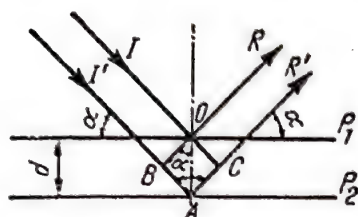


Fig. 8.51

Din figura 8.51 rezultă diferența de drum

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 2 \cdot \overline{OA} \sin \alpha = 2d \sin \alpha.$$

Aceasta trebuie să fie egală cu $n\lambda$, adică

$$2d \sin \alpha = n\lambda \quad (8.56)$$

în care n este un număr întreg.

Expresia (8.56) reprezintă formula Bragg-Wulf, din care se poate calcula distanța d dintre planele reticulare, dacă se cunoaște lungimea de undă λ a unui fascicul monocromatic de raze X și dacă se măsoară unghiul α .

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \alpha}. \quad (8.57)$$

Metoda röntgenografică este limitată la materialele cristaline, la metale. Se utilizează raze X cu lungimi de undă foarte mari (1,5—2,5) Å și cu forță de pătrundere mică — numai câteva sutimi de milimetru. Datorită acestui fapt ele sînt proprii pentru determinarea tensiunilor la suprafața piesei. Suprafața radiată e mică (1—3) mm diametru, deci se pot cerceta tensiunile localizate. Se determină numai deformațiile elastice și nu — ca la măsurarea mecanică a deformațiilor — suma deformațiilor elastice și plastice. Metoda röntgenografică include starea absolută de solicitare, de aceea este potrivită pentru *determinarea tensiunilor remanente*. Metoda este utilizată cu precizie satisfăcătoare la metalele cu granulație fină, care dau dungi fine și mai puțin utilizabilă la metale cu granulație grosolană, unde erorile sînt mai mari din cauza grosimii neuniforme a dungilor.

8.6.4. DETERMINAREA UNGHIULUI α

Determinarea unghiului α se face prin metoda Debye-Scherrer, în camera cilindrică, sau prin metoda razelor inversate, în camera plană. Cristalele reflectă razele X în toate direcțiile. Cristalele care satisfac legea Bragg-Wulf dau reflexii care se adună și produc înnegrirea filmului sub formă de inele. Fiecare inel corespunde razelor reflectate de către planele cristaline cu anumiți indici h, k, l .

În funcție de scopul analizei se folosesc camere de diferite tipuri. O astfel de cameră este cea de tipul Debye-Scherrer, care constă dintr-un cilindru de alamă cu diametrul interior de 80 mm (fig. 8.52). Într-un canal al peretelui interior este așezat filmul care este apăsător cu două resoarte

puternice. O așezare bună a filmului este o garanție a măsurării precise a diametrului inelului. Capacul camerei este bine închis pentru a împiedica pătrunderea razelor de lumină. În partea de jos a camerei este un con centrat cu precizie, care servește la fixarea epruvetei de cristal. Epruveta

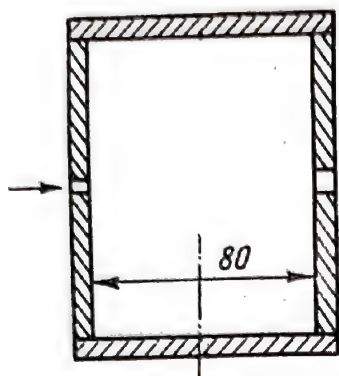


Fig. 8.52

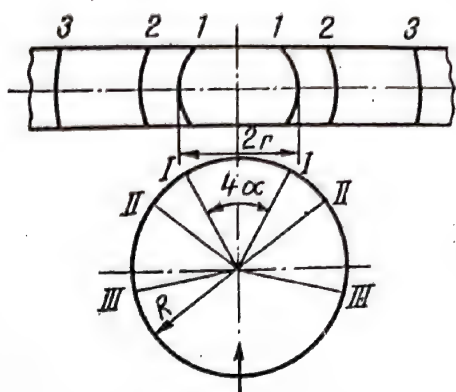


Fig. 8.53

este confecționată din materialul ce se analizează și are forma cilindrică, lungă de 10 ... 12 mm și diametrul de 0,8 ... 1 mm. Ea trebuie să fie așezată în centrul de curbură al filmului cilindric și axa ei trebuie să fie paralelă cu axa de rotație, căci altfel se obțin inele nesimetrice. Tubul de adaos din spatele camerei îndeplinește un rol dublu. Când se așează la un bec aprins și se caută poziția luminozității maxime a radiației, umbra barei trebuie să fie în mijlocul suprafeței luminate. Prin tubul de adaos razele primare pot părăsi camera fără a trece prin peretele metalic, căci altfel pe lângă o radiație secundară difuză, s-ar putea produce și interferențe care pe filmul de la tubul Röntgen ar da inele suplimentare. Din același motiv înainte de așezare se face în film o deschidere circulară pentru ieșirea radiațiilor primare.

Printr-un orificiu mic (colimator) se dirijează un fascicul de raze X monocromatic spre epruvetă în direcția radială a camerei (fig. 8.53). După legea lui Bragg-Wulf, razele monocromatice sînt reflectate de către planele atomice ale cristalelor pe care cad sub un unghi determinat de relația

$$\sin \alpha = \frac{nd}{2d} \quad (8.58)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Datorită faptului că epruveta policristalină este alcătuită dintr-un număr mare de cristale mici, se va forma un sistem întreg de plane reflectoare iluminate de razele incidente. Razele reflectate formează o suprafață continuă în formă conică, avînd la vîrfurile conului, între generatoarele opuse, un unghi egal cu 4α . Conul de raze întretaie filmul și îi produce înnegrirea în formă de linii curbe sau inele. Fiecare inel corespunde razelor

reflectate de lungimea λ de către planele cristaline cu anumiți indici: h, k, l . Liniile de intersecție ale conului de interferență cu filmul cilindric așezat în jurul lui 0 sînt curbe de gradul 4. Ele sînt aproximativ cercuri pentru valorile mai mici și mai mari ale lui α și degenerază în linii drepte pentru $2\alpha = 90^\circ$.

Fiecare inel Debye-Scherrer de pe filmul desfășurat corespunde astfel reflexiei cu lungimea de undă λ la un anumit fel de plane de rețea. Inelele sînt uniform înnegrite cînd cristalele sînt așezate neregulat și dacă mărimea lor nu depășește $1/100$ mm. La orientarea regulată a cristalelor se produc îngrămădiri de inele. Cînd cristalele sînt mai mari decît $1/100$ mm, inelele sînt reduse la unele înnegriri punctiforme. Prin rotirea epruvetei cristaline în timpul experienței se poate ajunge la o înnegrire uniformă a liniilor prin suprapunerea mai multor cristale.

Prin diametrul $2r$ al unui inel (fig. 8.54) se înțelege distanța măsurată de la raza incidentă la ambele jumătăți simetrice ale inelului după desfășurarea filmului (porțiunea de curbă $I-I$).

Pentru o rază R a camerei, rezultă unghiul de reflexie

$$2r = R \cdot 4\alpha$$

sau

$$\alpha = \frac{r}{2R} \quad (8.59)$$

Deci unghiul de reflexie α se poate determina din relația (8.59) cunoscînd raza camerei R și măsurînd de pe film diametrul $2r$ al unui inel. Cunoscînd lungimea de undă λ a razelor X utilizate, din relația Bragg-Wulf se poate determina distanța dintre plane.

Cu cît este mai mare diametrul inelului, cu atît este mai mare unghiul de reflexie și cu atît este mai mică distanța dintre planele rețelei cristaline,

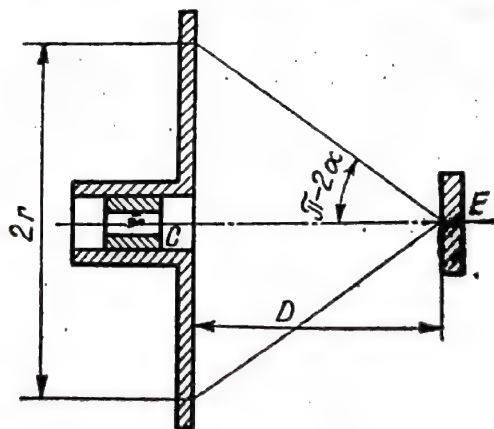


Fig. 8.54

la lungime de undă dată. Inelele cu unghiuri mici sînt, în general, cele mai intense. Poziția și raportul intensității inelului la o rază dată a camerei sînt dependente de structura cristalului și de lungimea de undă a razelor Röntgen.

De mare importanță este puritatea radiației. Afară de radiația dorită nu trebuie să intervină altă radiație. Este recomandabil ca din timp în timp să se cerceteze puritatea radiației cu un material cu rețea simplă și cunoscută.

În multe cazuri se utilizează camera plană. Aceasta este formată dintr-un disc metalic găurit, pe care se pune filmul acoperit cu un disc negru, opac. Camera se fixează pe aparat. Printr-un colimator C (fig. 8.43) razele Röntgen ies din aparat, lovesc epruveta de care sînt reflectate spre cameră și impresionează filmul. Razele care satisfac legea Bragg-Wulf produc pe film niște înnegriri în formă de cercuri. Din aceste cercuri se determină unghiul α . De pe fig. 8.54 se poate scrie relația

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = \frac{r}{D} \quad (8.60)$$

D este distanța epruvetă-film, $2r$ — diametrul cercului.

Diametrul cercului se măsoară cu microscopul comparator sau cu fotometrul. La măsurarea cu microscopul comparator diametrul $2r$ se socotește între mijloacele dungilor înnegrite, iar la măsurarea cu fotometrul între dungile cu înnegrire maximă.

8.6.5. DETERMINAREA PARAMETRILOR REȚELEI

Sistemul cristalografic cu cele mai multe elemente de simetrie este sistemul cubic sau tesimal. În acest sistem cristalizează unele metale: fierul, cuprul, aluminiul, argintul etc. Pentru acest sistem calculele sînt mai simple, fiind determinat printr-un singur parametru a — muchia cubului celulei elementare.

În lucrarea [65] se prezintă modul de determinare a parametrului „ a ” pentru o sîrmă de fier cu grosimea de 0,9 mm*).

Distanțele pe film au fost măsurate cu microscopul. S-a făcut și o corecție cu formula dată de Hadding

$$\begin{aligned} 2r_c &= 2r - \rho(1 + \cos 2\alpha) \\ r_c - r &= \Delta = \frac{\rho}{2} (1 + \cos 2\alpha) \end{aligned} \quad (8.61)$$

unde ρ este raza sîrmei.

Cunoscînd lungimea de undă a radiației Röntgen se găsește distanța reticulară d_i . În funcție de raportul d_i^2/d_1^2 se găsesc în tabelele de structura [20] indicii planelor reticulare hkl . În funcție de acești indici din formula pătratică se calculează parametru a al rețelei. Pentru sîrma de fier s-a găsit $a = 2,862 \text{ \AA}$ față de $2,8606 \text{ \AA}$ cit se dă în tabelele din lucrarea [24].

*) Determinările au fost făcute de autor la ISPTT-București.

S-a procedat la fel cu sîrma de cupru cu diametrul de 0,5 mm.

Măsurarea distanțelor pe film s-a făcut cu fotometrul. Rezultatele sînt date în tabelul din lucrarea [66].

S-a obținut $a = 3,59759 \text{ \AA}$ față de 3,6080 din tabele. Dacă se neglijează prima și a patra valoare care sînt mai depărtate de medie se obține $a = 3,60894$ valoare mai apropiată de cea găsită în tabele.

8.6.6. DETERMINAREA SUMEI TENSIUNILOR PRINCIPALE

Se pleacă de la legea lui Hooke generalizată exprimată prin relația (1.24). Dacă

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2 \text{ și}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0, \text{ se obține}$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_1 = -\mu (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{E}$$

sau

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{E}{\mu} \epsilon_1 \quad (8.62)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{E}{\mu} \frac{d_1 - d}{d}$$

Din relația (8.62) se vede că pentru determinarea sumei tensiunilor trebuie să se cunoască distanța d între planele rețelei cristaline în starea fără tensiuni și distanța d_1 ce se obține printr-o fotografiere perpendiculară. *Prin această metodă se pot determina tensiunile remanente.*

Aplicație. Epruveta E este fixată într-un cadrul și legată în serie cu un dinamometru D . Prin intermediul piuliței cu aripioare P , epruveta este solicitată la întindere (fig. 8.55). Materialul epruvetei este fier sau cupru.

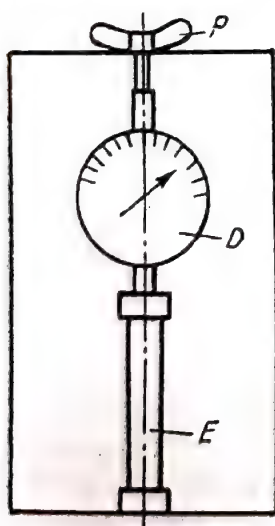


Fig. 8.55

Aparatul Röntgen utilizat la determinarea tensiunilor este un aparat special; poate fi utilizat și un aparat pentru cercetarea structurii materialelor.

La cercetările făcute de autor s-a utilizat camera plană.

Epruveta s-a pus în fața colimatorului la distanța indicată în cartea aparatului (ex. $D = 80 \text{ mm}$).

Din relația (8.60) se calculează unghiul $(\pi - 2\alpha)$, apoi α în radiani și α° . Acest calcul este aproximativ, fiindcă distanța D nu s-a măsurat cu aceeași precizie ca și distanța r . Pentru a determina și distanța D cu aceeași precizie, se utilizează un material etalon, care poate fi pulbere de aur, argint sau, în lipsă, pulbere de aluminiu pur. Pulberea se lipește cu un liant pe suprafața de reflexie a epruvetei. În acest caz pe film vor apare

două cercuri, unul corespunzător materialului etalon și altul materialului epruvetei. Se măsoară diametrele celor două cercuri cu microscopul comparator sau cu fotometrul. Se face calculul arătat mai sus pentru materia-

lul etalon. Corespunzător valorii aproximative a unghiului α , se ia din manuale [20] valoarea exactă. Aceasta se introduce în relația (8.60) și se recalculează distanța exactă D . Având distanța exactă D , se calculează unghiul α pentru materialul epruvetei. Se calculează apoi $\sin\alpha$. Egalând valoarea lui d din formula Bragg-Wulf cu cea din formula pătratică, rezultă

$$\sin \alpha = \frac{n\lambda}{2a} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (8.63)$$

În loc de a calcula cu ordinul n este mai simplu de a înmulți indicii hkl . În acest fel s-au întocmit tabelele de structură separat pentru materialele cu fețe centrate sau cu volum centrat. Corespunzător valorii lui $\sin\alpha$, din tabelul de structură se află planul de reflexie cu indicii hkl . Din formula Bragg-Wulf se calculează distanța d , iar din formula pătratică muchia celulei elementare. Operația se face de două ori, întâi pentru epruveta nesolicitată, determinându-se distanța d , iar apoi pentru epruveta solicitată, determinându-se din nou distanța d . Se observă că în ambele cazuri radiațiile sînt perpendiculare, iar camera este rotită. Cu formula (8.62) se calculează suma tensiunilor. Verificarea determinării pe cale röntgenografică se face cu formula

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}. \quad (8.64)$$

Sarcina P se măsoară cu dinamometrul, iar dimensiunile secțiunii A cu micrometrul.

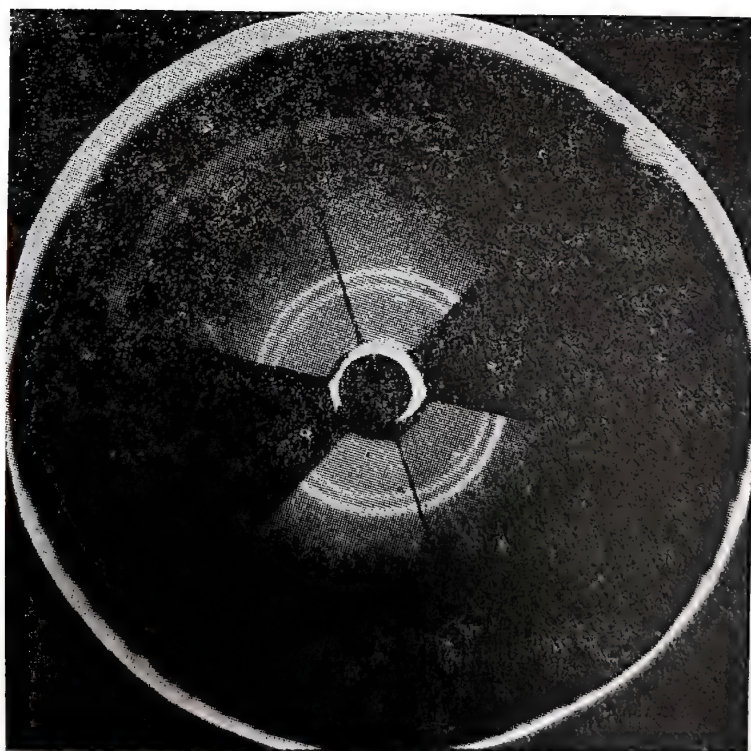


Fig. 8.56

S-a folosit această metodă [65] pentru determinarea tensiunilor în epruvete de tablă, de cupru și de fier (fig. 8.56, fig. 8.57).

Pentru determinarea distanței epruvetă-film, la metoda razelor inversate s-a utilizat ca material-etalon pulbere de aluminiu pur. Măsurarea distanțelor pe filme a fost făcută cu microscopul comparator și cu fotometrul. Rezultatele sînt prezentate în lucrarea [65]. Valorile obținute sînt în limitele erorilor date în literatura de specialitate. Comparația a fost făcută cu un dinamometru.

8.6.7. METODA I PENTRU DETERMINAREA TENSIUNII

În planul format de normala PO la planul σ_1 , σ_2 și σ_x , deformația pe direcția ρ , ψ este (fig. 8.58) :

$$\varepsilon_{\varphi,\psi} = \varepsilon_1 \cos^2 \psi + \varepsilon_x \sin^2 \psi \quad (8.65)$$

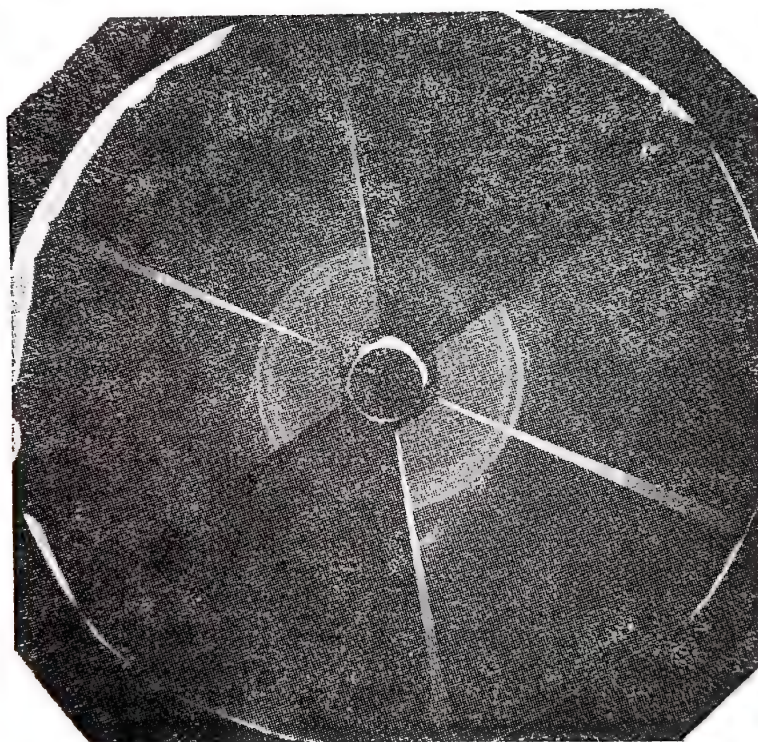


Fig. 8.57

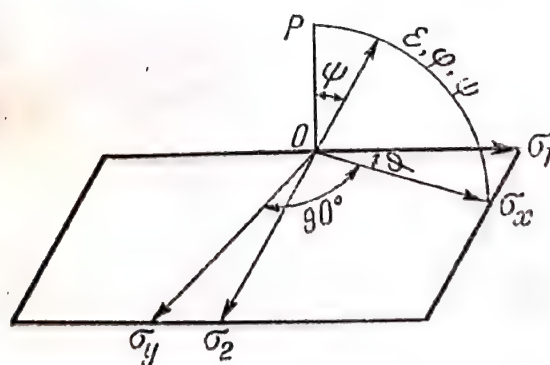


Fig. 8.58

Ținând seama de relațiile care exprimă legea lui Hooke generalizată, se obține

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{\phi_1, \psi} &= -\mu(\sigma_x + \sigma_y) \cos^2 \psi + (\sigma_x - \mu\sigma_y) \sin^2 \psi \\ E\varepsilon_{\phi_2, \psi} &= -\mu(\sigma_x + \sigma_y)(1 - \sin^2 \psi) + (\sigma_x - \mu\sigma_y) \sin^2 \psi \quad (8.66) \\ E\varepsilon_{\phi_3, \psi} &= \sigma_x[(1 + \mu) \sin^2 \psi - \mu] - \mu\sigma_y \end{aligned}$$

Se observă că $\varepsilon_{\phi_1, \psi}$ e funcție de unghiul ψ , deci se va nota ε_ψ . Pentru eliminarea efectului componentei σ_y , se exprimă diferența între alungirile ε_ψ și ε_\perp

$$E(\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp) = \sigma_x(1 + \mu) \sin^2 \psi$$

sau

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu) \sin^2 \psi} (\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp) \quad (8.67)$$

Din relația (8.67) rezultă că pentru determinarea tensiunii de la suprafață sînt necesare două măsurători de alungiri, una perpendiculară pe suprafață, iar alta în planul ce trece prin σ_x și normala pe suprafață. Unghiul ψ față de normala la suprafață se poate lua oricum, însă valorile favorabile pentru rezultatele măsurărilor sînt cele corespunzătoare unghiului de 45° .

Deformațiile ε_ψ și ε_\perp se pot exprima în funcție de distanțele dintre planele rețelei cristaline, astfel

$$\varepsilon_\psi = \frac{d_\psi - d}{d} \quad \text{și} \quad \varepsilon_\perp = \frac{d_\perp - d}{d} \quad (8.68)$$

Diferența lor este

$$\varepsilon_\psi - \varepsilon_\perp = \frac{d_\psi - d}{d} - \frac{d_\perp - d}{d} = \frac{d_\psi - d_\perp}{d} \quad (8.69)$$

La numitor se poate înlocui cu suficientă aproximație $d = d_\perp$.

Expresia tensiunii devine

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu) \sin^2 \psi} \cdot \frac{d_\psi - d_\perp}{d_\perp} \quad (8.70)$$

Din relația (8.70) rezultă că determinarea tensiunii σ se poate face în două fotografieri, una perpendiculară și una înclinată la 45° . La fotografierea perpendiculară filmul se rotește, iar la cea înclinată oscilează. Măsurătorile pe film și calculele se fac ca și la paragraful 8.5.6. Se observă că nu e nevoie să se cunoască distanța d pentru epruveta nesolicitată.

A fost determinată tensiunea într-o epruvetă din tablă de cupru ($7 \times 0,5$ mm) cu ajutorul relației (8.72).

Liniile 1, 2 și 3 din tabelul 8.3 conțin elemente de calcul pentru d_1 , iar liniile 4, 5 și 6 pentru d_ψ , ψ fiind ales de 45° . S-a găsit :

$$\sigma_x = \frac{1,1 \times 10^6}{(1 + 0,33) \sin^2 45^\circ} \cdot \frac{0,92978 - 0,92889}{0,92889} = 1584 \text{ daN/cm}^2.$$

8.6.8. METODA II PENTRU DETERMINAREA TENSIUNII

Tensiunea σ_x se mai poate exprima ca diferența a două alungiri pe două direcții σ_1 și ψ_2 , cu care ocizie se anulează efectul tensiunii σ_y . Se scrie expresia celor două deformații și se face diferența lor

$$\begin{cases} E\varepsilon_{\varphi_1\psi_1} = \sigma_x [(1 + \mu) \sin^2 \psi_1 - \mu] - \mu \sigma_y \\ E\varepsilon_{\varphi_2\psi_2} = \sigma_x [(1 + \mu) \sin^2 \psi_2 - \mu] - \mu \sigma_y \end{cases} \quad (8.71)$$

$$E(\varepsilon_{\psi_1} - \varepsilon_{\psi_2}) = \sigma_x(1 + \mu) (\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \psi_2). \quad (8.72)$$

Faptul că tensiunea poate fi exprimată în funcție de diferența a două deformații are o consecință importantă și anume aceea că nu e necesar să se cunoască distanța d între planele rețelei cristaline în starea inițială (fără tensiuni). Într-adevăr

$$\varepsilon_{\psi_1} - \varepsilon_{\psi_2} = \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} - \frac{d_{\psi_2} - d}{d} = \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}}. \quad (8.73)$$

La numitor se poate pune cu destulă aproximație : $d = d_{\psi_1}$. Se observă că la măsurarea röntgenografică a deformațiilor trebuie să se țină seamă că direcția alungirii măsurate nu este identică cu direcția de radiație, ci cu direcția normalei pe planul de rețea care produce reflexia. Aceasta formează cu direcția radiației un unghi : $\gamma = 90^\circ - \alpha$.

Introducând în expresia (8.72) valoarea diferenței deformațiilor din (8.73,) se obține

$$E \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} = \sigma_x(1 + \mu) (\sin^2 \psi_1 - \sin^2 \psi_2) \quad (8.74)$$

Tabelul 8.3

Calculul tensiunii în tabla de Cu.

Nr. crt.	D, mm	γ , mm	$\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)$	$(\pi - 2\alpha)$, rad	α , rad	α°	$\sin \alpha$	hkl	d, Å	a, Å	Observații
1	85	26,70	0,31412	0,30436	1,41862	81°16'51"					Incidența 90° (aluminiiu) aproximativ
2	82,51	26,70	0,32358	0,31295	1,41432	81°02'05"	0,98780	024	0,90454	0,04510	Incidența 90 (aluminiiu) exact
3	82,51	51,03	0,61847	0,55389	1,29385	74°07'56"	0,96190	004	0,92889	3,71556	Incidența 90° (Cu) exact
4	85	26,68	0,31388	0,30415	1,41872	81°17'11"					Incidența 45° (aluminiiu) aproximativ
5	82,45	26,68	0,32358	0,31295	1,41432	81°02'05"	0,98780	024	0,90454	4,04510	Incidența 45° (aluminiiu) exact
6	82,45	50,62	0,61395	0,55061	1,29049	73°56'23"	0,96097	004	0,92978	3,71912	Incidența 45° (Cu) exact

Pentru fiecare din cele două jumătăți ale filmului, unghiul respectiv este

$$\psi_1 = \psi_0 + \eta$$

$$\psi_2 = \psi_0 - \eta \quad (8.75)$$

Relația (8.76) devine

$$E \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} = \sigma_x(1 + \mu)[\sin^2(\psi_0 + \eta) - \sin^2(\psi_0 - \eta)] \quad (8.76)$$

Pentru :

$$\psi_0 = 45^\circ$$

$$E \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} = \sigma_x(1 + \mu)[\sin^2(45^\circ + \eta) - \sin^2(45^\circ - \eta)] \quad (8.77)$$

Relația (8.76) se simplifică

$$E \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} = \sigma_x(1 + \mu) \sin^2 \eta$$

sau

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu) \sin^2 \eta} \cdot \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} \quad (8.78)$$

Tensiunea, după această metodă, se obține dintr-o singură fotografie pe epruveta solicitată și înclinată la 45° . Valorile distanțelor d_{ψ_1} și d_{ψ_2} se deduc prin măsurări separate pe cele două jumătăți ale inelului de reflexie. Calculul distanțelor se face ca și la metodele precedente, iar tensiunea se calculează cu formula (8.78).

Verificarea se face ca și la metoda de la paragraful 8.5.6.

Pentru determinarea tensiunii într-o epruvetă din tablă de fier ($7 \times 0,46$ mm) s-a utilizat relația (8.78) de la metoda II-a. Calculele și rezultatele pentru tabla de fier sînt date în tabelul 8.4. Valorile obținute sînt în limita erorilor date în literatura de specialitate ($2-3$ daN/mm²).

Tabelul 8.4

Calculul tensiunii în tabla de Fe. Anoda Co, radiația 45°

Nr. crt.	D mm	r mm	tg $(\pi - 2\alpha)$	$(\pi - 2\alpha)$ rad	α rad	α°	sin α	hkl	d, Å	
1	75,209	24,336	0,32358	0,31295	1,41452	81°02'05''	0,98780	024	0,90454	Al exact
2	75,209	45,731	0,60805	0,54631	1,29764	74°20'57''	0,96292	301	0,92791	Fe
3	75,209	46,049	0,61228	0,54940	1,29610	74°15'40''	0,96251	301	0,92830	Fe

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu) \sin^2 \eta} \cdot \frac{d_{\psi_1} - d_{\psi_2}}{d_{\psi_1}} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1,3 \cdot 0,54956} \cdot \frac{0,92830 - 0,92791}{0,92830} = 1239 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru determinarea distanțelor epruvetă-film s-a utilizat pulbere de aluminiu pur ca material etalon.

Măsurarea distanțelor pe film s-a făcut cu microscopul comparator și cu fotometrul.

8.6.9. APLICAȚII PRIVIND MĂSURAREA TENSIUNILOR REMANENTE

1°. *Determinarea tensiunilor remanente în plăcuțe de oțel moale.* În lucrarea [11] se prezintă modul de determinare a tensiunilor în plăcuțe de oțel moale extrase din inima unui profil HEA 100, cu dimensiunile $70 \times 50 \times 7$ mm. Epruvetele au fost polizate electrolytic. Epruvetele *A* au rămas brute, iar epruvetele *B* au suferit un tratament de recoacere la 600°C pentru detensionare. Două epruvete *C* au fost încălzite în mod diferențial. Măsurările au fost făcute în centrul epruvetelor și în direcția laminării. Rezultatele sînt trecute în tabelul 8.5.

Tabelul 8.5

Epruveta	1A	2A	3A	4A	5A	6A
N/mm ²	+31	-115	-85	-106	-134	-146
Epruveta	1B	2B	3B	1C	2C	
N/mm ²	0	+5	0	+ 23	+ 33	

2°. *Determinarea tensiunilor remanente în aripile unui profil HEA 140.* În aceeași lucrare [11] se prezintă modul de repartitie a tensiunilor remanente în aripile unui profil HEA 140, determinate cu ajutorul razelor X. O bucată din profil cu lungimea de 30 cm. a fost polizată electrolytic pe o bandă cu lățimea de 2 cm. pe toată lățimea aripii. Apoi profilul a fost tăiat în fișii pe care s-a măsurat deformația între starea inițială și starea după tăierea în fișii, cu ajutorul unui extensometru cu precizia de $1/1000$ mm. În fig. 8.59 se dau diagramele de repartitie a tensiunilor determinate cu ajutorul razelor X și prin metoda secționării în fișii.

Dacă se notează cu σ_r tensiunea remanentă și cu A aria secțiunii nete a profilului, evident că trebuie să existe relația

$$\int_A \sigma_r dA = 0.$$

Această ecuație fiind obligatoriu verificată într-o secțiune oarecare, implică faptul că la trecerea dintre inimă — aripă există un foarte mare gradient de tensiune, astfel că tensiunile maxime depășesc chiar limita elastică.

Acest rezultat pune în evidență faptul că un profil laminat ar putea flamba înainte de a se atinge limita de încărcare prescrisă de norme.

Prin aceasta se vede importanța cunoașterii tensiunilor remanente în cazul fenomenelor de instabilitate a profilelor comprimate.

Atît la determinarea tensiunilor remanente în plăci, cît și a celor din profilul HEA 140 cu ajutorul razelor X, eroarea a fost de cca 1 daN/mm².

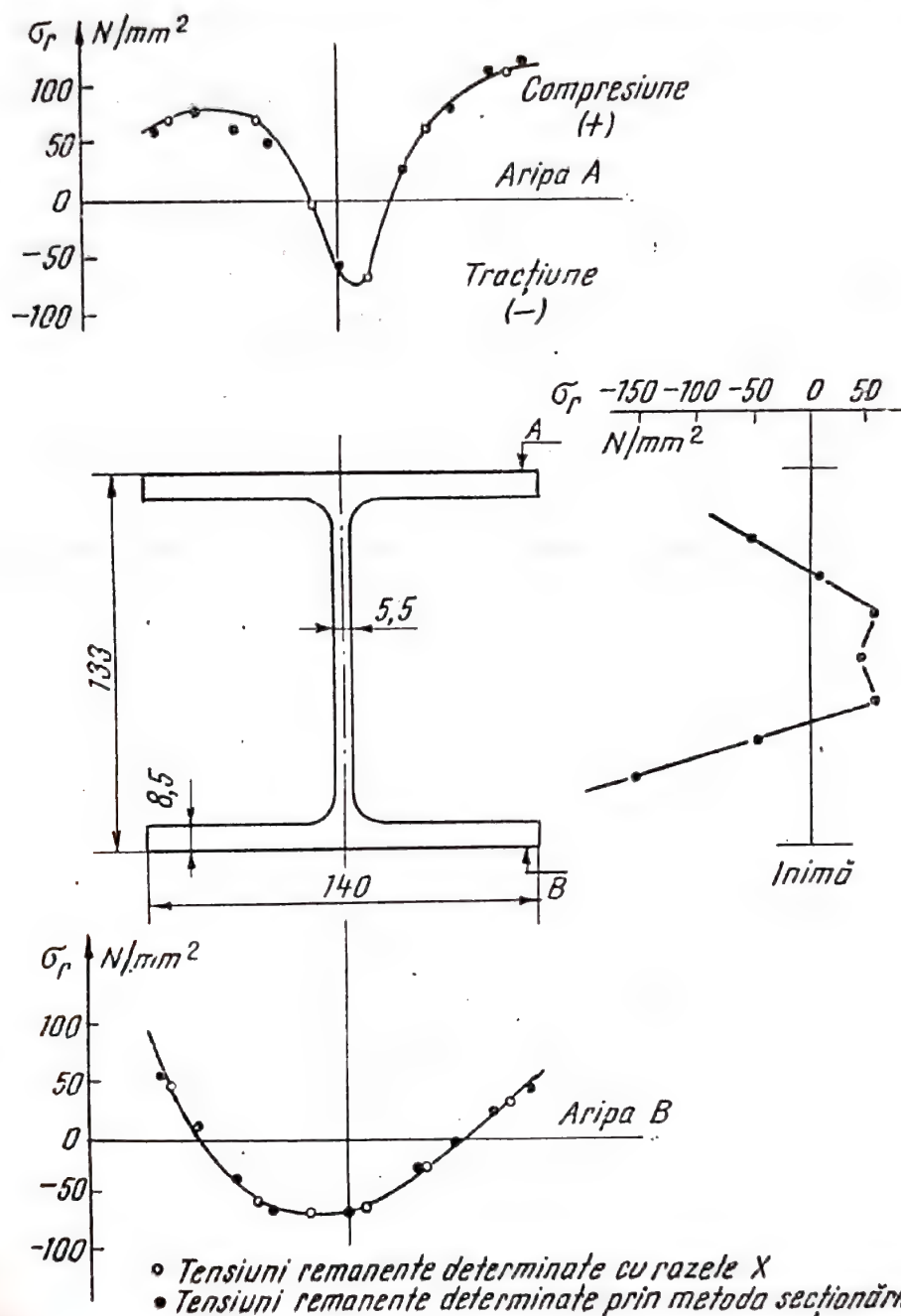


Fig. 8.59

8.6.10. CONSIDERAȚII ASUPRA ERORILOR METODEI

De la început se observă o contradicție între ipotezele admise. Pe de o parte s-a considerat că metalul este corp solid omogen, continuu și izotrop căruia i s-au aplicat formulele din teoria elasticității, pe de altă parte,

s-a determinat distanța între planele reticulare ale rețelei cristaline. Se știe că structura cristalină este discontinuă și anizotropă. Se înlătură parțial această contradicție, ținând seama că materialele cristaline sînt formate din agregate de microcristale cu orientare oarecare. Cu toate acestea o sursă de erori provine din aplicarea ecuațiilor din teoria elasticității pentru a lega tensiunile de deformările măsurate. Modulul de elasticitate E și coeficientul de contracție transversală μ , determinați pe cale röntgenografică pentru anumite cristale, pot să aibă valori mult diferite de valorile medii determinate pe cale mecanică. Materialele policristaline nu sînt izotrope decît prin compensație, din cauza orientării diferite a cristalelor. Rezultatele măsurărilor röntgenografice însă nu sînt mult diferite de cele obținute prin metode mecanice.

O altă sursă de erori este lățimea spectrală a benzii. Aceasta are cauze multiple. Întîi este un factor geometric, colimatorul, asupra căruia se poate acționa (colimator fin). Un alt factor asupra căruia se poate acționa mai greu este lungimea de undă λ , care nu este perfect definită, așa cum s-a considerat. De altfel, se știe că benzile apar sub formă de dublet K_α și K_β . Fiecare componentă a dubletului are o anumită lățime. Ținînd seama de acestea, din formula Bragg-Wulf, se poate calcula variația unghiului de reflexie.

Diferențiind expresia (8.56) rezultă

$$2d \cos \alpha \cdot \Delta \alpha = n \cdot \Delta \lambda.$$

Prin împărțirea acestei expresii cu (8.56), se obține

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.79)$$

Dacă epruveta este confecționată dintr-un material cu structură fină cu cristale mici, banda este cu o înnegrire uniformă și mijlocul ei se poate determina cu suficientă precizie. Dacă materialul are o structură grosolană (cristale mari), banda este înlocuită printr-o serie de pete mici, care în general nu sînt situate pe un inel bine definit. Datorită acestui fapt, metalele cu structură grosolană nu se pretează la determinarea tensiunilor cu ajutorul acestei metode. Sînt cazuri cînd chiar materiale cu structură fină dau benzi cu lățimi destul de mari, datorită stării de cristalizare a materialului.

O altă sursă de erori este datorită faptului că distanța se măsoară nu normal pe suprafața piesei, ci normal pe planul de reflexie.

În cazul fotografierilor oblice, oscilația filmului în jurul direcției de radiație este de asemenea o sursă de erori. Există metode și formule de corecție.

Atît la fotografierile perpendiculare pe suprafață, cît și la cele oblice, la calculul tensiunii σ_x s-a neglijat influența tensiunii σ_y . Schaaber a dat o rezolvare matematică riguroasă a problemei, în care se determină separat prin măsurători tensiunile σ_x și σ_y .

Adîncimea de pătrundere a razelor este diferită în cazul radiației oblice față de radiația perpendiculară. După observațiile lui Schaaber, măsurători cu fotografiieri perpendiculare și oblice nu dau aceleași rezultate.

În calculele făcute pentru determinarea tensiunilor cu ajutorul razelor Röntgen s-a admis starea plană de tensiuni. Sînt cazuri cînd e nevoie să se țină seamă de o stare spațială de tensiuni, cînd tensiunea $\sigma_3 \neq 0$ și are valori importante chiar în stratul de la suprafața piesei, străbătută de razele Röntgen.

8.6.11. Concluzii

S-au arătat mai sus cîteva surse de erori. Cu toate acestea, o serie de măsurători efectuate de Bollenrath, Hayk, Oswald, Glocker și Schaaber, Müller și Martin au arătat că în multe cazuri este o concordanță între valorile obținute prin metoda röntgenografică și cea mecanică, iar în alte cazuri diferențele care există sînt în limite acceptabile ($1-3 \text{ daN/mm}^2$). Rezultatele sînt mai precise în cazul tensiunilor cu valori mari.

Metoda prezintă următoarele caracteristici:

- este singura care permite să se determine *starea de tensiuni absolută* într-un metal fără ca să fie nevoie să se facă măsurători pe epruvete nesolicitate,
- poate fi utilizată, cu succes, la determinarea *tensiunilor remanente*
- se pot măsura numai deformările elastice, nu și cele plastice,
- radiațiile se fac pe o suprafață cu un diametru de aproximativ 3 mm, deci se pot determina tensiunile locale,
- poate fi aplicată cu bune rezultate numai la metale cu structură fină,
- este limitată la straturile de la suprafața piesei.

Instalația Röntgen se compune din generatorul de înaltă tensiune, tuburile Röntgen și camera reflectoare pentru luarea fotografiei pe film. După natura materialului, trebuie să se utilizeze tuburi Röntgen cu diferiți anodi. Pentru fier se potrivește anodul de cobalt, pentru aliajele de aluminiu anodul de cupru. Instalația Röntgen pentru măsurări de tensiuni trebuie să fie ușor transportabilă și să prezinte o protecție totală față de tensiunea înaltă și de pericolul razelor. Tuburile Röntgen trebuie să se poată aranja ușor în diferite direcții și să aibă o pată luminoasă netă și așezată uniform. Camera reflectoare trebuie să fie stîns legată de tuburi.

Operarea cu raze Röntgen este vătămătoare sănătății. Principiile tuturor măsurilor de protecție contra radiațiilor le formează izolarea de dozele mari de raze Röntgen mai intense astfel ca acestea să nu poată dăuna sănătății omului care ar lucra mai mult timp cu ele.

BIBLIOGRAFIE

1. BARBIER, J., LAUGUERN, *Mesure des contraintes superficielles par diffractometrie X.*, Sciences et Techniques de l'armement tom. 45— 1971.
2. BARRETT, C. S., *Structure des metaux*, Paris, Ed. Dunod, 1957.
3. BARTL D. MURDOCH, O., *Tehnologia himicescoi i electrohimescoi obrabotki poverhnostei metalov*, Masghiz, Moscova, 1961.
4. BELEAEV, N. I., *Lucrări de laborator la rezistența materialelor*, Moscova — Leningrad traducere din l. rusă 1952.
5. BOITEN. R. G., TEN CATE, W., *A routine method for the measurement of residual stresses in plates*, Appl. Scient. Research, La Haye 1952.
6. BORCHERT L., *Chrome dur* — iunie 1964 pag. 11
7. BRENNER A, SENDEROFF, Journal of Research Natural Bureau of Standards, SUA, 1949, 42.
8. CAMPUS, F., *Methods for measuring elastic and plastic deformations and distorsions of stul welds*, RILEM Buletin nr. 6, sept. 1951.
9. CHIH — CHUM HSIAO, *The distribution of residual stresses*, Proc. Experimental Stress Analysis, vol. VI, nr. 2, 1948.
10. COCHARD, A. W., *A method of measuring magnetostriction*, J. Applied Physics, Ian. 1954.
11. CASTEX. L., MASO, J. C., *Etude des contraintes residuelles par diffractometrie X, dans des profiles lamines d'acier doux*. Construction metalique, nr. 2, 1975.
12. COUTINHO, A., *Théorie de la determination expèrimentale des contraintes par une méthode n'exigeant pas la connaissance précise du module d'elasticité*, Int. Ponts et Charpantes, vol. IX, 1949.
13. CSOKAN O., Galvano, France, 1960. p. 281.
14. DENNIS J. K., Trans. Inst. Metal Finishing — Anglia, aprilie 1965.
15. DIRUY, M., *Edute experimentale des phénomènes différés dans les ouvrages en beton pré-contraint*, Raport de Recherche, nr. 50 Decembre 1975, Laboratoires de Pont et Chaussées, Paris.
16. DURELLI, A. J., TSAO, G. H., *Quantitative evaluation of residual stresses by the stresscoat drilling technique*, Stress Analysis vol. X, nr. 1, 1952
17. FIROIU, I. C., Rev. Chimiei, nr. 9, 1957.
18. FISCHER G., Galvanotechnik — RFG, 53, nr. 7, iulie 1962
19. GABE D. R., WEST J. M. TRANS. Inst. Metal Finishing — Anglia, vol. 40, 1963.
20. GLOCKER, R., *Materialprüfung mit Roentgenstralen*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer Verlag, 1958.
21. GREER, E., *Stress determination by gristle coatings*, Mechanics Engineering, July, 1947.
22. GUINIER, A., *Théorie et technique de la radiocristallographie*, Paris, Ed. Dunod, 1956.
23. GUSCIA, O. J., *Măsurarea tensiunilor remanente cu ajutorul ultrasonetelor* (traductoare din l. rusă), Rev. Sudare, tăiere, lipire, nr. 5, 1969.
24. HAUSSEGUY, L., MARTINOD, H. *Nouveau procédé non destructive pour la determination des contraintes residuelles superficielles*, Recherches aeronautique, Janv — Fevr. 1954.
25. L'HERMITE, *Methodes générales d'essai et de controle en laboratoire*, Eyrolles, 1959.
26. HOAR T. P., ARROWSMITH D. I. Trans. Inst. Metal Finishing-Anglia, 1954, 1957, vol. 30 1958, vol. 36.
27. HOLISTER, J., *The determination of in situ stresses in rock and concrete*, Appl. Mat. Research Jan, 1966.

28. HORBANIUC D. *Contribuții la determinarea și studiul tensiunilor inițiale în acoperiri metalice depuse electrolitic*, Teză de doctorat 1970, Institutul Politehnic Iași.
29. HORGER, J. O., ș.a., *Residual Stresses and fatigue studies*, Stress Analysis, vol. 1, nr. 1, 1943.
30. KACIANOV, N. N. și MIRKIN, L. L., *Röntgenostrukturini analiz (polikristallov)*, Moscova, Masghiz, 1960.
31. KITAIGORODSKI, N., *Analiza structurală cu raze Röntgen* (traducerea Academiei R.P.R., 1958).
32. KONISHI S., Metal Finishing — SUA, 61 aprilie 1963, și oct. 1963.
33. KUSHNER J. B., Proc. Am. Electroplaters Society — SUA, 45, 1958, Metal Progres — SUA, 81, febr. 1962; Metal Finishing- SUA, v. aprilie 1958.
34. LAGASSE, P. E., *Mesures magnetiques au cours de la traction*, Rev. Metalurgie, Jan. 1955.
35. MATEESCU, D. SARLĂU, C., *Calculul structurilor sudate*, Partea I, Institutul Politehnic Timișoara.
36. MATHAR, J., *Determination of initial stresses by measuring the deformation around drilled holes*, Trans. Au. Soc. Mechanics Engineering, vol. 56, 1934.
37. MILLER, M., MANTEL, E., COLEMAN, W., *An evaluation of the X — ray dissection methods of residual stress measurement in hardened steel*, Proc. Soc. Experimental Stress Analysis, vol. XV, nr. 1, 1957.
38. MIRKIN, L. L., *Sparavocinik po röntgenostrukturnom analizu polikristallov*, Moscova, 1961.
39. MOCANU, D. R., *Determinarea experimentală a tensiunilor remanente din construcțiile sudate*, Cursuri de perfecționare în domeniul sudării, vol. 8, CNIT, 1971.
40. MOCANU, D. R., BUGA, M. GEORGESCU C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*, Editura Transporturilor și Telecomunicațiilor, 1966.
41. MOCANU, D. R., TRIPA, M., *Determinarea eforturilor unitare în construcțiile feroviare cu ajutorul razelor Reontgen*, Ed. Căilor Ferate, București, 1959.
42. MOCANU, D. R., ILIESCU, Gh., ȘERBAN VL., *Controlul sudurilor cu ajutorul ultrasunetelor*, Institutul de Documentare Tehnică 1965.
43. MÜLLER, E. A. W., *Handbuch der zerstörungsfreien, Materialprüfung* R. Oldenbourg — München, 1970.
44. NICOLAEV, A. G., *Rezistența construcțiilor sudate* (traducere din limba rusă), Rev. Sudarea și lipirea metalelor, nr. 5, 1968.
45. NISIDA, M., *A method of Measuring Stress on the Surface Photoelastically*, Scientific Papers of the Institute of Physical a Chemical Research, Tokyo, vol. 5, nr. 2, 1965.
46. OROWAN, E., *Clasification and nomenclature of internal stresses*, Rev. Metalurgique, nov dec. 1947.
47. POMEY, J., GOUTEL, F., ABEL, L., *Determination des contraintes résiduelles dans les pièces cimentées*, Actes colloques, Poitiers, 1950, Soc. Doc. Aeronautique, Paris 1952.
48. PONOMARIOV, S. D. și COL., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. 1 și 2 (traducere din l. rusă), Ed. tehnică Bucuști, 1960.
49. POPOVICI VL., BĂLTĂNOIU, M., *Din experiența Uzinei Electroputere privind determinarea experimentală a deformațiilor remanente la îmbinări sudate*, Cursuri de perfecționare în domeniul sudării, vol. 8, CNIT, 1971.
50. PROPEREKA M. Ia., *Zavodskaja laboratoria*, URSS, 1957, nr. 6, și 1958, nr. 24.
51. RENDLER, N. J., VIGNESS, J., *Hola Drilling Strain Gage Method of Measuring Residual Stress*, Experimental Mechanics, dec. 1966.
52. REDNEV, S., *Measurement Techniques and data Reduction for Thermal Stress and Residual Stress, using Photoelastic coating*, SESA meeting, Detroit, 1966.
53. RUMELHART, D. BHUAND, C., *Contribution à l'analyse des contraintes résiduelles par la methode du trou et de la rosette*, R.F.M., 1970.
54. SACHS, G., ESPAY G., *A new method for determination of stress distribution in thin weldin tubing*, Engineering, nr. 10, 1941.
55. SCHAAAL, A., *Metode și exemple de aplicare a măsurării eforturilor unitare prin röntgenografie*. În: Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik, iulie 1953.
56. SCULARI, P. *Cercetarea tensiunilor interne cu ajutorul razelor Röntgen*, Hutnike Listy, 8/1954.

57. SOETE, W. VANCROMBRUGE, R., *En quast non destructive werkwyzte voor heat beplan van sigen spanningen*, Rev. Soudure, nr. 4, 1947 Belgique.
58. SPÄHN H., Metalloberfläche — R.F.G. 16, aprilie 1962.
59. STALZER M., Metalloberfläche — R.F.G. 18 oct. 1964.
60. SARLĂU, C., *Tensiuni remanente datorită sudării*, Cursuri de perfecționare în domeniul sudării, vol. 8, CNIT, 1971.
61. TEODORESCU, C.C., MOCANU, D. R., BUGA, M., *Îmbinări sudate*, Editura tehnică, 1972.
62. TEODORESCU, N. *Metode vectoriale în fizica matematică*, Vol. I București, Editura tehnică, 1954.
63. TIETZ, H. D., *Spanungsmessung mit ultraschall*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Techn Magdeburg, Heft 5, 1966.
64. TOUPIN, R. A., BERNSTEIN, B., *Sound waves, in deformed perfectlylastic materials*, Journal Acoustic Soc. American, vol. 33, nr. 2, 1961.
65. TRIPA, M., HARNAGEA, GH., *Determinarea eforturilor unitare cu ajutorul razelor Roentgen*, Construcția de mașini, București 4/1963.
66. TRIPA, M., HARNAGEA, GH., *Metode pentru determinarea eforturilor unitare în piese cu ajutorul razelor Roentgen*, Construcția de mașini, București, 8/1964.
67. TREUTING, R. G., REOD, W. T., *A mechanical determination of biaxial residual stresses in steel materials*, J. Appl. Physics, febr. 1951.
68. TYCHOWSKI, F., *Mesure optique des contraintes*, Prace Institutu Techniki Budowlanej Warszawa, 1951.
69. VIDAL, G., LAMUSSE, P., *Influence comparative des efforts de traction et de compression sur les caracteristiques magnetiques de l'acier doux*, C. R. Acad. Sciens, oct. 1953.
70. PHOTOLASTIC INC., BULETIN TDG — 55, „Measurement of residual stresses by blind hole drilling method”, may 1971.
71. PHOTOLASTIC INC., BULLETINN SFC — 200, „Photolastic stress analysis”, Techniques and products.

UTILIZAREA ANALOGHIILOR ELECTRICE ÎN TENSOMETRIE

Dr. ing. N. ILIESCU

Determinarea stării de tensiune din corpuri pe cale analitică este condiționată, în multe cazuri, de rezolvarea unor ecuații diferențiale cu derivate parțiale, cu condiții date pe contur. Analiza matematică dă soluții numai pentru câteva cazuri simple, în care domeniul studiat are o formă regulată. Pentru soluționarea problemelor în care intervin domenii mărginite de contururi neregulate, se apelează la alte metode cum ar fi: metodele numerice de calcul, sau metodele experimentale de modelare electrică. Soluțiile obținute și într-un caz și în celălalt deși sînt aproximative permit obținerea unor informații suficient de precise privind starea de tensiune din domeniul analizat. Precizia determinărilor în ambele cazuri poate fi îmbunătățită în mod simțitor prin adoptarea unor scheme de calcul potrivite, sau a unor dispozitive experimentale care să permită efectuarea determinărilor într-un număr mare de puncte.

În ultimii ani analogiile electrice au fost aplicate cu succes în soluționarea unui mare număr de probleme ingineresti. Utilizarea calculatoarelor analogice universale cu structuri complexe a simplificat foarte mult rezolvarea acestor probleme, oferind totodată posibilități largi de generalizare. Analogiile electrice sînt folosite în prezent atît ca mijloace de investigație, cît și ca mijloace de simulare în diferite domenii ingineresti cum sînt: transmisia căldurii, teoria elasticității, mecanica corpurilor deformabile, studiul vibrațiilor, reologie etc. În cele ce urmează se va insista asupra utilizării analogiilor electrice ca tehnică experimentală pentru investigarea stării de tensiune în anumite probleme ingineresti.

9.1. ELEMENTE DE TEORIA MODELĂRII

9.1.1. FENOMENE SIMILE ȘI ANALOGE

Legile fizicii în forma lor cea mai generală reprezintă o serie de relații între lucruri, fenomene sau procese care decurg din natura lor internă. Aceste legi pot fi exprimate prin relații matematice diferențiale (locale) sau integrale (globale). Relațiile diferențiale, la rîndul lor pot fi de mai

multe feluri : ordinare, cu derivate parțiale, cu diferențe finite etc. *Totalitatea fenomenelor care sînt generate de aceeași lege formează o clasă de fenomene.* Dacă fenomenele unei clase fac parte din același domeniu al fizicii se numesc *simile*, iar dacă fac parte din domenii diferite se numesc *analoge*. Clasa fenomenelor analoge este mult mai largă decît clasa fenomenelor simile. Micile oscilații ale pendulului, oscilațiile libere ale unui oscilator mecanic liniar, sau oscilațiile unui circuit electric cu inductanța L și

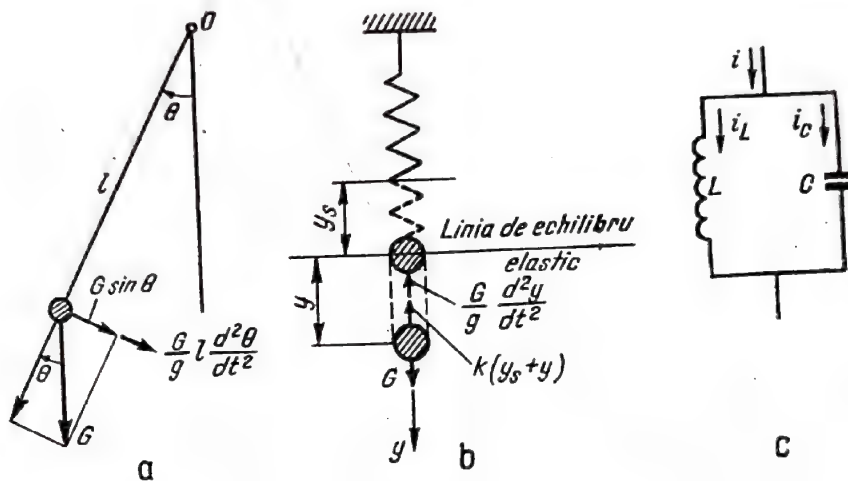


Fig. 9.1.

capacitatea C legate în derivație, deși sînt fenomene care fac parte din domenii diferite ale fizicii, fiind descrise de ecuații diferențiale de aceeași formă, sînt fenomene analoge. Astfel legea de mișcare a unui pendul matematic (fig. 9.1, a) este reprezentată de următoarea ecuație diferențială

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (9.1)$$

unde cu g s-a notat accelerația gravitațională.

Dacă un oscilator mecanic liniar este scos din poziția de echilibru elastic (fig. 9.1, b), începe să oscileze. Mișcarea greutății G în acest caz este dată de următoarea ecuație

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (9.2)$$

unde ω este pulsația oscilațiilor proprii ale oscilatorului. Evoluția în timp a unui circuit cu capacitatea C și inductanța L , legate în derivație (fig. 9.1, c), este descrisă de următoarea ecuație diferențială

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{LC} q = 0 \quad (9.3)$$

unde q este sarcina electrică.

După cum se poate observa, cele trei fenomene sînt descrise de aceeași ecuație diferențială care are următoarea formă generală

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + bx = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este de forma

$$x = A \sin (\omega t + \varphi)$$

unde A este amplitudinea, φ diferența de fază, iar ω pulsația. Amplitudinea A și diferența de fază φ se determină din condițiile inițiale.

Din exemplul dat rezultă că dacă se cunoaște ecuația care guvernează evoluția unei clase de fenomene analoge, există posibilitatea de a studia un fenomen din această clasă cu ajutorul unor experiențe făcute pe un alt fenomen de natură diferită din aceeași clasă, numit model. Noțiunea de model are mai multe sensuri. Sub acest aspect se disting trei tipuri de modele: fizice, geometrice și matematice.

Modelele fizice reproduc fenomenele reale într-o formă simplificată. Astfel pentru studiul legilor pendulului, pendulul real se înlocuiește printr-un model care de fapt este tot un pendul alcătuit dintr-o masă concentrată suspendată de un punct fix printr-un fir inextensibil.

Modelele geometrice reproduc fenomenul studiat în mod identic, însă la altă scară. Spre deosebire de modelele fizice, la modelele geometrice se păstrează aceeași scară pentru toate elementele. Asemenea modele se utilizează pentru studiul construcțiilor sau în studiile de aero și hidrodinamică.

Modelele matematice fac parte din aceeași grupă de fenomene cu fenomenul studiat, însă sînt de altă natură. Astfel comportarea unui oscilator mecanic liniar atunci cînd este scos din poziția de echilibru elastic poate fi studiată pe un circuit cu inductanță și capacitate legate în derivație. Modelele matematice pot fi de naturi diferite. În prezent în analogii se utilizează în exclusivitate ca modele matematice, modelele electrice la care diferitele mărimi fizice sînt modelate prin semnale electrice care se manipulează ușor și se măsoară cu precizie ridicată.

9.1.2. NOȚIUNI DE TEORIA SIMILITUDINII

La baza studiilor care se fac pe modele, stă teoria similitudinii care studiază proprietățile sistemelor analoge, stabilind condițiile în care rezultatele obținute prin experimentările făcute pe model pot fi transferate fenomenului modelat. De exemplu, se consideră două corpuri cu masele m_1 și m_2 aflate în mișcare rectilinie cu accelerațiile a_1 și a_2 . Mișcările celor două corpuri constituie două fenomene similare, guvernate de

legea fundamentală a dinamicii. Scriind legea a doua a dinamicii în cele două cazuri se obține

$$F_1 = m_1 a_1 = m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (9.4)$$

$$F_2 = m_2 a_2 = m_2 \frac{dv_2}{dt} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}.$$

Împărțind aceste două relații membru cu membru, rezultă

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (9.5)$$

În expresia (9.5) intervin rapoartele

$$\frac{F_1}{F_2} = k_F, \quad \frac{m_1}{m_2} = k_m, \quad \frac{a_1}{a_2} = k_a$$

$$\frac{v_1}{v_2} = k_v, \quad \frac{x_1}{x_2} = k_x, \quad \frac{t_1}{t_2} = k_t$$

unde k_F , k_m , k_a , k_v , k_x și k_t , poartă numele de factori de scară. În general factorii de scară nu pot fi aleși toți în mod arbitrar. Cunoșcînd factorii de scară, rezultă că se poate deduce evoluția în timp a unuia din fenomene, studiind celălalt fenomen. Se observă că factorii de scară nu sînt independenți între ei. Astfel

$$k_F = k_m k_a, \quad k_F k_t = k_m k_v, \quad k_F k_t^2 = k_m k_x.$$

Aceste relații mai pot fi scrise sub forma

$$\frac{k_F}{k_m k_a} = 1, \quad \frac{k_F k_t}{k_m k_v} = 1, \quad \frac{k_F k_t^2}{k_m k_x} = 1. \quad (9.6)$$

Introducînd în relațiile de mai sus, în locul factorilor de scară, dimensiunile mărimilor care figurează ca indici, se obțin de asemenea, termeni care au dimensiunea egală cu unitatea. Aceste relații între factorii de scară sînt specifice fenomenelor simile, constituind o proprietate foarte importantă a acestora.

Utilizarea similitudinii în modelarea fenomenelor fizice se face în baza postulatelor și legilor acesteia. Nu se insistă asupra legilor și postulatelor de similitudine deoarece nu sînt legate direct de problemele tratate în acest capitol. O prezentare a acestor legi se găsește în capitolul X și în lucrarea [11].

9.2. MODELAREA ELECTRICĂ A CÂMPULUI FIZIC

9.2.1. PRINCIPALELE ECUAȚII DIFERENȚIALE CARE CARACTERIZEAZĂ CÂMPUL FIZIC

În activitatea de cercetare și proiectare se întâlnesc numeroase probleme în care intervin ecuații diferențiale cu derivate parțiale cu condiții date pe contur. Printre cele mai întâlnite tipuri de ecuații diferențiale se numără ecuațiile de tip Laplace, Poisson, Fourier și Poekels. Astfel în studiul câmpurilor staționare termice, electrice, magnetice cum și într-o serie de probleme ale câmpului de tensiune din corpuri, mărimile fizice care caracterizează aceste câmpuri sînt soluții ale ecuației lui Laplace care sub formă generală se scrie astfel

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (9.7)$$

sau sub formă simbolică

$$\Delta U = 0 \quad (9.8)$$

unde $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, este operatorul lui Laplace (laplaceianul), $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, este operatorul nabla, iar U este funcția necunoscută, numită și funcție armonică sau de potențial [5].

În probleme referitoare la domenii care conțin surse interioare, funcția armonică U , satisface ecuația lui Poisson

$$\Delta U = f(\vec{r}) \quad (9.9)$$

unde $f(\vec{r})$ este o funcție cunoscută.

În teoria elasticității, în anumite cazuri de solicitare, câmpul de tensiune din corpuri este descris de ecuații diferențiale de tip Laplace sau Poisson. Astfel este cunoscut că în cazul particular al stării plane de tensiune [18] suma tensiunilor principale satisface ecuația lui Laplace

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \quad (9.10)$$

De asemenea, funcția de tensiune Φ , în cazul torsiunii barelor cu secțiune necirculară [18], verifică ecuația lui Poisson

$$\Delta \Phi = -2 G \theta \quad (9.11)$$

unde G este modulul de elasticitate transversal, iar θ este răsucirea specifică.

Tensiunile tangențiale sînt legate de funcția de tensiune prin următoarele relații

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ și } \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (9.12)$$

În cazul cel mai general al stării plane de tensiune, funcția de tensiune Φ , numită și funcția lui Airy, satisface următoarea ecuație biarmonică

$$\Delta \Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (9.13)$$

Cunoscînd funcția de tensiune Φ , se pot determina cele trei tensiuni din plan cu relațiile

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (9.14)$$

Ecuația generală a plăcilor plane încărcate cu sarcină distribuită de intensitate p , poate fi scrisă sub formă asemănătoare

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \quad (9.15)$$

unde w este săgeata într-un punct din planul plăcii, iar

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (9.16)$$

este rigiditatea la încovoiere a plăcii [2]. În relația (9.16), s-a notat cu h grosimea plăcii, iar cu μ coeficientul lui Poisson.

Ecuația (9.15) poate fi descompusă în două ecuații de tip Poisson [15] astfel

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad (9.17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}$$

în care

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (9.18)$$

unde M_x și M_y sînt momentele încovoietoare din planul plăcii.

Acestea sînt cîteva exemple de probleme din teoria elasticității în care pentru determinarea stării de tensiune este necesar să se rezolve una din ecuațiile (9.8) sau (9.9)

Operatorul lui Laplace intervine, de asemenea, ca termen într-o serie de ecuații care caracterizează și alte fenomene, cum sînt fenomenele de propagare. Astfel, în cazul propagării undelor elastice sau electromagnetice în medii omogene și izotrope, ecuația undelor are următoarea formă

$$\Delta U = A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (9.19)$$

Fenomenele de transfer de căldură din termodinamică sau cele de difuzie întîlnite în electromagnetism, sînt guvernate de ecuația lui Fourier [5], în care intervine de asemenea operatorul lui Laplace

$$\Delta U = B \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (9.20)$$

Operatorul lui Laplace intervine și în ecuația lui Pokkels [3] întîlnită în unele probleme de vibrații

$$\Delta U = C U. \quad (9.21)$$

Funcțiile A , B și C din ecuațiile (9.19), (9.20) și (9.21) sînt funcții de punct cunoscute.

9.2.2. CONDIȚII INIȚIALE ȘI DE CONTUR

Ecuațiile diferențiale din problemele prevăzute mai sus sînt valabile într-un anumit domeniu dat. După cum se știe pot fi găsite numeroase funcții care să satisfacă aceste ecuații diferențiale. Pentru ca o astfel de funcție să fie soluție unică a ecuației diferențiale trebuie să satisfacă și condițiile de unicitate [5]. De obicei aceste condiții se dau sub formă de condiții inițiale și de contur. În problemele de determinarea cîmpului fizic condițiile de unicitate se reduc la condiții de contur. În rezolvarea ecuațiilor fizicii matematice [5], se întîlnesc mai multe tipuri de condiții de contur.

a) *Condiția lui Dirichlet*. În acest caz funcția are o valoare cunoscută pe conturul domeniului

$$U(\bar{r})|_c = f(\bar{r}) \quad (9.22)$$

unde $f(r)$ este o funcție cunoscută care fixează poziția punctelor pe conturul care mărginește domeniul dat.

b) *Condiția lui Neumann*. Această condiție precizează valoarea derivatei funcției după normala la contur

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_c = f(\bar{r}) \quad (9.23)$$

unde $f(\bar{r})$ este de asemenea o funcție cunoscută.

c) *Condiții mixte de contur.* Într-o serie de probleme condițiile de contur cuprind laolaltă cele două condiții de mai sus sub forma

$$\left(f_1(\bar{r}) \cdot U(\bar{r}) + f_2(\bar{r}) \frac{\partial U}{\partial n} \right) \Big|_c = f_3(\bar{r}) \quad (9.24)$$

unde $f_3(\bar{r})$ este o funcție cunoscută.

9.2.3. INTEGRAREA ECUAȚILOR DIFERENȚIALE CU CONDIȚII PE CONTUR

Ecuatiile diferențiale cu condiții pe contur, care descriu câmpul de potențial într-un domeniu dat, pot fi rezolvate pe cale analitică doar în câteva cazuri particulare în care intervin domenii mărginite de contururi foarte simple. În majoritatea problemelor practice contururile domeniilor studiate au forme complicate și metodele analitice de calcul sînt practic inabordabile. Pentru soluționarea problemelor, în asemenea situații, se face apel la metodele aproximative de soluționare a ecuațiilor diferențiale. Din categoria acestora fac parte metodele numerice, asupra cărora nu se va insista, și metodele analogice.

În literatura de specialitate [7] se cunosc numeroase analogii pentru determinarea stării de tensiune în diferite probleme ingineresti. Analogiile electrice care utilizează sisteme electrice cu constante distribuite sau concentrate, constituie un mijloc comod și suficient de precis pentru determinarea stării de tensiune în problemele în care câmpul de tensiune este descris de o ecuație de tip Laplace sau Poisson.

9.2.4. MODELAREA ELECTRICĂ A CÂMPULUI FIZIC PRIN CONSTANTE DISTRIBUITE

Se consideră un domeniu conductor D (fig. 9.2) de conductivitate electrică

$$\gamma(r) = \frac{1}{\rho} \quad (9.25)$$

unde ρ este rezistivitatea materialului.

Dacă în domeniul considerat se definește o repartiție de curent electric, regimul permanent va fi caracterizat prin câmpul de potențial $U(r)$. Notînd cu J densitatea curentului care se stabilește în regim permanent, în domeniul considerat, legea lui Ohm [14] se poate scrie astfel

$$J = \gamma E = -\gamma \nabla U \quad (9.26)$$

unde cu E s-a notat intensitatea câmpului electric.

În absența surselor interioare, fluxul vectorului J este conservativ ($J = \text{ct}$) și prin urmare

$$\nabla J = 0 \quad (9.27)$$

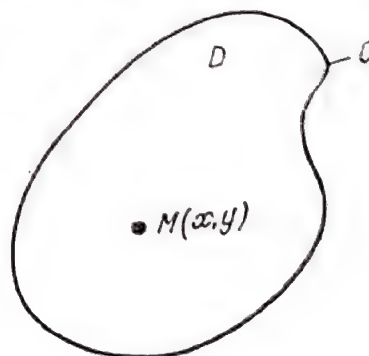


Fig. 9.2.

sau

$$\nabla(\gamma \nabla U) = 0. \quad (9.28)$$

Ecuatia (9.28) mai poate fi scrisă astfel

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0. \quad (9.29)$$

Ecuatia (9.29) stă la baza modelării câmpului fizic prin analogie electrică de potențial. În felul acesta, orice funcție $\Phi(x, y, z)$ care satisface într-un domeniu dat D_1 o ecuație de forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (9.30)$$

și condițiile de contur, poate fi identificată cu funcția de potențial $U(x, y, z)$ din domeniul conductor D , care are aceeași formă geometrică cu domeniul D_1 și a cărei conductivitate $\gamma(r)$, variază în funcție de punct, ca și $\lambda(r)$.

Prin urmare se poate scrie

$$\lambda(\bar{r}) = k \cdot \gamma(r) \quad (9.31)$$

unde k este factorul de scară.

Ținând seama de analogia care există între ecuațiile (9.29) și (9.30), determinarea funcției $\varphi(x, y, z)$ în domeniul D_1 se reduce la măsurarea potențialului $U(x, y, z)$ din domeniul conductor, după ce s-au realizat constructiv condițiile de contur impuse.

Pentru soluționarea unor probleme practice de determinare a stării de tensiune, se folosesc două cazuri particulare ale ecuației (9.28):

1°. *Cazul conductorului omogen.* În acest caz conductivitatea $\gamma = \text{ct}$ și prin urmare ecuația (9.28) devine

$$\nabla^2 U = \Delta U = 0. \quad (9.32)$$

Rezultă deci că ecuația lui Laplace poate fi integrată într-un anumit domeniu, modelînd domeniul respectiv printr-un conductor omogen și aplicînd condițiile de contur.

2°. *Cazul conductorului evasiplan.* Se consideră un conductor format dintr-o placă subțire cu grosimea ușor variabilă (fig. 9.3) și o suprafață elementară de arie ds , corespunzătoare unei grosimi $h(x, y)$.

Considerînd conductivitatea γ constantă, curentul dI care trece prin elementul de suprafață are următoarea expresie [1]

$$dI = J ds = -\gamma h(x, y) \frac{dU}{dn} ds. \quad (9.33)$$

Densitatea γ fiind constantă, în absența izvoarelor interioare $\nabla(dI) = 0$, sau în coordonate carteziene,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0. \quad (9.34)$$

Ecuția (9.34) este analogă cu ecuația (6.29) scrisă în plan, cu deosebirea că în acest caz conductivitatea γ este înlocuită prin grosimea h . De aici

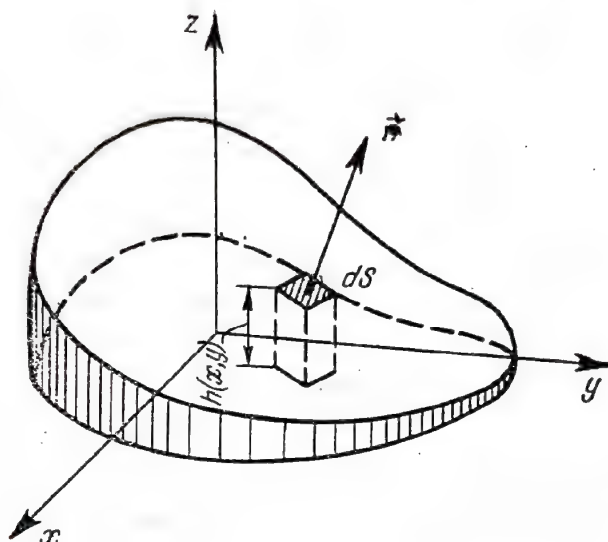


Fig. 9.3.

rezultă posibilitatea de a modela câmpuri de potențial descrise de ecuația (9.29) prin utilizarea unui mediu conductor omogen cu grosimea variabilă.

9.2.5. REALIZAREA PRACTICĂ A ANALOGIEI ELECTRICE CU CONSTANTE DISTRIBUITE

Analogia electrică cu constante distribuite se realizează folosind medii conductoare solide sau lichide. Ca mediu conductor solid se utilizează foi subțiri de nichel, manganin sau constantan. De asemenea, se mai folosesc și amestecuri semiconductoare aplicate pe diferiți suportați. Astfel hîrtia grafitată este un material potrivit pentru analogii. O hîrtie cu calitate foarte bună întâlnită pe piață, este hîrtia Teledeltos, care se livrează sub două calități avînd rezistența specifică de $3\,000\ \Omega/\text{cm}^2$ și respectiv $12\,000\ \Omega/\text{cm}^2$.

Modelul electric avînd forma domeniului care urmează să fie studiat se fixează pe un suport izolant cît mai neted, de exemplu pe o bucată de geam. Condițiile de contur se realizează prin aplicarea unor tensiuni pe o serie de ploturi fixate pe conturul modelului cu un adeziv care să permită trecerea curentului.

Modelarea care folosește ca mediu un conductor lichid se realizează în cuva electrochimică. Această metodă de modelare prezintă o serie de avantaje

față de modelarea care folosește conductori solizi. Astfel în acest caz se asigură o omogenitate mai bună a mediului modelat, dînd posibilitatea realizării unor modele de dimensiuni mai mari, sporind precizia determinărilor. De asemenea, în acest caz se poate face o modelare spațială a cîmpului de tensiune, punctele din interiorul domeniului fiind ușor de explorat. Modelarea electrică în cuva electrolică se bazează pe proprietatea electroliților de a conduce curentul electric. Ca electroliți se folosesc soluții slabe ale unor săruri (sarea de bucătărie) sau acizi (acidul sulfuric) în apă. Apa de robinet care conține numeroase săruri s-a dovedit a fi un excelent electrolit, avînd rezistivitatea cuprinsă între 10^3 și $10^4 \Omega \cdot \text{cm}$.

Cuvele care conțin electrolitul au forme diferite în funcție de felul modelării: plane sau spațiale. În general se realizează sub forma unor cutii cu pereții din plexiglas sau sticlă. Grosimea stratului de electrolit la modelarea cîmpurilor plane nu trebuie să depășească 3—5 cm. Pentru cîmpurile spațiale volumul de electrolit depășește 1 m^3 . În cazul cuvelor care folosesc straturi subțiri de electrolit se impune o așezare perfect orizontală a fundului cuvei, lucru care se realizează prin intermediul unor dispozitive de reglaj cu filet.

După mai multe ore de funcționare a instalației se recomandă schimbarea electrolitului a cărui conductivitate se modifică în timp.

Pentru măsurarea potențialului în cuva electrolică se folosește o sondă confecționată dintr-un fir de platină sau oțel argintat cu grosimea de 0,5 ... 0,7 mm. Conductorul care formează sonda se fixează într-un tub de sticlă sau se izolează. Sonda se cufundă în electrolit pe o adîncime de 0,5—1 mm.

Pentru a fixa cu precizie coordonatele punctului din cîmp, în care se stabilește sonda, cuvele electrolice sînt înzestrate cu un dispozitiv mecanic simplu cu ajutorul căruia se pot trasa separat pe o planșă liniile echi-

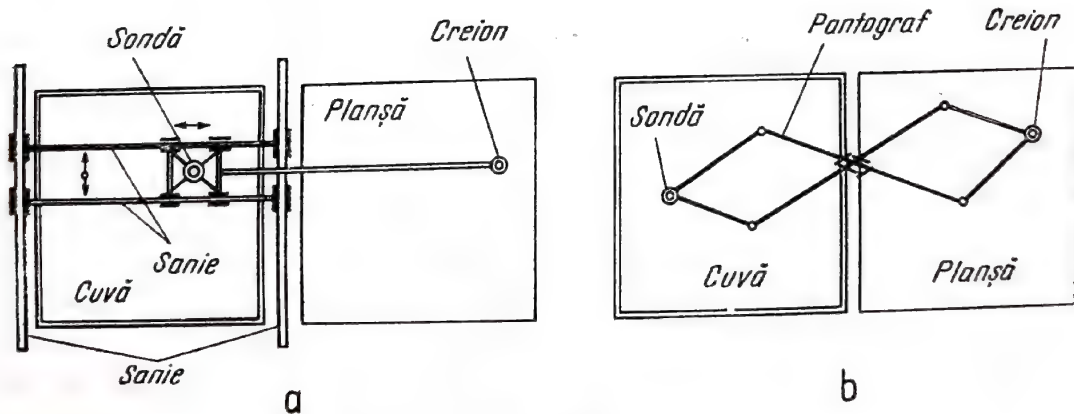


Fig. 9.4.

potențiale. În figura 9.4 sînt prezentate schematic două dispozitive pentru trasarea liniilor de cîmp.

Conturul domeniului modelat se realizează în funcție de condițiile de contur impuse problemei, fie dintr-un element continuu, fie dintr-o serie de electrozi (ploturi) așezați la o anumită distanță unul de altul. Astfel cînd

condițiile de contur sînt de tipul $U = ct$, conturul se realizează dintr-un electrod continuu. În cazul cînd condițiile de contur sînt de forma

$$U = f(\vec{r}) \text{ sau } \frac{\partial U}{\partial n} = g(\vec{r})$$

conturul se realizează din mai mulți electrozi, așa cum se arată în figura 9.5.

Electrozii se confecționează din cupru sau alamă. Nu este indicat să se folosească electrozi din materiale diferite în aceeași cuvă.

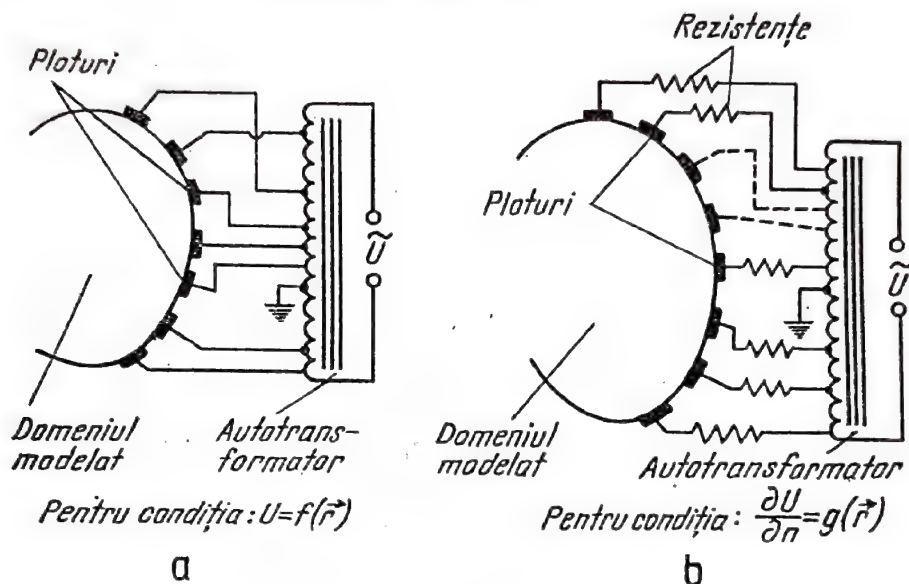


Fig. 9.5.

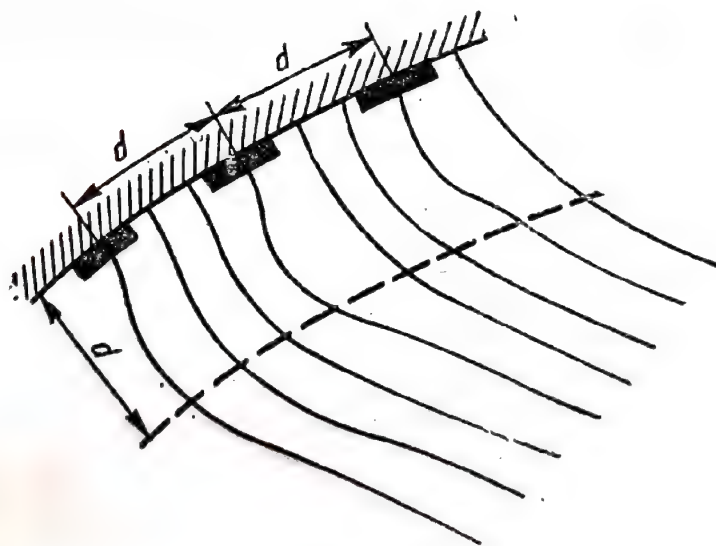


Fig. 9.6.

O problemă importantă în cazul contururilor cu electrozi este aceea a distanței dintre electrozi. Practic se constată că în apropierea conturului are loc o distorsionare a liniilor de câmp pe o distanță d , măsurată de la contur și egală cu pasul electrozilor (fig. 9.6).

Sînt probleme în care trebuie explorat spațiul din apropierea conturului. În asemenea cazuri pentru a reduce zona în care se distorsionează cîmpul, pasul electrozilor trebuie ales foarte mic. Distanța dintre electrozi nu poate fi micșorată prea mult deoarece în acest caz se realizează punți de trecere a curentului în sens transversal.

Alimentarea electrozilor se face de la rețeaua de curent alternativ prin intermediul unui autotransformator sau divizor de tensiune. Tensiunea maximă de lucru nu trebuie să depășească 40 V, atât din considerente de securitate, cît și pentru a se evita încălzirea electrolitului în zona cîmpului. Tensiunea de alimentare nu trebuie să fie nici prea mică, deoarece scade precizia determinărilor. Frecvența curentului de alimentare este, de regulă, cea obișnuită, 50 Hz. Uneori se recomandă utilizarea unor curenți de frecvență mare (1500 ... 3 000 Hz). Utilizarea curenților de frecvență mare înlătură într-o anumită măsură fenomenul de polarizare produs de componenta continuă a curentului, întîlnită în cazul frecvenței de 50 Hz. În același timp, crește considerabil influența capacităților distribuite ale instalației care afectează precizia determinărilor. De aceea, pentru instalațiile mari frecvența optimă de lucru trebuie să fie de 400 — 500 Hz.

Pentru poziționarea punctelor de un anumit potențial din domeniul studiat se utilizează un montaj electric ca cel din fig. 9.7. Prin reglarea potențimetrului se stabilește o anumită tensiune măsurată cu voltmetrul V_1 , corespunzătoare echipotențialiei care urmează să fie determinată. Se explorează cîmpul cu ajutorul sondei urmărind ca acul galvanometru-lui să vină la zero. Cînd prin galvanometru nu mai trece curent, rezultă că

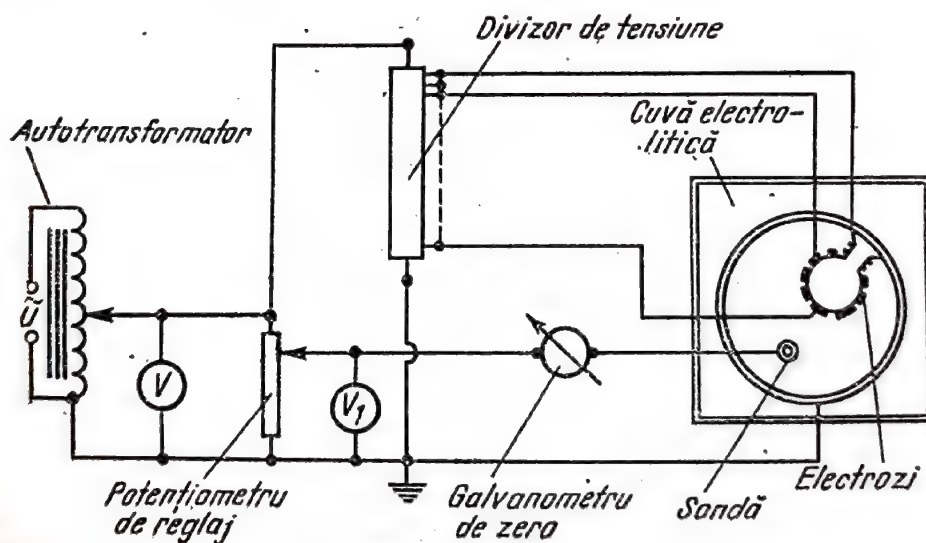


Fig. 9.7.

sonda se află într-un punct care are același potențial cu cel fixat pe potențiometrul. Punctul respectiv se află deci pe echipotențiala căutată. În felul acesta se determină o serie de puncte de același potențial, a căror poziție se fixează pe planșe. Unind toate aceste puncte se obține echipotențiala căutată, care reprezintă locul geometric al punctelor din cîmp pentru care

funcția de tensiune are aceeași valoare. Repetind determinările și pentru alte valori ale tensiunii se obține spectrul echipotențialelor din câmpul studiat.

Înainte de a fi studiată o anumită problemă, în cuva electrochimică, este necesar să se facă o etalonare a instalației, modelându-se o problemă simplă pentru care soluția analitică exactă este cunoscută.

9.2.6. MODELAREA ELECTRICĂ A CÂMPULUI FIZIC PRIN CONSTANTE CONCENTRATE

Modelarea câmpului de potențial cu ajutorul constantelor electrice concentrate se bazează pe descrierea matematică a câmpului cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe finite. Modelul electric alcătuit dintr-un mediu continuu conductor se înlocuiește în acest caz printr-o rețea electrică cu rezistențe. Astfel dacă din mediul conductor se consideră un element de volum cu laturile Δx , Δy , Δz , rezistența electrică între două fețe paralele situate în lungul axei Ox , este

$$R_x = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta y \cdot \Delta z}. \quad (9.35)$$

De multe ori este comod să se lucreze cu mărimea inversă rezistenței numită conductanță [14] notată cu G . Prin urmare, relația (9.35) poate fi scrisă și astfel

$$G_x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} = \gamma \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x}. \quad (9.36)$$

În mod asemănător poate fi scrisă conductanța și pe celelalte două direcții

$$G_y = \gamma \frac{\Delta x \cdot \Delta z}{\Delta y} \quad G_z = \gamma \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta z}. \quad (9.37)$$

unde γ reprezintă conductivitatea electrică.

În felul acesta, elementul de volum din mediul conductor considerat poate fi înlocuit printr-o serie de conductanțe legate, așa cum se arată în fig. 9.8.

Conductanța elementelor din schema de înlocuire se determină astfel încât conductanța totală dintre două fețe paralele ale volumului considerat să corespundă relațiilor (9.36) și (9.37). Astfel pentru schema de înlocuire din fig. 9.8, a, conductanța elementelor este

$$G_{ax} = \gamma \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\frac{\Delta x}{2}} = 2 G_x, \quad G_{ay} = 2 G_y, \quad G_{az} = 2 G_z \quad (9.38)$$

iar pentru schema de înlocuire din fig. 9.8, b este

$$G_{bx} = \frac{1}{4} G_x \quad G_{by} = \frac{1}{4} G_y \quad G_{bz} = \frac{1}{4} G_z \quad (9.39)$$

unde cu G_x , G_y și G_z s-a notat conductanța totală pe direcțiile x , y și z .

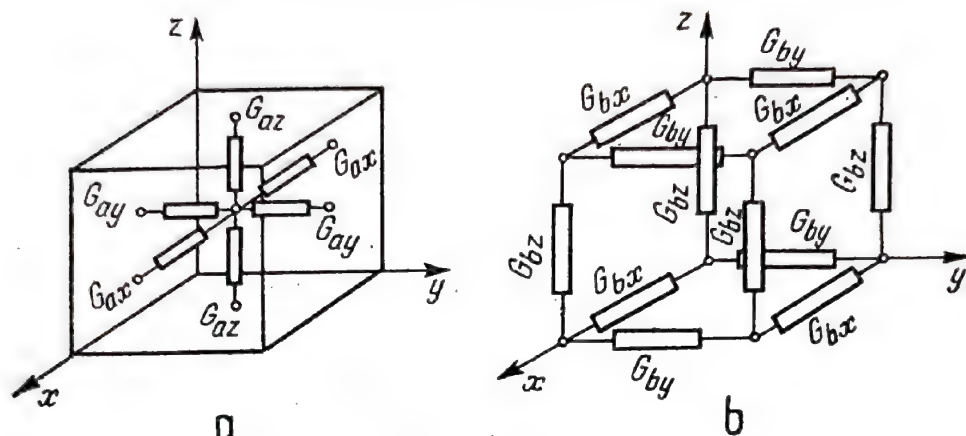


Fig. 9.8.

În cazul modelării cîmpului plan, rețeaua tridimensională se transformă într-o rețea plană. În fig. 9.9 sînt prezentate rețelele plane corespunzătoare celor două scheme de înlocuire din fig. 9.8. Conductanța elementelor rețelei plane se determină din relațiile (9.36) și (9.37) punînd $\Delta z = h$. Astfel pentru elementele stratului plan se obține

$$G_x = \gamma h \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma_s \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad G_y = \gamma_s \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (9.40)$$

unde $\gamma_s = \gamma h$ este conductivitatea specifică a stratului modelat. Pentru schema de înlocuire din fig. 9.9, a rezultă

$$G_{ax} = \gamma_s \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{2}} = 2G_x, \quad G_{ay} = 2G_y \quad (9.41)$$

iar pentru schema din fig. 9.9, b se obține

$$G_{bx} = \frac{1}{2} G_x, \quad G_{by} = \frac{1}{2} G_y. \quad (9.42)$$

De regulă, domeniul studiat se împarte într-o rețea de pătrate elementare avînd $\Delta x = \Delta y$. În felul acesta întreaga rețea plană se realizează din

conductanțe egale. În principiu este posibilă împărțirea domeniului în elemente de orice formă. Astfel pot fi realizate rețele la care nodurile sînt dispuse în virfurile unor triunghiuri echilaterale sau hexagoane.

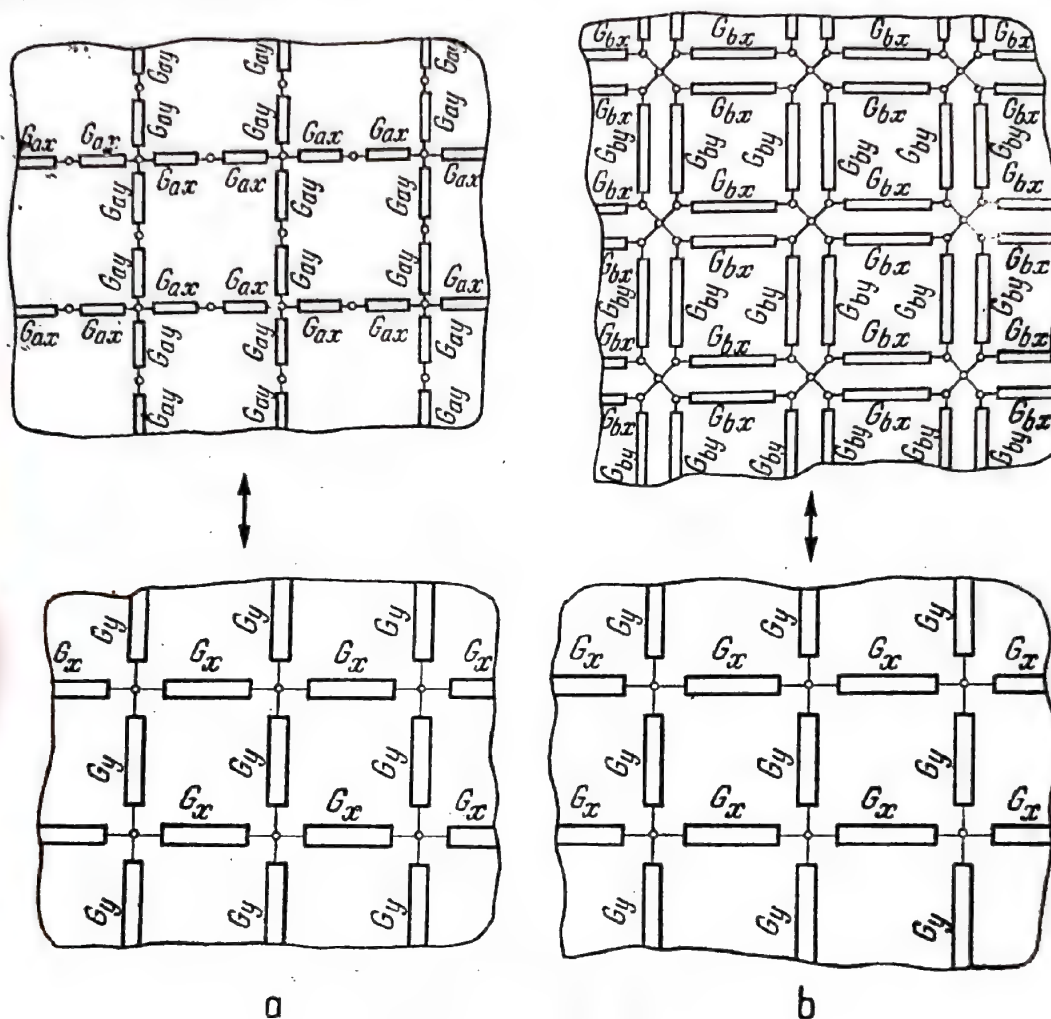


Fig. 9.9.

Conductanțele elementelor care alcătuiesc aceste rețele plane fiind egale, rezultă că distribuția densității de curent este constantă în întreg domeniul ($J = ct$) și deci

$$\nabla J = \nabla(\gamma \nabla U) = 0 \quad (9.43)$$

sau

$$\Delta U = 0. \quad (9.44)$$

Prin urmare, rețelele electrice cu constante concentrate pot fi folosite pentru modelarea cîmpurilor laplaceiene. Dacă în nodurile rețelei se introduc surse de curent (fig. 9.10), corespunzătoare unei anumite funcții de distribuție $f_1(x, y)$, rețeaua poate fi folosită pentru modelarea cîmpurilor descrise de ecuația lui Poisson

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma} f_1(x, y). \quad (9.45)$$

Dacă nodurile rețelei alimentate cu surse de curent sînt puse la masă, prin intermediul unor capacități C (fig. 9.11), rețeaua va modela ecuația lui Fourier

$$\Delta U = C \frac{\partial U}{\partial t} \quad (9.46)$$

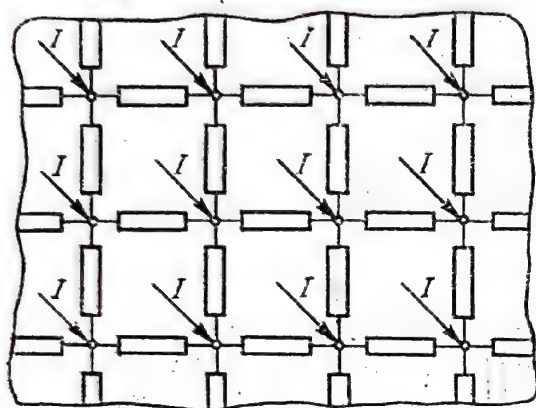


Fig. 9.10.

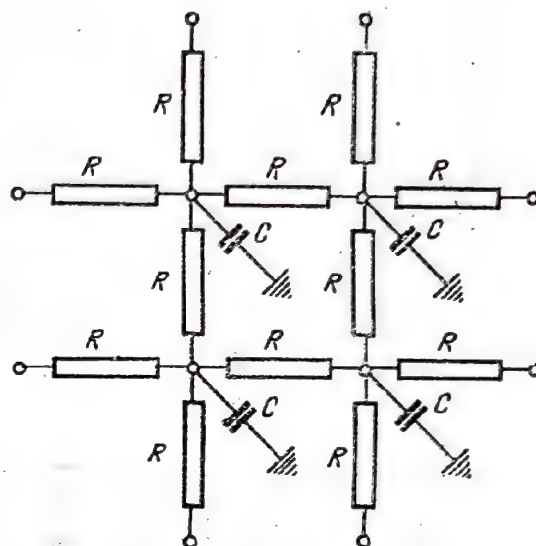


Fig. 9.11.

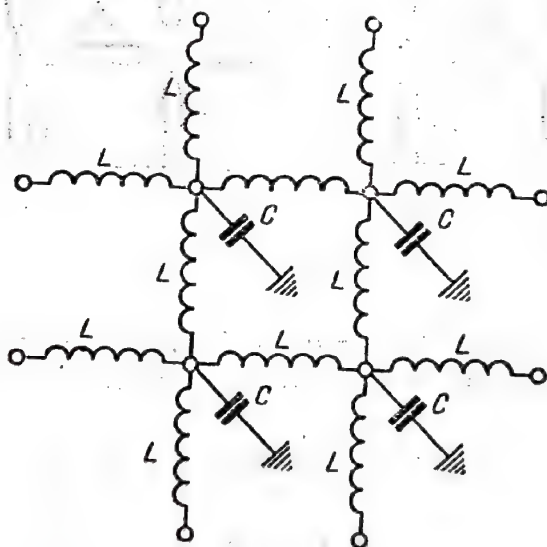


Fig. 9.12.

foarte importantă în problemele de transmisia căldurii. Utilizînd o rețea asemănătoare în care conductanțele sînt înlocuite prin reactanțe inductive L (fig. 9.12), poate fi modelată ecuația undelor

$$\Delta U = C \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (9.47)$$

În afara acestor rețele relativ simple, pentru soluționarea unor probleme, au fost concepute rețele mult mai complicate cu reactanțe. O asemenea rețea reactivă a fost construită de G. Kron [7] pentru modelarea stării de tensiune. Similitudinea se obține printr-o alegere specială a structurii rețelei, care în acest caz are diagonalele formate din elemente de inducție reciprocă (fig. 9.13) care modelează tensiunile normale și tangențiale prin

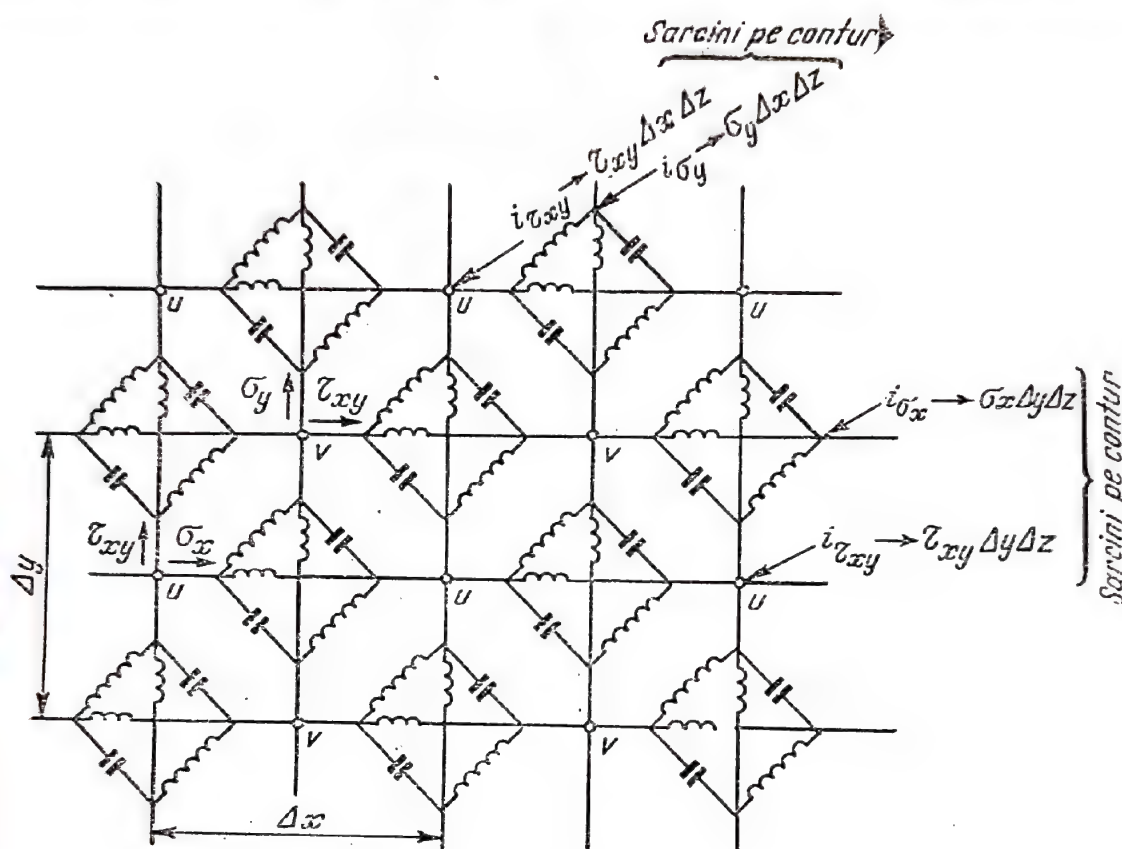


Fig. 9.13.

curenții i_σ și i_τ . Deplasările corpului în diferite puncte pe direcțiile x și y sînt modelate de tensiunile U_x și U_y .

Precizia determinărilor făcute cu aceste rețele reactive alimentate în curent alternativ la frecvențe înalte este relativ scăzută. De aceea, pentru modelarea stării de tensiune din corpuri au fost concepute rețele duble cu rezistențe ohmice care sînt mult mai simple și în același timp oferă o precizie mai ridicată.

După cum s-a arătat în cazul stării plane de tensiune, funcția de tensiune Φ , trebuie să satisfacă ecuația biarmonică (9.13) și condițiile de contur impuse problemei studiate, care pot fi scrise sub forma (9.22) sau (9.23). O ecuație asemănătoare este ecuația (9.15), care conține și membru drept, întâlnită în studiul plăcilor plane subțiri. Pentru modelarea electrică a ecuațiilor de forma (9.13) sau (9.15), cu condiții de contur, se folosește un sistem electric format din două rețele cu rezistori, legate în cascadă [10], [13]. Pentru modelare se consideră domeniul studiat împărțit printr-o

rețea de drepte în pătrate cu latura h . Nodurile acestei rețele coincid cu nodurile celor două rețele cu rezistori. Rețeaua superioară (fig. 9.14) este alcătuită din rezistorii r_1 , iar cea inferioară din rezistorii r_2 . Nodurile corespunzătoare celor două rețele sînt legate prin rezistorii R , de rezistență

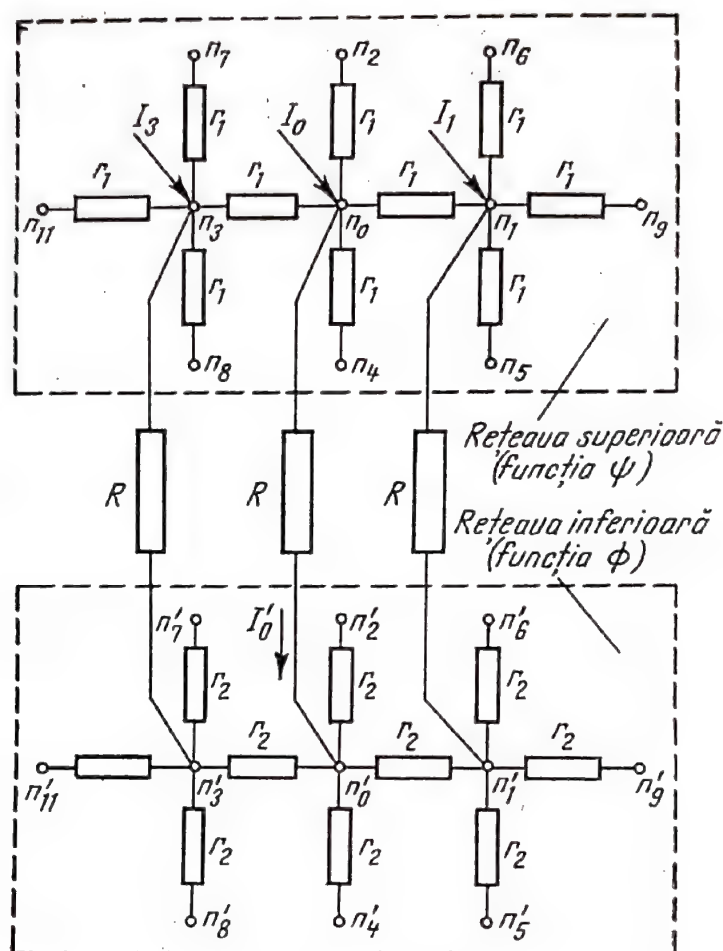


Fig. 9.14.

mult mai mare decît r_1 și r_2 . Un nod oarecare n_0 din rețeaua superioară se alimentează cu curentul I_0 , a cărui valoare se determină [10] cu relația

$$I_0 = - \frac{h^2 g_0}{r_1} \quad (9.48)$$

unde g_0 este o funcție cunoscută în nodul n_0 . În felul acesta în rețeaua superioară se va modela o ecuație de tip Poisson de forma

$$\Delta \Psi = g. \quad (9.49)$$

Rețeaua inferioară va fi alimentată prin intermediul rezistorilor R . Curentul în nodul n'_0 va fi [10]

$$I'_0 = - \frac{h^2 g'_0}{r_2} \quad (9.50)$$

unde g' este, de asemenea, o funcție cunoscută. În acest caz, rețeaua inferioară modelează o ecuație de forma

$$\Delta \Phi = g' \quad (9.51)$$

Valorile Ψ_0 și Φ_0 determinate în nodurile celor două rețele sînt proporționale cu potențialele electrice ale acestor noduri, astfel încît curentul I'_0 mai poate fi scris

$$I'_0 = k \frac{\Psi_0 - \Phi_0}{R} \quad (9.52)$$

unde k este constantă de proporționalitate. Deoarece $\Psi_0 \gg \Phi_0$ relația (9.52) se poate scrie

$$I'_0 \simeq k \frac{\Psi_0}{R}. \quad (9.53)$$

Înlocuind în (9.51) pe g' din (9.50) și ținînd seama de (9.53) se obține

$$\Delta \Phi = \frac{k}{h^2} \cdot \frac{r_2}{R} \Psi_0. \quad (9.54)$$

Aplicînd operatorul lui Laplace ecuației (9.54) se obține

$$\Delta(\Delta \Phi) = \frac{k}{h^2} \frac{r_2}{R} \Delta(\Psi)_0. \quad (9.55)$$

Ținînd seama de (9.49) și (9.48) rezultă

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{k}{h^4} \frac{r_2 r_1}{R} I_0. \quad (9.56)$$

Deci în cazul cel mai general rețeaua în cascadă rezolvă o ecuație de forma

$$\Delta \Delta \Phi = f \quad (9.57)$$

dacă nodurile rețelei superioare sînt alimentate cu curenți ale căror valori se determină din expresia

$$I = \frac{R h^2}{r_1 r_2} f. \quad (9.58)$$

În cazul particular în care ecuația (9.57) nu are membru drept (cazul modelării stării plane de tensiune), nodurile din rețeaua superioară nu se alimentează cu curenți. În acest caz se modelează condițiile de contur,

prin aplicarea unor tensiuni corespunzătoare pe contururile celor două rețele. Măsurînd potențialele nodurilor din rețeaua inferioară se determină funcția de tensiune Φ în aceste noduri, iar apoi se calculează tensiunile cu relațiile (9.14) care în diferențe finite se scriu sub forma

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_0 &\approx \frac{\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0}{h^2}, & (\sigma_y)_0 &\approx \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2}, \\ (\tau_{xy})_0 &\approx \frac{\Phi_5 - \Phi_6 + \Phi_7 - \Phi_8}{4h^2} \end{aligned} \quad (9.59)$$

unde $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_8$ sînt valorile funcției de tensiune în nodurile n'_0, n'_1, \dots, n'_8 din rețeaua inferioară (vezi fig. 9.14).

Rețelele în cascadă pot fi folosite și pentru studiul plăcilor plane subțiri. După cum s-a arătat, ecuația generală (9.15), a plăcilor plane

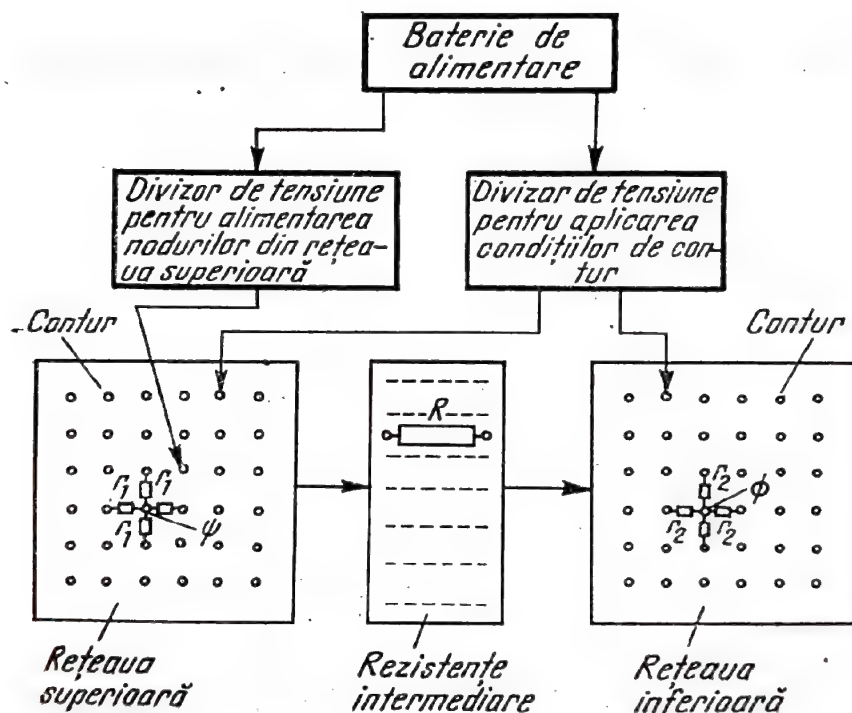


Fig. 9.15.

subțiri se descompune în două ecuații (9.17) de tip Poisson. Rezolvarea acestor ecuații se face cu ușurință cu ajutorul rețelelor în cascadă, unde atât săgeata w cât și momentul M sînt nule pe contur. Pentru aceasta se realizează o primă condiție de contur ($M = 0$), în rețeaua superioară unde nodurile de pe contur se scurtecircuitează și se leagă la masă. În același timp, nodurile rețelei superioare sînt alimentate cu curenți proporționali cu rezultanta încărcării, corespunzătoare nodului respectiv [15]

$$I_i = k_i p_i h^2. \quad (9.60)$$

Cea de-a doua condiție de contur ($w = 0$) se realizează în rețeaua inferioară prin scurtcircuitarea conturului și legarea la masă. În felul acesta potențialele nodurilor din rețeaua superioară vor fi proporționale cu momentele M din punctele corespunzătoare ale plăcii, iar potențialele din nodurile rețelei inferioare vor fi proporționale cu săgețile w , ale plăcii în aceleași puncte.

Schema de principiu a instalației folosite pentru determinarea experimentală a stării de tensiune, în probleme în care intervin ecuații diferențiale de forma (9.13) sau (9.15), este prezentată în figura 9.15.

6.3. APLICAȚII

În aplicațiile care urmează se prezintă câteva exemple de utilizare a analogiilor electrice pentru studiul stării de tensiune. Exemplele alese sînt relativ simple și se referă la probleme ingineresti care se rezolvă mai greu prin folosirea altor metode (analitice sau experimentale). Aplicațiile sînt prezentate într-o formă succintă, insistîndu-se mai mult asupra detaliilor tehnice care să servească celor interesați în utilizarea acestei metode.

Aplicații. 1°. Studiul stării de tensiune în secțiunea unui arbore de motor [17]. În acest exemplu se studiază starea de tensiune produsă de un moment de torsiune în secțiunea manetonului unui arbore cotit. Manetonul este conceput ca un arbore circular găurit excentric, străbătut de o serie de canale radiale pentru ungere. Studiul stării de tensiune s-a făcut într-o secțiune care conține și un canal radial de ungere (fig. 9.16), folosind metoda analogiei electrice de potențial.

Domeniul modelat (fig. 9.16), fiind simplu conex, funcția de tensiune Φ , este aleasă ca suma a două funcții [4], [15]

$$\Phi = \Psi + F \quad (9.61)$$

definite astfel

$$\Psi = -\frac{G\theta}{2}(x^2 + y^2) \quad (9.62)$$

unde x și y sînt coordonatele punctului considerat din secțiune.

Funcția F este o funcție de potențial, care satisface ecuația lui Laplace

$$\Delta F = 0 \quad (9.63)$$

și condițiile de contur

$$(F)_c = -(\Psi)_c.$$

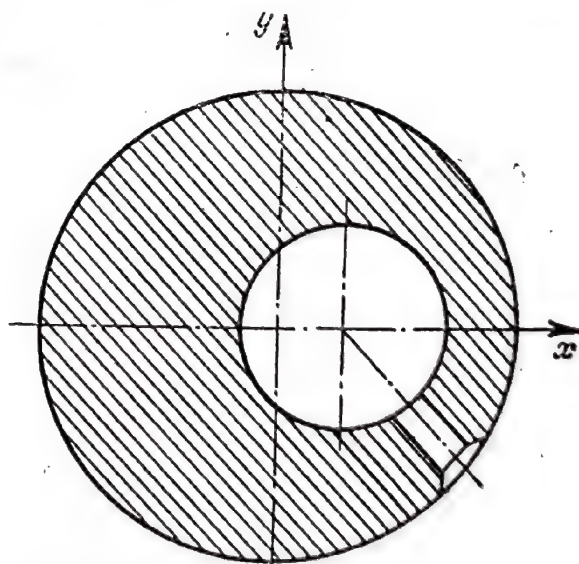
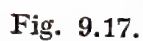
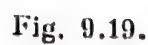
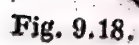


Fig. 9.16.

Funcția de potențial F a fost determinată prin modelarea cîmpului de tensiune într-o cuvă electrolitică. În acest scop s-a folosit o cuvă cu dimensiunile 80×80 cm², avînd electrolit apa de robinet.


$$(V_i)_c = k(\Psi_i)_c \quad (9.64)$$


unde k este factor de scară, iar $(\Psi')_c$ se calculează cu expresia (9.62), înlocuind coordonatele punctelor respective de pe contur.

În figura 9.17 s-a notat valoarea tensiunii aplicate pe fiecare plot. După cum se observă tensiunile aplicate au fost cuprinse între zero și 30 V. Alimentarea instalației s-a făcut de la rețeaua de curent alternativ 220 V și 50 Hz, prin intermediul unui autotransformator, folosind montajul electric din figura 9.7. Tensiunile aplicate pe ploturi au fost realizate cu ajutorul unui divizor de tensiune. Trasarea curbelor echipotențiale care reprezintă locul geometric al punctelor în care funcția F are aceeași valoare, s-a făcut prin puncte, stabilind valoarea potențialului căutat cu ajutorul potențiometrului de reglaj. Tensiunile au fost măsurate cu un voltmetru electronic, iar pentru stabilirea punctelor de potențial constant s-a folosit ca instrument de zero un microampermetru. Curbele echipotențiale trasate, sînt prezentate în figura 9.18.

Funcția de tensiune Φ , s-a obținut prin însumarea algebrică a valorilor funcției determinate F și funcției Ψ' , în diferite puncte. În acest scop funcția Ψ' dată de relația (9.62) a fost reprezentată la scară cu șablon. Curbele rezultate din însumarea celor două funcții sînt prezentate în figura 9.19.

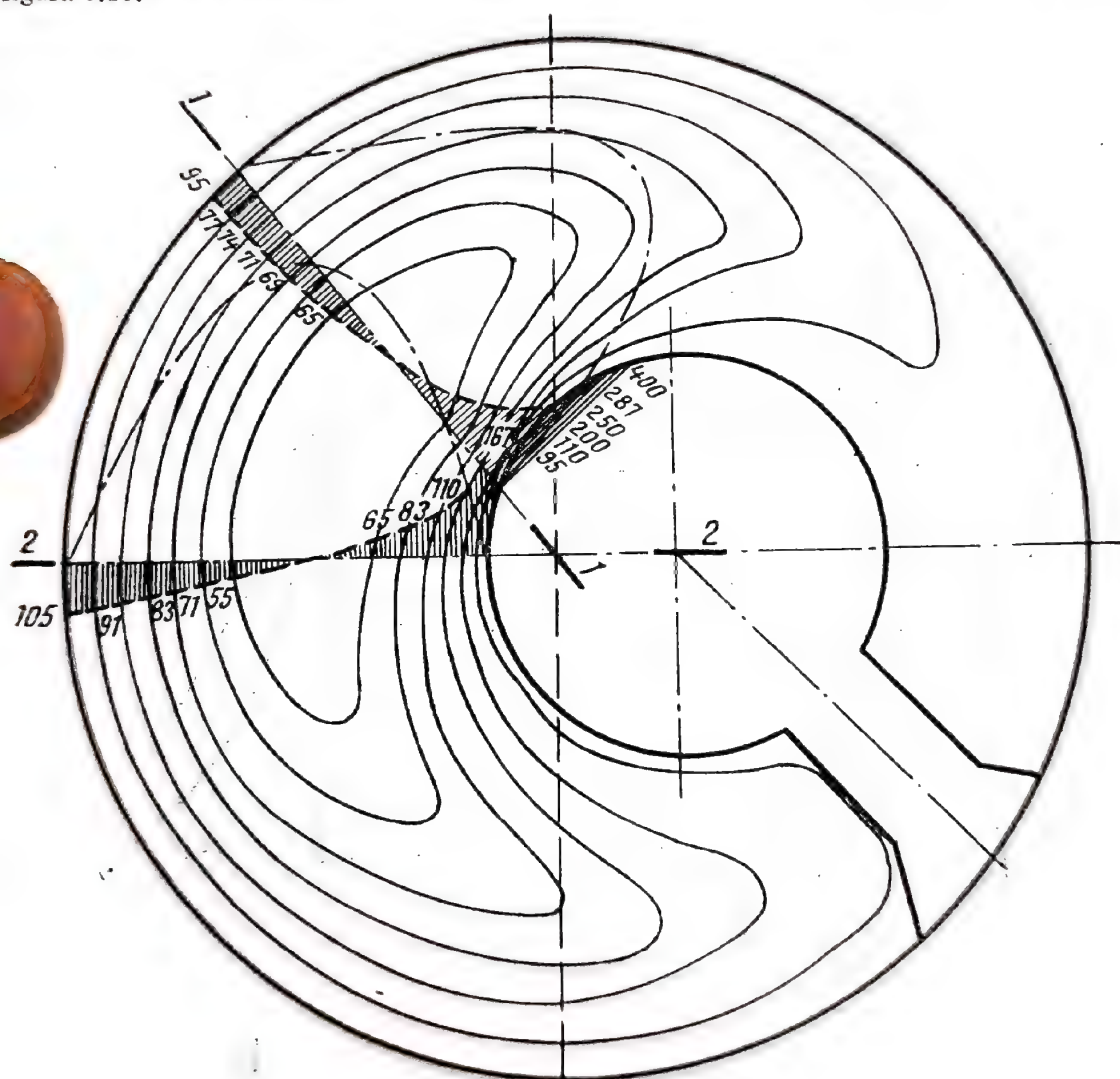


Fig. 9.20.

Utilizînd aceste curbe, prin derivare, s-au determinat tensiunile tangențiale în diferite puncte din secțiune. În figura 9.20 se prezintă variația tensiunilor tangențiale exprimate în daN/cm^2 , pe direcția a două raze. Direcția razei 1-1 a fost aleasă să treacă prin zona în care gradientul tensiunilor este maxim.

2°. Determinarea coeficientului de concentrare a tensiunilor într-o bară cu secțiune variabilă solicitată la torsiune [8]. Arborii de transmisie utilizați în construcția de mașini, de multe ori,

din motive funcționale, trebuie să se proiecteze cu secțiunea variabilă în lung. În condițiile în care momentul de torsiune transmis rămâne constant, în zonele de variație a secțiunii se produce o concentrare a tensiunilor tangențiale. În multe cazuri tensiunile maxime care apar într-un astfel de concentrator depășesc cu mult valorile admisibile prescrise, punând în pericol funcționarea mașinii respective. De aceea este necesar ca, pentru calculele de verificare, să se cunoască valorile tensiunilor tangențiale în zona concentratorului. Utilizarea metodei analitice de calcul pentru determinarea acestor tensiuni conduce la formulări matematice foarte complicate. În aceste condiții metodele experimentale își dovedesc din nou utilitatea, conducând la soluții suficient de precise.

În cazul torsiunii unei bare circulare cu secțiune variabilă, ecuațiile de echilibru și de deformății [20], conduc la următoarea ecuație de compatibilitate

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0, \quad (9.65)$$

scrisă pentru un sistem de coordonate cilindrice (r, θ, z) , în care $\tau_{r\theta}$ și $\tau_{\theta z}$ sînt componentele tensiunii tangențiale τ (fig. 9.21 a),

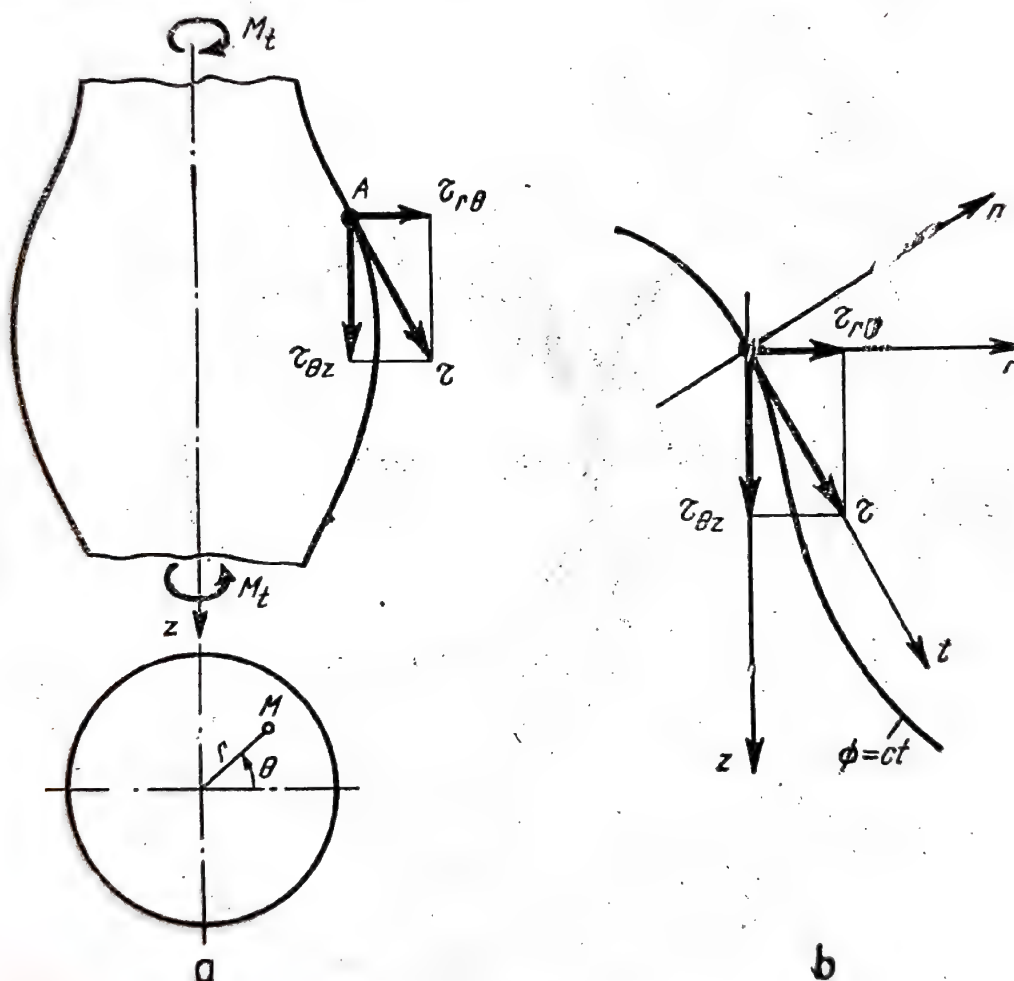


Fig. 9.21.

Se poate considera că ecuația (9.65) este satisfăcută de o funcție de eforturi $\Phi(r, z)$, astfel că

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (9.66)$$

Această funcție definită în domeniul considerat, trebuie să satisfacă următoarele condiții :

— să verifice ecuația de compatibilitate (9.65), adică

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0, \quad (9.67)$$

— să satisfacă condiția de contur.

În absența unor forțe exterioare aplicate pe suprafața laterală a barei, tensiunea tangențială τ este dirijată după direcția tangentei la contur (fig. 9.21, a).

Deci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0. \quad (9.68)$$

Funcția de tensiune $\Phi(r, z)$ este prin urmare constantă în lungul secțiunii longitudinale. Ținând seama de ecuația (9.67), rezultă că $\Phi(r, z)$ este o soluție a acestei ecuații, reprezentând o familie de curbe de tensiune constantă, la care tensiunea tangențială τ este tangentă (fig. 9.21, b). În acest caz se poate scrie

$$\tau = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dn} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{dn} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dn}. \quad (9.69)$$

Rezultă deci că tensiunea tangențială τ poate fi determinată în orice punct dacă se cunoaște variația funcției Φ după direcția normalei.

Dacă în ecuația (9.34) care definește cîmpul de potențial electric în cazul unui conductor evasipplan, se face ca grosimea mediului conductor să varieze după legea $h = k/x^3$ (unde $k = \text{ct}$), se obține

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^3} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^3} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0. \quad (9.70)$$

După cum se observă ecuația (9.70) este analogă cu ecuația (9.67) și, prin urmare, funcția de tensiune Φ poate fi determinată folosind analogia electrică de cîmp. Cunosbind funcția de tensiune în diferite puncte, se poate calcula tensiunea tangențială în aceste puncte folosind relația

$$\tau = \frac{K}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \quad (9.71)$$

unde λ este factor de scară, iar

$$K = \frac{M_t}{2\pi (U_1 - U_2)}. \quad (9.72)$$

În expresia (9.72) M_t este momentul de torsiune aplicat barei, iar U_1 și U_2 sînt tensiunile corespunzătoare la două curbe echipotențiale vecine. Studiul s-a făcut pentru cazul unui arbore cu secțiunea variabilă de la $D = 420$ mm la $d = 340$ mm, racordarea fiind realizată cu o rază $r = 40$ mm. Funcția de tensiune a fost determinată prin modelarea secțiunii longitudinale a arborelui într-o cuvă electrolitică cu dimensiunile 80×80 cm² folosind electrolit apa de robinet. Modelul electric avînd aceeași formă de contur ca și secțiunea longitudinală a arborelui a fost realizat din electrolit cu grosimea variabilă. În acest scop s-a folosit o piesă prelucrată din lemn cu grosimea variabilă după legea $h = \frac{k}{x^3}$, care a fost impregnată cu parafină și fixată în cuvă. Secțiunea longitudinală a concentratorului fiind simetrică, modelul electric s-a făcut

numai pentru jumătate (până la ax). Conturul exterior și axa longitudinală au fost modelate prin electrozi continui de alamă (fig. 9.22). Conturul exterior s-a legat la masă, iar pe celălalt electrod s-a aplicat o tensiune de 40 V. Montajul general folosit pentru trasarea curbelor echipo-

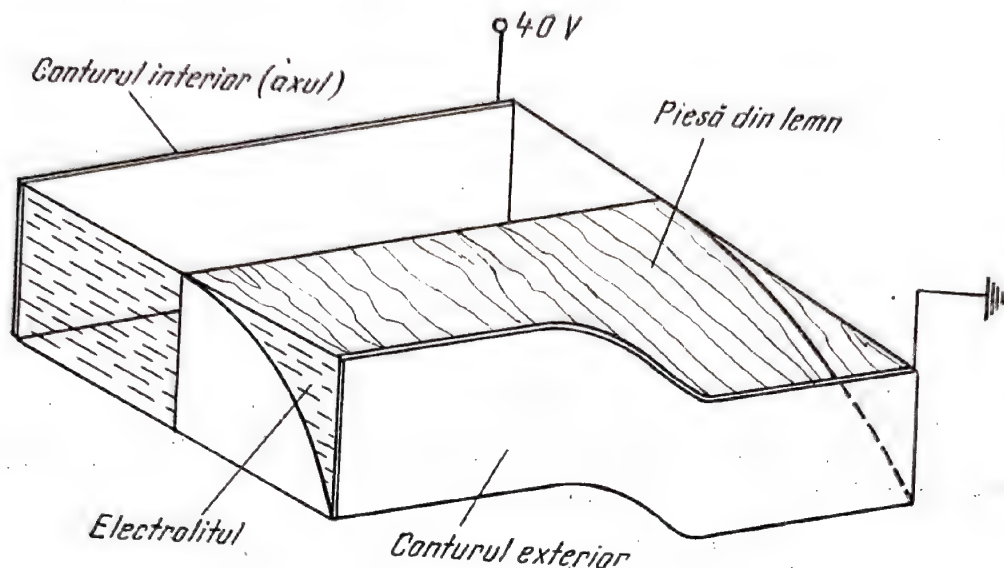


Fig. 9.22.

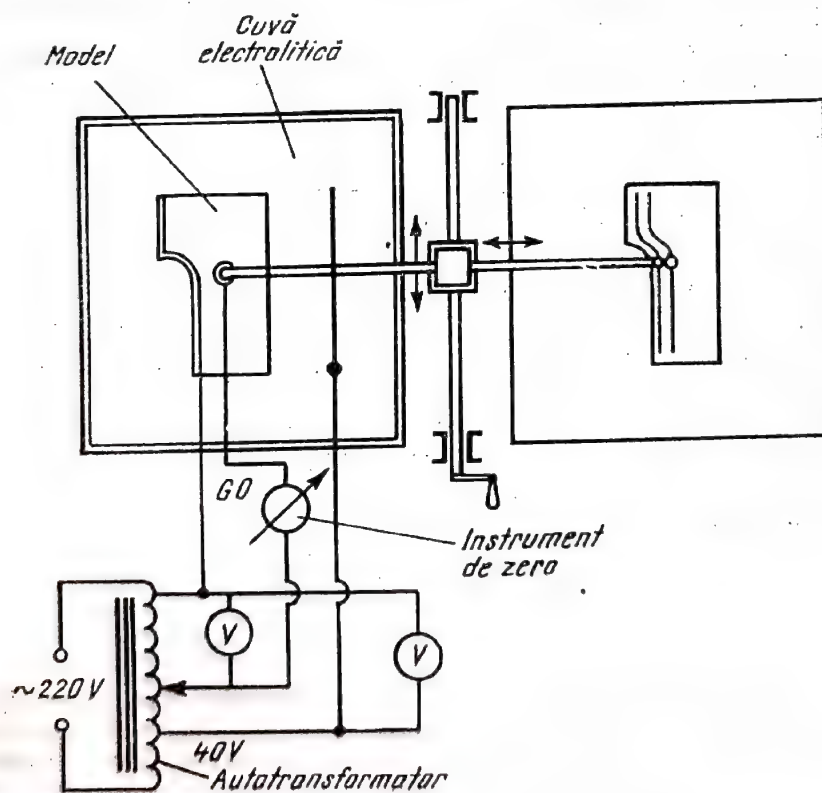


Fig. 9.23.

tențiale este prezentat în figura 9.23. În figura 9.24 sunt prezentate curbele echipotențiale trasate pentru tensiuni cuprinse între zero și 25 V. Folosind aceste determinări, cu ajutorul relației (6.66) au fost calculate tensiunile tangențiale. Variația tensiunilor tangențiale maxime (la periferia arborelui) în lungul zonei cu concentrator este prezentată în fig. 9.25.

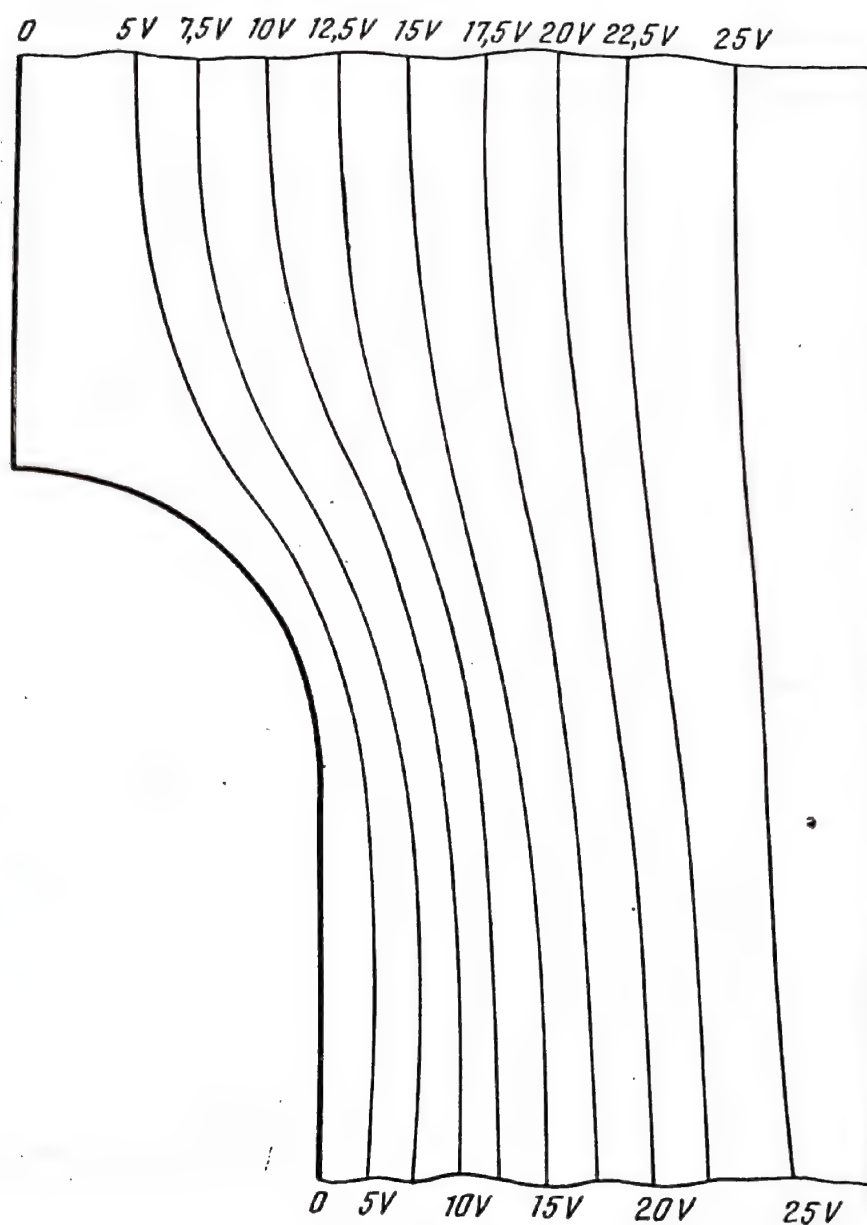


Fig. 9.24

Coeficientul de concentrare a tensiunilor, calculat pe baza determinărilor făcute, a rezultat $\alpha = 1,37$. Pentru același caz, din diagramele date în literatura de specialitate [12], rezultă valoarea $\alpha = 1,32$.

3°. *Studiul torsiunii barelor cu secțiune dreptunghiulară* [9]. În cazul torsiunii barelor cu secțiune necirculară, potrivit teoriei lui Saint Venant, câmpul tensiunilor din secțiune este caracterizat de o funcție de tensiune $\Phi(z, y)$. Această funcție satisface următoarele condiții:

— verifică ecuația lui Poisson

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (9.73)$$

unde z și y sînt coordonatele unui punct curent din secțiune (fig. 9.26);

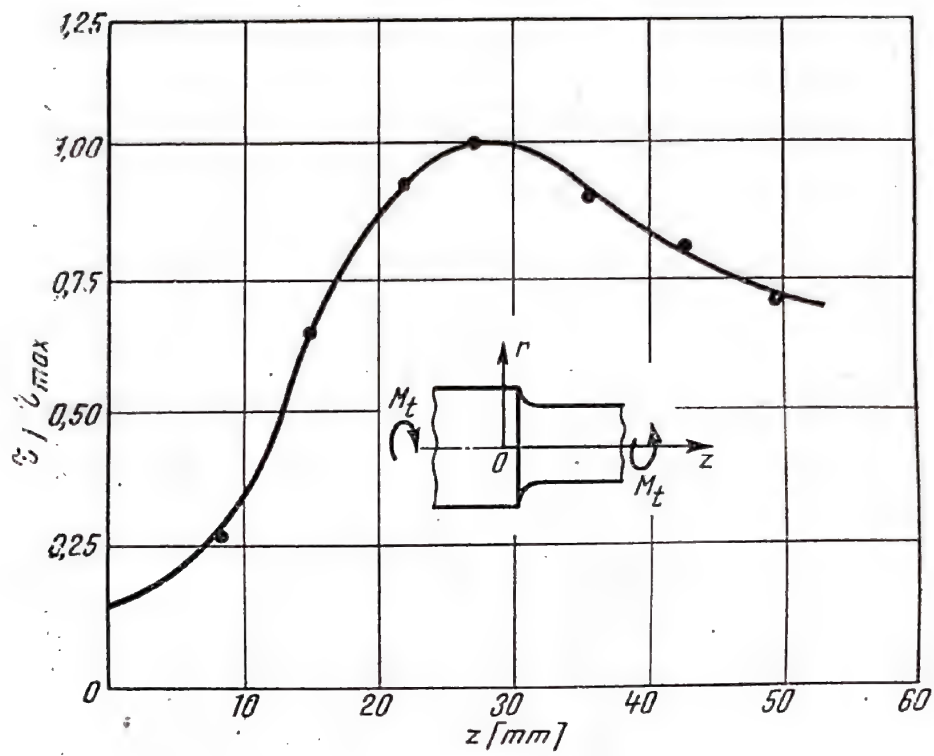


Fig. 9.25

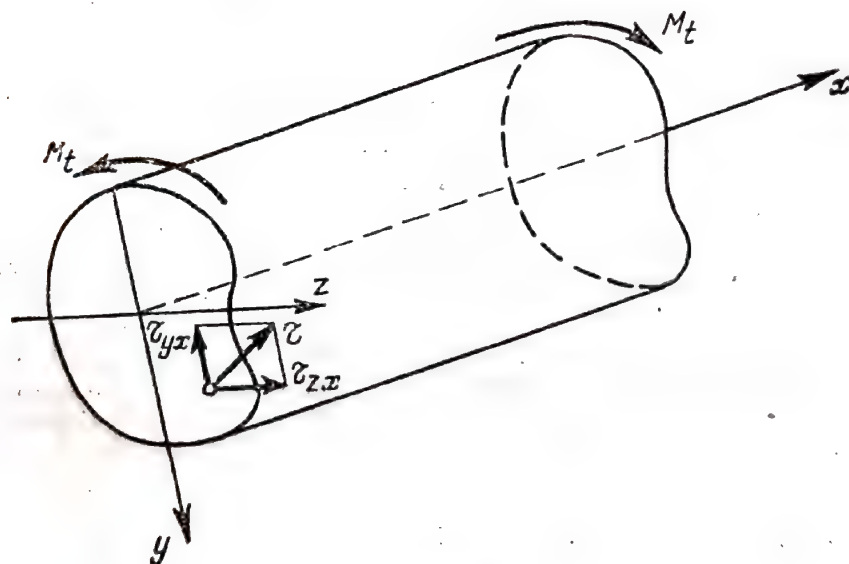


Fig. 9.26.

— satisface condiția de contur

$$(\Phi)_c = \text{ct.} \quad (9.74)$$

De regulă în calcule, valoarea funcției pe contur se ia egală cu zero. Cunoscând funcția de tensiune $\Phi(z, y)$, tensiunile tangențiale se obțin prin derivare [20]

$$\tau = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (9.75)$$

sau

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (9.76)$$

Ecuția (9.73) este analogă cu ecuația (9.45) care caracterizează câmpul potențialului electric într-o rețea cu rezistori, alimentată în noduri cu curenți. Funcția de tensiune $\Phi(z, y)$ fiind modelată de funcția de potențial electric U , va putea fi determinată prin măsurarea potențialelor electrice din noduri. În acest scop a fost concepută o rețea cu rezistori, cu ajutorul căreia s-a modelat un sfert din secțiunea unei bare cu secțiune dreptunghiulară cu raportul laturilor egal cu $3/4$, solicitată la torsiune (fig. 9.27, a). Rețeaua electrică (fig. 9.27, b) cu care s-a modelat domeniul studiat a fost alcătuită dintr-un număr de 12 ochiuri și 20 de noduri. Între două noduri vecine s-a legat un rezistor cu rezistența $R = 100 \Omega$. Ținând seama de simetrie, între nodurile situate pe cele două axe Oz și Oy s-au legat rezistori cu rezistența $2R = 200 \Omega$. Nodurile din interiorul rețelei (2, 5, 8, 3, 6, 9) au fost alimentate cu un curent $I = 4 \text{ mA}$, în timp ce nodurile de pe axe (1, 4, 7, 11, 12), ținând, de asemenea, seama de simetrie, au fost alimentate cu un curent cu intensitatea pe jumătate $I_1 = 2 \text{ mA}$. Nodul 10, din originea sistemului de referință a fost alimentat, din aceleași motive, cu curentul $I_{10} = I/4 = 1 \text{ mA}$. Condiția de contur $(\Phi)_c = 0$ a fost realizată prin scurtcircuitarea ploturilor de pe contur și legarea lor la masă. Alimentarea rețelei s-a făcut de la o baterie de 4,5 V, prin intermediul unui potențiomtru. Alimentarea nodurilor

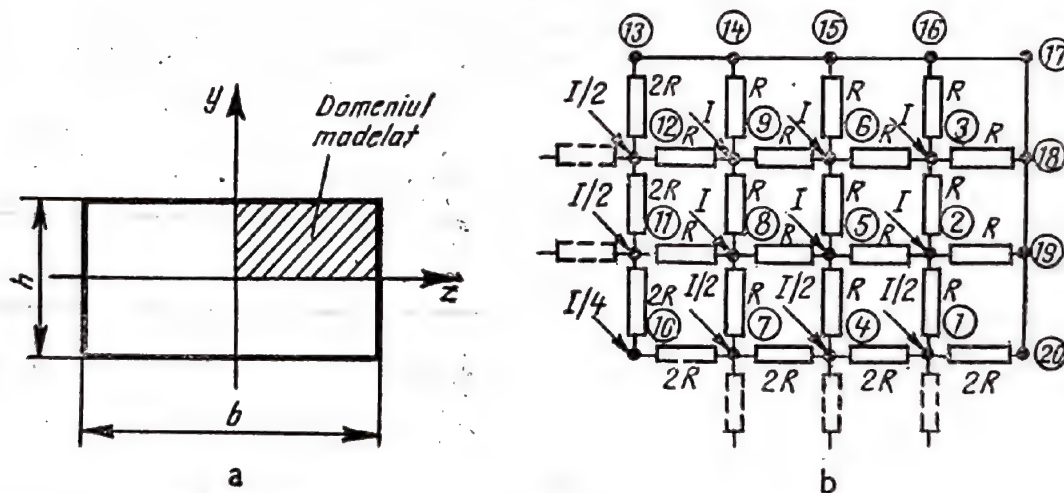


Fig. 9.27.

nu s-a putut face simultan, de aceea s-au alimentat pe rând măsurându-se diferențele de potențial dintre fiecare nod și masă, iar apoi, s-au însumat, determinându-se potențialul fiecărui nod. Măsurarea diferențelor de potențial dintre noduri și contur, s-a făcut folosind montajul electric din figura 9.28. Pentru determinarea potențialului într-un nod, se fixează sonda în nodul respectiv și se reglează potențiometrele P_1 și P_2 pînă cînd curentul care trece prin instrumentul de zero (G0) devine egal cu zero. În acest moment se notează tensiunea indicată de milivoltmetru, care este egală cu diferența de potențial dintre nodul respectiv și masă.

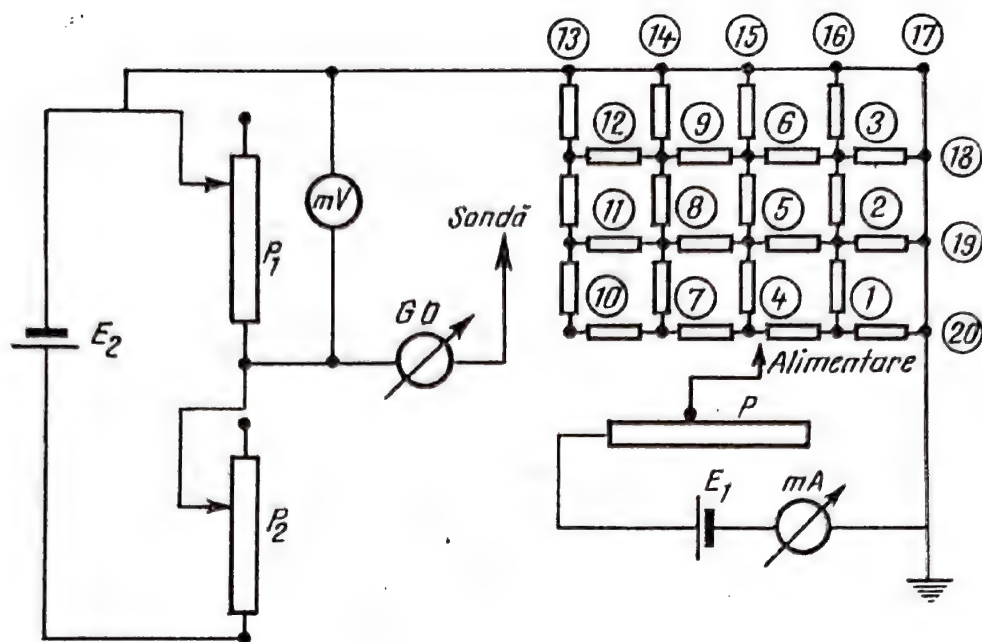


Fig. 9.28.

Cunoscând potențialul fiecărui nod, funcția de tensiune, în aceste puncte, s-a calculat cu relația

$$\Phi_i = kU_i = \frac{2 G \theta h^2}{R I_i} U_i, \quad (9.77)$$

unde I este curentul convențional dintr-un nod, (calculat prin însumarea curenților din noduri și împărțirea lor la numărul de noduri) și h pasul rețelei (distanța dintre două noduri vecine).

Tabelul 9.2

Valorile tensiunilor tangențiale în lungul axei Oz

Nodul nr.	20	1	4	7	10
$\tau_{xy} \frac{k}{h}$	-799,18	-492,92	-270,86	-114,84	-9,56

Valorile tensiunilor pe contur și

Nodul nr.	19	18	17	2	3
$\tau_{xz} \frac{k}{h}$	—	—	—	117,46	281,27
$\tau_{yz} \frac{k}{h}$	-746	-504,38	—	-437,31	-282,44

Potențialele măsurate în noduri și valorile funcției de tensiune

Tabelul 9.1

Nodul nr.	Curentul de alimentare [mA]	Tensiunea măsurată [mV]	$\Phi_t = kU_t$
1	2,0	638,30	374,0
2	4,0	580,40	340,0
3	4,0	385,50	226,0
4	2,0	1013,90	594,0
5	4,0	911,60	534,0
6	4,0	592,20	347,0
7	2,0	1202,30	704,0
8	4,0	1080,55	635,0
9	4,0	689,50	404,0
10	1,0	1261,50	739,0
11	2,0	1126,10	659,0
12	2,0	721,40	423,0

Tabelul 9.3

Valorile tensiunilor tangențiale în lungul axei Oy

Nodul nr.	13	12	11	10
$\tau_{xy} \frac{k}{h}$	895,55	555,15	262,15	16,55

Tabelul 9.4

în interiorul secțiunii

16	5	6	15	8	9	14
498,66	201,56	446,52	747,15	251,54	535,43	848,43
—	—239,56	—142,54	—	—104,8	— 59,38	—

Pentru determinarea expresiei funcției Φ , s-a folosit formula lui Newton de interpolare. Cunoscând expresia funcției de tensiune $\Phi(z, y)$, au fost determinate tensiunile τ_{zx} și τ_{yx} cu ajutorul relațiilor (9.76).

Potențialele măsurate în noduri și valorile corespunzătoare ale funcției de tensiune sînt date în tabelul 9.1. Pe baza acestor determinări s-au calculat tensiunile tangențiale în lungul celor două axe (tabelele 9.2 și 9.3) precum și pe contur și în interiorul secțiunii (tabelul 9.4).

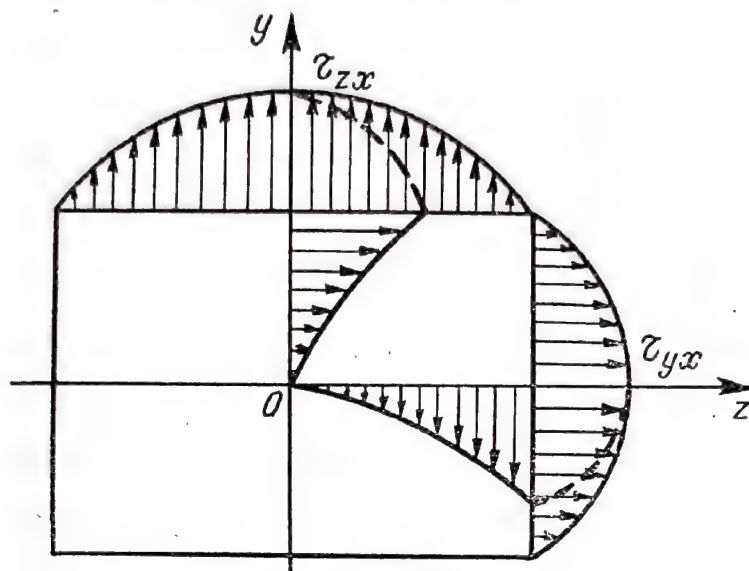


Fig. 9.29.

Valorile tensiunilor obținute experimental au fost comparate cu cele rezultate din calcul prin aplicarea metodei analitice. Diferența dintre valorile determinate experimental și cele calculate a fost sub 3%. Pe baza datelor din aceste tabele au fost trasate curbele din fig. 9.29.

BIBLIOGRAFIE

1. BOIANGIU, D., NICOLAU, E., NIȚA, C., *Instrumente, dispozitive și mașini matematice*, Editura tehnică, București, 1963.
2. BUZDUGAN, GH., *Rezistența materialelor*, Editura tehnică, București, 1974.
3. BUZDUGAN, GH., FETCU, L., RADES, M., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.
4. BIEZENO, C. G., KOCH, J. J., *Ueber einige Beispiele zur elektrischen Spannungsbestimmung*, Ingenieur Archiv. IV Band, 1933.
5. CIORANESCU, N. (BADESCU, R.), *Tratat de matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1962.
6. CRANZ, H., *Experimentelle Lösung von Torsionsaufgaben*, Ingenieur, Archiv. IV Band, 1933.
7. HETÉNYI, M., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York, London, 1963.

8. ILIESCU, N., *Determinarea coeficientului de concentrare a eforturilor unitare tangențiale în barele supuse la torsiune*, Cereul de Mecanică Tehnică, Institutul Politehnic București, 1967.
9. ILIESCU, N., BRATU, ST., *Studiul eforturilor unitare în bara de secțiune dreptunghiulară supusă la torsiune, prin analogia cu rețelele electrice*, Buletinul Institutului Politehnic București, tomul XXVI — fascicula 1, 1964.
10. LIEBMAN, G., *The Solution of Plane Stress Problems by an Electrical Analogique Method*, Brit. Journal of Applied Physics, vol. 6, nr. 5, 1955.
11. * * *, *Manualul inginerului*, vol. I, Editura tehnică, București, 1965.
12. NĂDĂȘAN, ST. ș.a., *Oboseala metalelor*, București, Editura tehnică, 1962.
13. * * *, *Poliarizationno — opticeski metod isledovania napriajenia*, Izd. Akademia Nauk SSSR, 1956.
14. RACOVEANU, N., DUMITRESCU, I., *Electrotehnica și electronica*, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1965.
15. RUSU, O., *Rezolvarea unor probleme ale teoriei elasticității prin analogie de sisteme electrice*, Teză de doctorat, Institutul de Construcții București, 1966.
16. RUSU, O., GALL, T., *Probleme moderne ale rezistenței materialelor*, București, Editura tehnică, 1970.
17. RUSU, O., ILIESCU, N., *Studiul analogic al sistemelor elastice, aplicație pentru arborele cotit al motorului de tractor U 650*. Conferința de mecanică tehnică, București, 30 octombrie 1967.
18. TRIPA, M., *Rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
19. TETELIBAUM, I.M., *Elektriceskoe modelirovanie*, Fizmatghiz, Moskva 1959.
20. TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N., *Theory of Elasticity*, Third Edition, Mc Graw-Hill Book Co., 1970.

MĂSURĂRI TENSOMETRICE PE MODELE

Conf. dr. ing. M. MODIGA
Dr. ing. N. ILIESCU

10.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Rezistența unei construcții este determinată de mărimea și caracterul repartizării forțelor exterioare care solicită construcția, de dimensiunile și formele constructive ale părților ei componente, de proprietățile mecanice ale materialelor din care aceasta este realizată, de tehnologia de execuție etc. Sinteza sau analiza structurală a unei construcții — părți componente ale procesului de proiectare — cuprinde, de regulă, stabilirea forțelor exterioare, determinarea tensiunilor și deplasărilor liniare și rotirilor cauzate de acestea precum și stabilirea condițiilor în care construcția respectivă își pierde capacitatea de a îndeplini în bune condițiuni funcțiile pentru care a fost destinată.

Rezolvarea completă a acestor probleme nu se poate face, întotdeauna, pe cale teoretică, de aceea adesea este necesar să se recurgă la metode experimentale, bazate pe măsurări efectuate pe construcția în mărime naturală (numită prototip) sau pe modele ale acesteia. Creșterea continuă a dimensiunilor construcțiilor, mașinilor și instalațiilor și diversificarea acestora (răspunzând cerințelor de utilizare a unor soluții constructive mai raționale, de reducere a greutății acestora ș.a.) au determinat, într-o măsură din ce în ce mai mare, pe ingineri să apeleze la experimentarea pe modele, în condiții de laborator.

În principiu, modelarea constă în înlocuirea studiului unui fenomen din natură prin studiul, în laborator, a modelului acestuia.

Aplicat în problemele de rezistență, studiul pe modele permite o evaluare mai exactă, față de metodele teoretice, a tensiunilor și deplasărilor, dînd posibilitatea unei analize sistematice a distribuției acestor mărimi în structuri cu grad ridicat de complexitate sau în părți separate ale acestora.

Eliminarea ipotezelor simplificatoare, utilizate la verificarea prin calcule a elementelor de rezistență, considerarea independenței dintre aceste elemente — care de multe ori se simplifică în calculele teoretice — permite, în cazul măsurărilor pe modele, corectarea coeficienților de siguranță utilizați în proiectare. Studiul pe modele face posibilă distribuirea mai rațională a încărcărilor pe elementele portante ale construcțiilor, reproiectarea acestora pe baza unor coeficienți de siguranță cât mai apropiați de realitate, în scopul evitării supradimensionării, ceea ce contribuie la minimalizarea consumurilor de materiale și la perfecționarea tehnologiilor de execuție.

Având în general gabarit mai mic decât prototipul, modelul se poate realiza și modifica cu ușurință, de aceea studiile pe modele sînt mult mai puțin costisitoare decât studiile pe prototip, iar aplicarea concluziilor acestor studii are o eficiență maximă.

Un experiment complet pe model necesită stabilirea și considerarea condițiilor de modelare pentru toți factorii care determină rezistența prototipului (inclusiv a factorilor tehnologici), lucru care nu se poate realiza întotdeauna. De aceea, pentru o modelare cât mai corectă sînt necesare adesea date obținute în urma unor observații și chiar măsurări efectuate pe prototip, în condiții de exploatare sau de experiment.

O altă direcție în care s-a dezvoltat tehnica modelării, mai ales în ultimul timp, constă în înlocuirea calculului analitic, bazat pe rezolvarea unor ecuații sau sisteme de ecuații algebrice, diferențiale, integrale sau integro-diferențiale, prin măsurări pe modele. În acest caz se modelează metoda de calcul, modelele devenind un instrument pentru rezolvarea unei anumite categorii de probleme, care pot avea naturi fizice diferite, descrise prin anumite ecuații. Astfel de modele se numesc analogice.

Măsurările experimentale pe modele constituie, de asemenea, un puternic instrument de verificare a soluțiilor și metodelor teoretice, care se vor aplica în calculul prototipului. În acest caz nu este vorba, de fapt, de o modelare întrucît rezultatele măsurărilor pe model se compară cu rezultatele calculelor efectuate chiar pentru acesta, astfel încît noțiunile de model și prototip își pierd sensul. Tehnica de execuție și de testare a acestui gen de modele nu diferă de cea folosită în modelarea structurală. Dispare însă necesitatea transpunerii pe prototip a rezultatelor obținute prin măsurări pe model.

Studiile pe model au dus la apariția și dezvoltarea unei ramuri a mecanicii și anume teoria și tehnica modelării, care studiază relațiile de corespondență geometrică și fizică între model și prototip, proiectarea și confecționarea modelelor, metodica testării modelelor, prelucrarea și interpretarea rezultatelor măsurărilor pe modele.

În capitolul de față sînt prezentate succint aspectele cele mai importante legate de teoria și tehnica modelării, cu trimiteri la literatura de

specialitate, care sperăm că vor contribui la extinderea studiilor pe modele.

10.2. BAZELE TEORIEI MODELĂRII

Teoria modelării rezolvă problemele legate de alegerea parametrilor modelului și de transpunerea pe prototip a mărimilor corespundente determinate pe model. În cele ce urmează se notează cu indicele „n” mărimile care se referă la prototip iar cele care se referă la model cu indicele „m”.

10.2.1 CORESPONDENȚE PROTOTIP – MODEL

Între prototip și model există o corespondență biunivocă dacă, după mărimile care se referă la model se pot determina unic mărimile care se referă la prototip, sau invers.

Correspondența dintre mărimile scalare, vectoriale sau tensoriale referitoare la prototip și modelul acestuia se poate exprima matematic sub forma

$$\tilde{A}_n = \{K_{\tilde{A}}\} \tilde{A}_m \quad (10.1)$$

unde $\{K_{\tilde{A}}\}$ este un operator, care realizează transformarea.

Componentele acestuia se numesc factori de scară.

În modelarea problemelor mecanicii corpurile deformabile se pot întâlni următoarele tipuri principale de corespondență :

a) *Correspondența prin similitudine (asemănare)*. Modelarea pe baza corespondenței prin similitudine a fost studiată în cea mai mare măsură și este larg folosită în tehnică. Caracteristic modelării prin similitudine este faptul că operatorul $\{K_{\tilde{A}}\}$ care realizează corespondența dintre mărimile \tilde{A}_n și A_m are o singură componentă, $K_{\tilde{A}}$, constantă în timp și în spațiu — factorul de scară al mărimii \tilde{A} . De exemplu, componentele r_{xm} , r_{ym} , r_{zm} ale vectorului de poziție \vec{r}_m al unui punct al modelului corespund componentelor r_{xn} , r_{yn} , r_{zn} ale vectorului \vec{r}_n de poziție al punctului omolog de pe prototip, conform relației

$$\begin{vmatrix} r_{xn} \\ r_{yn} \\ r_{zn} \end{vmatrix} = K_L \begin{vmatrix} r_{xm} \\ r_{ym} \\ r_{zm} \end{vmatrix} \text{ sau } r_{in} = K_L r_{im}, (i = x, y, z). \quad (10.2)$$

Componentele r_x, r_y, r_z se transformă în acest caz cu ajutorul mărimii adimensionale constante K_L — numit factor de scară al dimensiunilor liniare *) — adică

$$r_{xn} = K_L r_{xm}; \quad r_{yn} = K_L r_{ym}; \quad r_{zn} = K_L r_{zm}.$$

Intervalele de timp corespunzătoare desfășurării fenomenelor similare pe prototip și model se află în relația

$$t_n = K_t t_m, \\ K_t \text{ — factor de scară al timpului.}$$

Alte mărimi scalare, vectoriale sau tensoriale, similare pentru prototip și model, în intervale corespunzătoare de timp, sînt legate prin relațiile

$$\rho_n = K_\rho \rho_m; \quad E_n = K_E E_m; \quad \mu_n = K_\mu \mu_m; \quad T_n^\circ = K_{T^\circ} T_m^\circ \quad (10.3)$$

în care ρ, E, μ, T° reprezintă respectiv densitatea, modulul de elasticitate, coeficientul lui Poisson și temperatura iar $K_\rho, K_E, K_\mu, K_{T^\circ}$ — factorii de scară corespunzători

$$F_{in} = K_F F_{im}; \quad u_{in} = K_u u_{im}; \quad (i = x, y, z) \quad (10.4)$$

unde F_i, u_i reprezintă vectorii forțelor și deplasărilor liniare ale punctelor corpurilor deformabile

$$\sigma_{ijn} = K_\sigma \sigma_{ijm}; \quad \varepsilon_{ijn} = K_\varepsilon \varepsilon_{ijm}; \quad (i, j = x, y, z) \quad (10.5)$$

în care $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ reprezintă tensorii tensiunilor și deformațiilor.

b) *Corespondența afină.* În modelarea problemelor de elasticitate a materialelor ortotrope, în modelarea plăcilor și învelitorilor subțiri și în multe alte cazuri este avantajos sau chiar necesar să se folosească factori de scară diferiți pentru diferitele componente ale unui vector sau tensor. De exemplu, dacă se notează cu K_x, K_y, K_z factorii geometrice de scară după direcțiile x, y, z , corespondența geometrică afină dintre prototip și model se realizează cu ajutorul operatorului $\{K_r\}$, care este în acest caz o matrice diagonală

$$\{K_r\} = [K_L] = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}, \text{ unde, în general, } K_x \neq K_y \neq K_z.$$

Corespondența prototip — model pentru mărimi scalare, cum ar fi t, ρ, E, μ, T° , se realizează prin relații de tipul (10.3), prin urmare în cazul corespondenței afine cîmpurile mărimilor scalare sînt asemenea în timp ce cîmpurile mărimilor vectoriale sau tensoriale sînt afine.

*) În literatură se folosește deopotrivă pentru factorul de scară și denumirea de scară, definită ca raportul dintre \tilde{A}_n și A_m .

c) *Corespondența funcțională.* Este o generalizare a asemănării în sensul că factorul de scară K_A rămâne același pentru toate componentele unui vector sau unui tensor, însă este variabil în timp și în spațiu

$$K_A = K_A(t, x, y, z).$$

d) *Corespondența operatorie.* În acest caz K_A este un operator diferențial, integral sau integro-diferențial. Astfel în modelarea problemelor visco-elasticității liniare (fluaș și relaxare) intervine operatorul integral liniar al lui Volterra.

În afara tipurilor de corespondențe enumerate, pot interveni și combinații ale lor. De exemplu, în modelarea problemelor visco-elasticității materialelor anizotrope se aplică corespondența afino-operatorie.

10.2.2. LEGILE MODELĂRII

Identitatea fenomenului natural cu cel reprodus pe model se realizează cu ajutorul legii modelului, care este constituită din ansamblul relațiilor de legătură între factorii de scară ai mărimilor care intervin în fenomenul respectiv. Numărul acestor relații este egal cu numărul complexelor adimensionale, care se pot forma din mărimile fizice de care depinde fenomenul studiat. Aceste complexe adimensionale se numesc criterii sau invarianți de similitudine și trebuie să aibă aceleași valori pentru prototip și model, conform celei de a 3-a legi a similitudinii.

Criteriile de similitudine, care formează legea modelului unui fenomen, se pot stabili prin două metode de bază :

- 1) analiza ecuațiilor care descriu fenomenul ;
- 2) analiza dimensională.

1) *Analiza ecuațiilor* se aplică pentru orice fel de corespondență prototip — model, în toate cazurile în care problema studiată poate fi descrisă din punct de vedere matematic. Metoda constă în stabilirea condițiilor în care ecuațiile matematice, care descriu fenomenul studiat, rămân invariante față de transformarea care realizează corespondența.

Pentru stabilirea acestor condiții se scriu pentru prototip ecuațiile matematice care descriu fenomenul studiat, după care, fiecare mărime ce intervine în aceste ecuații se înlocuiește cu relații de forma (10.1). Se obțin astfel relațiile care trebuie să existe între factorii de scară, astfel încât ecuațiile matematice scrise pentru prototip să descrie același fenomen pe model.

Se consideră o ecuație, reprezentând suma unor produse de puteri ale mărimilor ce caracterizează fenomenul pe prototip

$$\sum_{i=1}^n A_{1in}^{\alpha_{1i}} A_{2in}^{\alpha_{2i}} \dots A_{rin}^{\alpha_{ri}} = 0. \quad (10.6)$$

Se aduce ecuația (10.6) sub formă adimensională, împărțind toți termenii la unul din ei, de exemplu la ultimul

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{A_{1in}^{\alpha_{1i}} A_{2in}^{\alpha_{2i}} \dots A_{rin}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sn}^{\alpha_{1s}} A_{2sn}^{\alpha_{2s}} \dots A_{rsn}^{\alpha_{rs}}} + 1 = 0. \quad (10.7)$$

Ecuația (10.7), scrisă pentru model, are forma

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{A_{1im}^{\alpha_{1i}} A_{2im}^{\alpha_{2i}} \dots A_{rim}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sm}^{\alpha_{1s}} A_{2sm}^{\alpha_{2s}} \dots A_{rsm}^{\alpha_{rs}}} + 1 = 0. \quad (10.8)$$

Efectuând transformarea prin similitudine a relației (10.7), cu ajutorul relațiilor

$$A_{jin} = K_{Aji} A_{jim}; (i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r) \quad (10.9)$$

se obține:

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{K_{A1i}^{\alpha_{1i}} K_{A2i}^{\alpha_{2i}} \dots K_{Ari}^{\alpha_{ri}}}{K_{A1s}^{\alpha_{1s}} K_{A2s}^{\alpha_{2s}} \dots K_{Ars}^{\alpha_{rs}}} \cdot \frac{A_{1im}^{\alpha_{1i}} A_{2im}^{\alpha_{2i}} \dots A_{rim}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sm}^{\alpha_{1s}} A_{2sm}^{\alpha_{2s}} \dots A_{rsm}^{\alpha_{rs}}} + 1 = 0. \quad (10.10)$$

Ecuația (10.10) este identică cu (10.7) numai dacă sînt satisfăcute următoarele relații între factorii de scară

$$\frac{K_{A1i}^{\alpha_{1i}} K_{A2i}^{\alpha_{2i}} \dots K_{Ari}^{\alpha_{ri}}}{K_{A1s}^{\alpha_{1s}} K_{A2s}^{\alpha_{2s}} \dots K_{Ars}^{\alpha_{rs}}} = 1; (i = 1, \dots, s-1). \quad (10.11)$$

Înlocuind în (10.11) factorii de scară K_{Aij} , conform relațiilor (10.9), se obțin $(s-1)$ criterii de similitudine

$$\Pi_i = \frac{A_{1in}^{\alpha_{1i}} A_{2in}^{\alpha_{2i}} \dots A_{rin}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sn}^{\alpha_{1s}} A_{2sn}^{\alpha_{2s}} \dots A_{rsn}^{\alpha_{rs}}} = \frac{A_{1im}^{\alpha_{1i}} A_{2im}^{\alpha_{2i}} \dots A_{rim}^{\alpha_{ri}}}{A_{1sm}^{\alpha_{1s}} A_{2sm}^{\alpha_{2s}} \dots A_{rsm}^{\alpha_{rs}}}; (i = 1, \dots, s-1). \quad (10.12)$$

Pentru simplitatea scrierii, în cele ce urmează criteriile Π_i — identice pentru prototip și model — se vor scrie sub forma

$$\Pi_i = \frac{A_{1i}^{\alpha_{1i}} A_{2i}^{\alpha_{2i}} \dots A_{ri}^{\alpha_{ri}}}{A_{1s}^{\alpha_{1s}} A_{2s}^{\alpha_{2s}} \dots A_{rs}^{\alpha_{rs}}} = \text{idem}; (i = 1, \dots, s-1) \quad (10.13)$$

și vor primi, în unele cazuri, denumirea mărimilor caracteristice.

Din compararea relațiilor (10.7) și (10.13) rezultă că termenii ecuației (10.6), scrisă sub formă adimensională, reprezintă chiar criteriile de similitudine.

Pentru a diferenția fenomenul cercetat de toate celelalte fenomene, descrise de aceleași ecuații, în stabilirea legii modelului trebuie avute în vedere nu numai ecuațiile care descriu fenomenul ci și condițiile la limită, condițiile inițiale, și alte condiții care determină unicitatea fenomenului studiat.

Exemplu: Să se stabilească legea modelului în cazul încovoierii statice a unei grinzi, având dimensiunile, încărcarea și modul de rezemare prezentate în figura 10.1.

Ecuatia diferențială a încovoierii prototipului se scrie sub forma

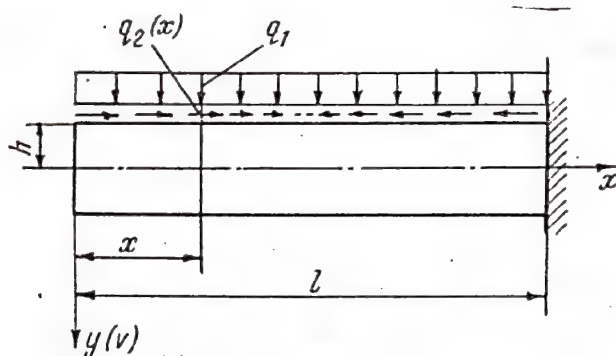


Fig. 10.1

$$E_n I_n \frac{d^2 v_n}{dx_n^2} = -M_n(x_n) = \frac{q_{1n} x_n^2}{2} - h_n \int_0^{x_n} q_{2n}(x_n) dx_n. \quad (10.14)$$

În cazul asemănării

$$\begin{aligned} E_n &= K_E E_m; \quad I_n = K_I I_m; \quad v_n = K_v v_m; \quad x_n = K_L x_m; \\ h_n &= K_h h_m; \quad q_{1n} = K_{q1} q_{1m}; \quad q_{2n} = K_{q2} q_{2m}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Se înlocuiesc (10.15) în (10.14), ținând cont că factorii de scară sînt constante, care pot fi scoase de sub simbolul de derivare sau integrare

$$K_E K_I \frac{K_v}{K_L^2} E_m I_m \frac{d^2 v_m}{dx_m^2} = K_{q1} K_L^2 \frac{q_{1m} x_m^2}{2} - K_h K_{q2} K_L h_m \int_0^{x_m} q_{2m}(x_m) dx_m.$$

Ecuatia diferențială obținută este identică cu ecuația (10.14) numai dacă

$$K_E K_I \frac{K_v}{K_L^2} = K_{q1} K_L^2 = K_h K_{q2} K_L = 1$$

de unde rezultă următoarele relații între factorii de scară

$$\frac{K_{q1} K_L^4}{K_E K_v K_I} = 1; \quad \frac{K_{q1} K_L}{K_{q2} K_h} = 1. \quad (10.16)$$

Relațiile (10.16) se puteau obține direct din ecuația (10.14) prin renunțarea la simbolurile de diferențială și integrală, scrierea sub formă adimensională (prin împărțirea la unul din termeni) și înlocuirea mărimilor care intervin în monoamele adimensionale obținute, prin factorii de scară corespunzători.

Întrucât în cazul asemănării factorii de scară sînt mărimi constante în tot domeniul în care se definesc, mărimile variabile se înlocuiesc cu valori particulare ale lor, numite mărimi caracteristice. În exemplul considerat x se înlocuiește cu lungimea barei iar $q_2(x)$ și $v(x)$ cu valori oarecare particulare, de exemplu cu $q_2 = q_2(0)$ și $v = v(0)$. Folosind mărimile caracteristice, relațiile (10.16) se scriu sub formă criterială astfel

$$\Pi_1 = \frac{q_1 l^4}{E I v} = \text{idem}; \Pi_2 = \frac{q_1 l}{q_2 h} = 1. \quad (10.17)$$

Deoarece condițiile la limită nu introduc în acest caz criterii suplimentare, legea de modelare este dată de relațiile (10.16) sau (10.17). Cele două relații (10.16) conținând șapte factori de scară, cinci dintre ei pot fi aleși arbitrar iar doi rezultă în funcție de cei aleși.

Numărul factorilor de scară care se pot alege ar putea fi redus dacă se observă că în relațiile (10.16) intervin patru factori de scară geometrice.

Luînd

$$K_L = K_h = \sqrt[4]{K_I} \quad (10.18)$$

și lăsînd independent pe K_v , modelul este geometric asemenea cu prototipul iar legea de modelare este dată de relațiile

$$K_{q1} = K_{q2}; \frac{K_E K_v}{K_{q1}} = 1. \quad (10.19)$$

Similaritatea geometrică se menține și după deformație, numai dacă se ia $K_v = K_L$. Relațiile (10.19) devin în acest caz

$$K_{q1} = K_{q2} = K_E K_L.$$

Dacă $K_{q1} = K_{q2} = K_E$ și dacă se respectă și condițiile (10.18), săgețile pe model și prototip rezultă egale ($K_v = 1$).

Respectarea condițiilor (10.18) este inutilă atunci cînd se studiază săgețile grinzii, întrucît în acest caz caracteristica secțiunii este momentul de inerție fără să intereseze forma secțiunii. De aceea legea de modelare (10.16) sau (10.17) este mai rațională, întrucît lasă mai multe grade de libertate în alegerea factorilor de scară pentru modelare.

Se remarcă faptul că modalitatea de a aduce o ecuație la forma adimensională nu este unică, ceea ce determină mai multe forme de scriere a relațiilor criteriale. Este avantajos însă ca în fiecare criteriu să figureze o

singură mărime din cele necunoscute ; acest lucru se poate realiza prin combinarea lor.

În cazul în care intervin funcții transcendente în ecuația care descrie fenomenul studiat, argumentele adimensionale constituie criterii de similitudine. În procesul de aducere a ecuației la forma adimensională aceste funcții dispar.

2) *Analiza dimensională* dă posibilitatea obținerii condițiilor de modelare chiar și în cazul în care problema studiată nu este formulată din punct de vedere matematic, dar sînt cunoscute mărimile fizice care intervin în fenomenul respectiv. Ea se aplică numai în cazul corespondenței prin similitudine.

La baza analizei dimensionale stă teorema produselor, denumită și teorema Π , care se enunță astfel : orice ecuație matematică, ce reprezintă o lege fizică, în care intervin k mărimi fundamentale și $(n - k)$ mărimi derivate, poate fi scrisă ca o funcție de $(n - k)$ mărimi adimensionale, denumite criterii. Se numesc fundamentale, acele mărimi care sînt independente dimensional (adică acele mărimi ale căror dimensiuni nu se pot obține din nici un fel de combinații ale dimensiunilor celorlalte $(n - k)$ mărimi, numite mărimi derivate.

Dacă se notează mărimile fizice care intervin în studiul unui fenomen cu a_i (cele fundamentale) și cu b_{k+j} (cele derivate), avînd unitățile de măsură $[a_i]$, $[b_{k+j}]$, dimensiunile $[b_{k+j}]$ pot fi exprimate în funcție de $[a_i]$ prin relații de forma

$$[b_{k+j}] = [a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\alpha_2} \dots [a_k]^{\alpha_k} ; (j = 1, \dots, n - k) \quad (10.20)$$

unde α_i ($i = 1, \dots, k$) sînt coeficienți numerici.

Fenomenul fiind independent de sistemul de unități de măsură adoptat, prin schimbarea unităților de măsură conform relațiilor

$$[a_i] = K_{a_i} [a'_i] ; [b_{k+j}] = K_{b_{k+j}} [b'_{k+j}] \quad (10.21)$$

ecuația adimensională (10.20) rămîne invariantă numai dacă

$$K_{b_{k+j}} = K_{a_1}^{\alpha_1} K_{a_2}^{\alpha_2} \dots K_{a_k}^{\alpha_k}$$

sau

$$\frac{K_{b_{k+j}}}{K_{a_1}^{\alpha_1} K_{a_2}^{\alpha_2} \dots K_{a_k}^{\alpha_k}} = 1 ; (j = 1, \dots, n - k). \quad (10.22)$$

Cele $(n - k)$ mărimi complexe adimensionale (10.22) pot fi scrise sub forma a $(n - k)$ criterii de similitudine

$$\Pi_j = \frac{b_{k+j}}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k}} ; (j = 1, \dots, n - k) \quad (10.23)$$

care reprezintă argumentele adimensionale ale ecuației criteriale a fenomenului respectiv

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0.$$

Criteriile de similitudine (10.23) se stabilesc, prin analiză dimensională, fie folosind procedeul Rayleigh [33] (folosit în cazul în care fenomenul studiat cuprinde pînă la cinci sau șase mărimi fizice), fie un procedeu mai general, bazat pe aplicarea teoriei sistemelor de ecuații algebrice liniare și omogene [31], [33].

În afara criteriilor astfel determinate, legea de modelare mai cuprinde condițiile de invarianță a parametrilor și variabilelor adimensionale, care reprezintă criterii de similitudine.

Exemplu. Să se stabilească legea de modelare a barei de secțiune oarecare solicitată la răsucire pură.

Funcția implicită a mărimilor care intervin în studiul răsucirii pure a barelor este :

$$F(l, r, G, \mu, F, \tau, \varphi, \delta) = 0;$$

unde : l — lungimea caracteristică a barei ; r — dimensiunea caracteristică din planul secțiunii ; G — modulul de elasticitate transversal ; μ — coeficientul lui Poisson ; F — forța caracteristică ce produce răsucirea barei ; τ — tensiunea tangențială ; φ — unghiul de răsucire al secțiunii ; δ — deplasările în lungul axei datorită deplanării secțiunii.

Considerînd drept mărimi fundamentale pe F și l , se pot forma următoarele șase criterii de similitudine

$$\Pi_1 = \varphi ; \quad \Pi_2 = \mu ; \quad \Pi_3 = \frac{r}{l} ;$$

$$\Pi_4 = \frac{Gl^4}{F} ; \quad \Pi_5 = \frac{\tau l^2}{F} ; \quad \Pi_6 = \frac{\delta}{l}.$$

care reprezintă legea modelului.

În cazurile în care fenomenul studiat poate fi descris din punct de vedere matematic, modelarea pe baza analizei ecuațiilor este mai completă decît modelarea pe baza analizei dimensionale. De aceea legile modelelor obținute în § 10.3 și § 10.4 se bazează pe analiza ecuațiilor.

10.3. MODELAREA ÎN PROBLEMELE TEORIEI LINIARE A ELASTICITĂȚII

10.3.1. STAREA SPAȚIALĂ DE TENSIUNI

Pentru stabilirea legii de modelare în problemele teoriei liniare a elasticității corpurilor omogene, izotrope și în stare izotermă, trebuie obținute condițiile de invarianță față de transformarea prin asemănare a

ecuațiilor de echilibru (ecuațiile lui Cauchy), a relațiilor de legătură între deformații și deplasări, a legii lui Hooke și a condițiilor la limită.

Ecuatiile de echilibru scrise tensorial

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + Q_i = 0; \quad (i, j = x, y, z) \quad (10.24)$$

se pot scrie sub următoarea formă adimensională

$$\frac{1}{Q_i} \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + 1 = 0.$$

Conform celor arătate la § 10.2.2, renunțând la simbolurile diferențiale și notînd cu σ , l , Q mărimile caracteristice ale tensiunilor $\sigma_{ij}(x, y, z)$, coordonatelor x, y, z și forțelor masice $Q_i(x, y, z)$, din (10.24) se obține următorul criteriu de similitudine

$$\frac{\sigma}{Ql} = \text{idem} \quad (10.25)$$

în condițiile

$$\frac{\sigma_{ijn}(x_n, y_n, z_n)}{\sigma_{ijm}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_m} = K_\sigma; \quad \frac{x_n}{x_m} = \frac{y_n}{y_m} = \frac{z_n}{z_m} = \frac{l_n}{l_m} = K_L; \quad (10.25a)$$

$$\frac{Q_{in}(x_n, y_n, z_n)}{Q_{im}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{Q_n}{Q_m} = K_Q.$$

În mod analog, relațiile de legătură între deformații și deplasări

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right); \quad (i, j = x, y, z)$$

scrise sub formă adimensională, conduc la criteriul

$$\frac{u}{\varepsilon l} = \text{idem} \quad (10.26)$$

în care u și ε reprezintă deplasarea respectiv deformația caracteristică a mărimilor $u_i(x, y, z)$ respectiv $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$, care satisfac relațiile

$$\frac{u_{in}(x_n, y_n, z_n)}{u_{im}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{u_n}{u_m} = K_u; \quad \frac{\varepsilon_{ijn}(x_n, y_n, z_n)}{\varepsilon_{ijm}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_m} = K_\varepsilon. \quad (10.26a)$$

Legea lui Hooke

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} (\sigma_i - \mu \sigma_i); \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \sigma_{ij}; \quad \begin{pmatrix} i, j = x, y, z \\ i \neq j \end{pmatrix}$$

scrisă sub formă adimensională conduce la următoarele criterii

$$\frac{\sigma}{E\varepsilon} = \text{idem} \quad (10.27)$$

$$\mu = \text{idem}. \quad (10.28)$$

Condițiile de contur pentru suprafața S_1 (avînd normala n_j) pe care acționează sarcinile distribuite p_i ($i = x, y, z$), se scriu sub forma

$$p_i = \sigma_{ij}n_j; \quad (j = x, y, z)$$

iar pentru suprafața S_2 , pe care condițiile la limită sînt date în deplasări

$$u_i = u_{ic}; \quad (i = x, y, z)$$

unde u_{ic} reprezintă componentele pe axe x, y, z ale deplasărilor punctelor conturului. Condițiile la limită determină următoarele criterii de similitudine

$$\frac{p}{\sigma} = \text{idem}; \quad \frac{u}{u_c} = \text{idem} \quad (10.29)$$

unde p, u_c reprezintă valori caracteristice ale mărimilor $p(x, y, z)$ respectiv $u_c(x, y, z)$, care satisfac relațiile

$$\frac{p_n(S_1)}{p_m(S_{1m})} = \frac{p_n}{p_m} = K_p; \quad \frac{u_{icn}(S_{2n})}{u_{icm}(S_{2m})} = \frac{u_{cn}}{u_{cm}} = K_{uc} \quad (10.29a)$$

K_p și K_{uc} fiind factorii de scară pentru forțele distribuite pe suprafața S_1 a conturului respectiv pentru deplasările punctelor zonei S_2 a conturului.

Relațiile (10.25 — 10.29) alcătuiesc legea de modelare în problemele teoriei liniare a elasticității.

În cazurile în care condițiile la limită sînt date numai în eforturi sau numai în deplasări, legea de modelare se simplifică întrucît dispăre criteriul corespunzător din (10.29).

Pentru rezolvarea problemelor dinamice în cadrul elasticității liniare, în ecuațiile de echilibru (10.24) intervin termenii $\left(-\rho \frac{d^2u}{dt^2} \right)$, cauzăți de prezența forțelor de inerție, care mai introduc criteriul

$$\frac{\rho u}{Qt^2} = \text{idem},$$

ρ fiind densitatea, iar t timpul.

Ultimul criteriu obținut se poate scrie, ținând cont de (10.25), (10.27), (10.26), sub forma

$$\frac{l}{t} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \text{idem} \quad (10.30)$$

care, împreună cu condițiile inițiale, se adaugă criteriilor obținute mai sus, permițând modelarea problemelor dinamice [10].

Întrucât $\frac{l}{t}$ reprezintă viteza mișcării particulelor corpului în timpul vibrației iar $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ este viteza de propagare a sunetului în materialul respectiv, criteriul (10.30) este asemănător criteriului Mach folosit în aerodinamică.

Pentru a obține legea de modelare în domeniul deformațiilor plastice se folosesc aceleași relații ca în domeniul elastic cu deosebirea că în locul legii lui Hooke trebuie considerate relațiile între tensiuni și deformații din teoria micilor deformații elasto-plastice sau din teoria curgerii (ecuațiile Prandtl — Reuss). Deși aceste relații nu introduc noi criterii, în acest caz este necesar să se respecte condițiile (10.27), (10.28) în orice punct al diagramei caracteristice, ceea ce impune asemănarea acestora pentru prototip și model.

10.3.2. STAREA PLANĂ

În cazul stării plane de tensiuni, prototipul și modelul acestuia au forma unor plăci plane de grosime constantă h , iar forțele sînt aplicate paralel cu planul median al plăcii.

Legea de modelare a problemelor plane ale elasticității este dată tot de relațiile (10.25 — 10.29).

Factorul de scară pentru grosimi, K_h , poate fi luat diferit de factorul de scară al dimensiunilor în plan. În alegerea acestuia se au în vedere considerente practice, legate de executarea modelului și efectuarea măsurărilor.

Problema stării plane de deformații, se reduce la starea plană de tensiuni înlocuind constantele elastice E și μ prin

$$E^* = \frac{E}{1 - \mu}; \quad \mu^* = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Aceste relații permit înlocuirea studiului stării plane de deformații prin studiul stării plane de tensiuni, care se poate realiza mult mai ușor în condiții de experimentare.

10.4. MODELAREA BARELOR, SISTEMELOR DE BARE ȘI A PLĂCILOR

Legea de modelare obținută în § 10.3 se folosește, de obicei, în studiul corpurilor elastice, avînd forme complexe, ceea ce este caracteristic construcțiilor de mașini. Aceasta deoarece comportarea acestor corpuri sub sarcini nu se poate studia decît pe baza ecuațiilor stabilite în cadrul teoriei elasticității.

Există însă elemente (mai ales în construcții civile, industriale, navale, aerospațiale) a căror comportare este descrisă de ecuații specifice, deduse pe baza unor anumite scheme de calcul, care iau în considerare numai acei factori care sînt esențiali pentru fenomenul studiat. Un exemplu în acest sens îl constituie problema examinată la § 10.22. Cu cît ecuațiile folosite au un caracter mai particular, cu atît se obțin condiții de modelare mai raționale.

10.4.1. ÎNCOVOIEREA, STABILITATEA ȘI VIBRAȚIA BARELOR

Ecuația diferențială a încovoierii plane a unei bare (fig. 10.2) de secțiune variabilă, așezată pe un mediu elastic de rigiditate variabilă de tip Winkler, solicitată transversal și axial se scrie sub forma [5], [25]

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] + N(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + K(x) v(x) = q(x) \quad (10.31)$$

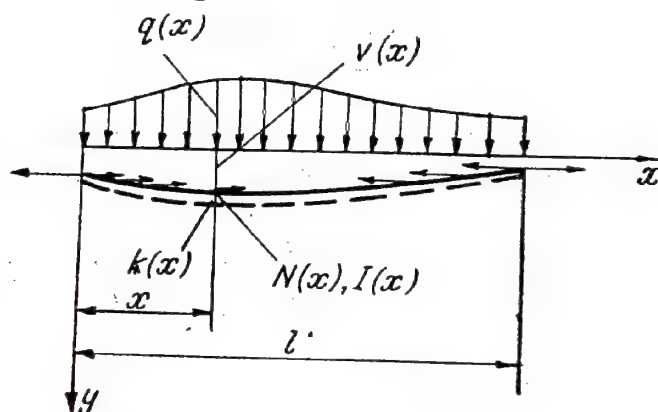


Fig. 10.2.

unde $N(x)$ este forța axială în secțiunea x ;

$v(x)$, $q(x)$, $K(x)$ — reprezintă respectiv săgeata, intensitatea încărcării transversale și coeficientul de rigiditate al mediului elastic în secțiunea x ;

$I(x)$ — momentul de inerție al ariei barei, în secțiunea transversală x .

Factorii de scară ai mărimilor variabile care intervin în ecuația (10.31) trebuie să fie constanți în tot domeniul de variație a acestora, adică

$$\begin{aligned} \frac{I_n(x_n)}{I_m(x_m)} = \frac{I_n}{I_m} = K_I; \quad \frac{k_n(x_n)}{k_m(x_m)} = \frac{k_n}{k_m} = K_k; \\ \frac{q_n(x_n)}{q_m(x_m)} = \frac{q_n}{q_m} = K_q; \quad \frac{N_n(x_n)}{N_m(x_m)} = \frac{N_n}{N_m} = K_N \end{aligned} \quad (10.32)$$

unde I , k , q , N reprezintă valorile caracteristice ale mărimilor corespunzătoare $I(x)$, $k(x)$, $q(x)$, $N(x)$ pentru o anumită valoare a abscisei x .

Scriind ecuația (10.31) sub formă adimensională, obținută prin împărțirea tuturor termenilor ei la $q(x)$, de exemplu, și renunțând la simbolul de derivare se obțin, conform celor arătate la § 10.22, următoarele criterii

$$\frac{EIv}{ql^4} = \text{idem}; \quad \frac{Nv}{ql^2} = \text{idem}; \quad \frac{kx}{q} = \text{idem}. \quad (10.33)$$

Pentru ca necunoscuta v să intervină numai într-un criteriu, se împart ultimele două criterii din (10.33) la primul, obținându-se:

criteriul săgeții :

$$\Pi_v = \frac{EIv}{ql^4} = \text{idem}; \quad (10.34)$$

criteriul forței axiale :

$$\Pi_N = \frac{Nl^2}{EI} = \text{idem}; \quad (10.35)$$

criteriul rigidității mediului elastic :

$$\Pi_k = \frac{kl^4}{EI} = \text{idem}. \quad (10.36)$$

Relații asemănătoare cu (10.32) se pot scrie și pentru forța tăietoare $T(x)$ și momentul încovoietor $M(x)$, variabile pe lungimea barei

$$\frac{T_n(x_n)}{T_m(x_m)} = \frac{T_n}{T_m} = K_T; \quad \frac{M_n(x_n)}{M_m(x_m)} = \frac{M_n}{M_m} = K_M. \quad (10.37)$$

Ținând cont de relațiile diferențiale

$$q(x) = - \frac{dT(x)}{dx} = - \frac{d^2M(x)}{dx^2},$$

se mai obțin următoarele două criterii

$$\Pi_T = \frac{T}{ql} = \text{idem}; \quad \Pi_M = \frac{M}{ql^2} = \text{idem}. \quad (10.38)$$

Se examinează condițiile la limită.

Legăturile rigide ale barei nu dau criterii suplimentare; este necesar însă ca grinda model să aibă același mod de rezemare, în secțiunile corespunzătoare, ca grinda prototip.

Legătura elastică într-o secțiune introduce următoarele două condiții la limită

$$v = \frac{\mathcal{R}}{C}; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{K}}. \quad (10.39)$$

unde \mathcal{R} și \mathcal{M} reprezintă forța, respectiv momentul din legătură iar C și \mathcal{K} sînt constantele elastice la tasare respectiv la rotire. Cum mărimile \mathcal{R} și \mathcal{M} reprezintă valori particulare ale forței tăietoare și momentului încovoietor, relațiile (10.39), după aducerea la forma adimensională, se pot scrie sub forma

$$\frac{Cv}{T} = \text{idem}; \quad \frac{\mathcal{K}v}{\mathcal{M}l} = \text{idem}. \quad (10.40)$$

Împărțind criteriile (10.40) la Π_v și înmulțindu-le cu Π_T respectiv Π_M , se obțin :

criteriul rezemării elastice :

$$\Pi_c = \frac{Cl^3}{EI} = \text{idem}; \quad (10.41)$$

criteriul încastrării elastice :

$$\Pi_K = \frac{\mathcal{K}l}{EI} = \text{idem}. \quad (10.42)$$

Criteriul pentru unghiurile de rotire $\varphi = \frac{dv}{dx}$ se obține din relația $\frac{\varphi l}{v} = \text{idem}$, prin eliminarea lui v cu ajutorul criteriului K_v

$$\Pi_\varphi = \frac{EI\varphi}{ql^3} = \text{idem}. \quad (10.43)$$

Pentru determinarea influenței forțelor tăietoare asupra săgeților grinzii se scrie săgeata totală sub forma

$$v = v_t + v_f = v_t + \frac{1}{GA_f} \iint q dx dx \quad (10.44)$$

unde G este modulul transversal de elasticitate, iar A este aria la forfecare a secțiunii. Din relația (10.44) rezultă criteriul rigidității la forfecare ($G A_f$), care se va nota cu Π_f ,

$$\Pi_f = \frac{EI}{GA_f l^3} = \text{idem}. \quad (10.45)$$

Stabilitatea barei reprezintă din punct de vedere al modelării, un caz particular al încovoierii compuse. În problemele de stabilitate săgeata v devine o mărime nedeterminată, de aceea criteriul K_v dispăre din legea de modelare, iar criteriul forței critice este (10.35), în care se înlocuiește N cu N_{cr} .

Vibrațiile transversale ale barei sînt descrise de ecuația diferențială

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] + m(x) \frac{d^2 v}{dt^2} + C_1(x) \frac{dv}{dt} = q(x, t) \quad (10.46)$$

unde

$m(x)$ — masa unității de lungime a barei;
 $C_1(x)$ — coeficientul de amortizare;
 t — timpul.

Mărimile variabile $m(x)$, $C_1(x)$, $q(x, t)$ trebuie să satisfacă, în cazul similitudinii, relațiile

$$\frac{m_n(x_n)}{m_m(x_m)} = \frac{m_n}{m_m} = K_m; \quad \frac{C_{1n}(x_n)}{C_{1m}(x_m)} = \frac{C_{1n}}{C_{1m}} = K_{c_1}; \quad \frac{q_n(x_n, t_n)}{q_m(x_m, t_m)} = \frac{q_n}{q_m} = K_q. \quad (10.47)$$

Ecuația (10.46) conduce la criteriul K_v și la două noi criterii

$$\frac{mv}{qt^2} = \text{idem}; \quad \frac{C_1 v}{qt} = \text{idem}. \quad (10.48)$$

Eliminînd săgeata v cu ajutorul criteriului K_v , înlocuind timpul cu mărimea caracteristică a sa, perioada (τ) și ținînd cont de relația $\tau = \frac{1}{\nu}$ (ν — frecvența vibrațiilor) din relațiile (10.48) se obține :

$$\text{criteriul frecvenței : } \Pi_\nu = \frac{ml^4 \nu^2}{EI} = \text{idem}; \quad (10.49)$$

$$\text{criteriul amortizării vibrațiilor : } \Pi_{c_1} = \frac{C_1^2 l^4}{EI m} = \text{idem}. \quad (10.50)$$

Amplitudinea vibrațiilor se determină din criteriul K_v în care se înlocuiește săgeata cu amplitudinea.

Observație : În cazul similitudinii geometrice complete ($K_A = \sqrt{K_I} = K_L^2$), luînd $m = A\rho$, relația (10.49) conduce la criteriul Cauchy (10.30).

Modelarea grinzilor continue și a cadrelor cu noduri fixe se face cu ajutorul criteriilor stabilite mai sus. Este necesar însă să se respecte identitatea criteriilor de similitudine pentru prototip și model în toate legăturile.

Pentru stabilirea condițiilor de modelare a cadrelor cu noduri deplasabile și a rețelelor de bare, este necesar a se considera în plus compatibilitatea deplasărilor în noduri a barelor concurente.

10.4.2. ÎNCOVOIEREA ȘI STABILITATEA REȚELELOR DE BARE

Folosind criteriul săgeții (10.34) stabilit la § 10.4.1, pentru barele r și s , concurente în nodul P , se pot scrie relațiile

$$\frac{EI_r^{(1)} v}{Q_r^{(1)} L^{(1)3}} = \text{idem}; \quad \frac{EI_s^{(2)} v}{Q_s^{(2)} L^{(2)3}} = \text{idem} \quad (10.51)$$

unde s-au folosit notațiile din fig. (10.3) și s-a înlocuit produsul qL prin Q . Întrucât reacțiunea R din nodul P este aceeași pentru grinzile r și s , din

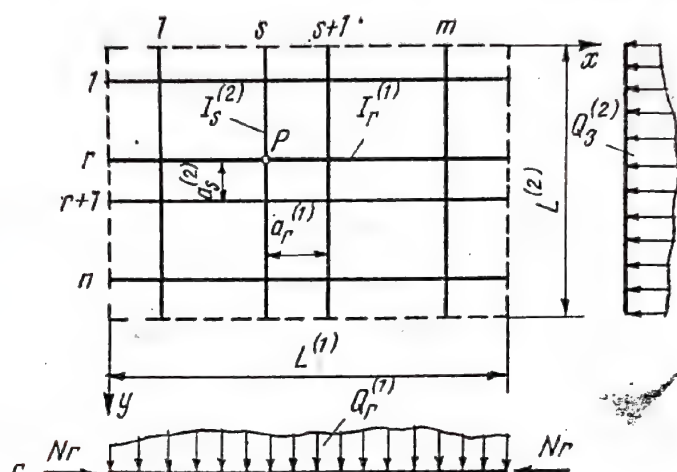


Fig. 10.3.

criteriul forței tăietoare, scris pentru cele două grinzi: $\frac{R}{Q_r^{(1)}} = \text{idem};$

$\frac{R}{Q_s^{(2)}} = \text{idem}$
se obține

$$\frac{Q_r^{(1)}}{Q_s^{(2)}} = \text{idem}. \quad (10.52)$$

Dar r și s pot lua orice valori, de aceea trebuie să existe și criteriile

$$\frac{Q_{r+1}^{(1)}}{Q_s^{(2)}} = \text{idem}; \quad \frac{Q_r^{(1)}}{Q_{s+1}^{(2)}} = \text{idem}. \quad (10.52.a)$$

Satisfacerea simultană a criteriilor (10.52) și (10.52 a) nu este posibilă decât dacă

$$\frac{Q_r^{(1)}}{Q_{r+1}^{(1)}} = \text{idem}; \quad \frac{Q_s^{(2)}}{Q_{s+1}^{(2)}} = \text{idem}. \quad (10.53)$$

Conlucrarea grinzilor rețelei necesită însă ca și săgețile grinzilor r și s , care rezultă din (10.51), să fie egale, adică

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_s^{(2)}} \cdot \frac{Q_s^{(2)}}{Q_r^{(1)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem}$$

sau, ținând cont de (10.52)

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_s^{(2)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem.} \quad (10.54)$$

Relații de forma (10.54), trebuind să existe în toate nodurile rețelei, se obține

$$\frac{I_{r+1}^{(1)}}{I_s^{(2)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem}; \quad \frac{I_r^{(1)}}{I_{s+1}^{(2)}} \cdot \frac{L^{(2)3}}{L^{(1)3}} = \text{idem},$$

relații care pot fi satisfăcute simultan cu (10.54), numai dacă

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_{r+1}^{(1)}} = \text{idem}; \quad \frac{I_s^{(2)}}{I_{s+1}^{(2)}} = \text{idem.} \quad (10.55)$$

Disponerea grinzilor rețelei trebuie să se facă astfel încît să fie satisfăcute relațiile

$$\frac{a_r^{(1)}}{L^{(1)}} = \text{idem}; \quad \frac{a_s^{(2)}}{L^{(2)}} = \text{idem.} \quad (10.56)$$

Ansamblul relațiilor (10.51 — 10.56), formează legea de modelare a încovoierii rețelilor de bare.

În problemele de stabilitate a rețelilor de bare la care $Q_r^{(1)} = Q_s^{(2)} = 0$, legea de modelare e dată de criteriile (10.54) — (10.56), la care se adaugă criteriul forțelor axiale (10.35)

$$\frac{N_r L^{(1)2}}{E I_r^{(1)}} = \text{idem.} \quad (10.57)$$

Dacă se consideră și influența forțelor tăietoare asupra săgeților, trebuie considerate în plus criteriile rigidității la forfecare (10.45)

$$\frac{E I_r^{(1)}}{GA_r^{(1)} L^{(1)2}} = \text{idem}; \quad \frac{E I_s^{(2)}}{GA_s^{(2)} L^{(2)2}} = \text{idem.} \quad (10.58)$$

Legea de modelare obținută mai sus, pe baza analizei ecuațiilor diferențiale ale barelor, asigură similitudinea modelului cu prototipul în toate punctele barelor care alcătuiesc sistemul.

În problemele în care interesează numai valorile necunoscutele static nedeterminate legea de modelare se simplifică întrucît în aceste cazuri este suficientă respectarea similitudinii modelului cu prototipul numai în anumite secțiuni ale barelor [2].

10.4.3. ÎNCOVOIEREA ȘI VIBRAȚIA PLĂCILOR PLANE RIGIDE

Încovoierea plăcilor plane cu săgeți mici este descrisă de ecuația

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (10.59)$$

unde w este săgeata plăcii, h — grosimea ei, $p(x, y)$ este încărcarea transversală, iar

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (10.60)$$

este rigiditatea cilindrică a plăcii.

Mărimile variabile $w(x, y)$ și $p(x, y)$ trebuie să satisfacă relațiile

$$\frac{w_n(x_n, y_n)}{w_m(x_m, y_m)} = \frac{w_n}{w_m} = K_w; \quad \frac{p_n(x_n, y_n)}{p_m(x_m, y_m)} = \frac{p_n}{p_m} = K_p. \quad (10.61)$$

Din ecuația (10.59) se obține criteriul

$$\frac{Dw}{pa^4} = \text{idem} \quad (10.62)$$

și relația $\frac{x}{y} = \text{idem}$, care conduce la criteriul

$$\frac{a}{b} = \text{idem}. \quad (10.63)$$

Dacă se studiază numai săgețile plăcii, legea de modelare este alcătuită din criteriile (10.62) și (10.63).

Pentru modelarea stării de tensiuni se folosesc relațiile de legătură între tensiuni și deplasări [5]

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (10.64)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

Mărimile variabile σ_x , σ_y , τ_{xy} se modelează cu același factor de scară, constant în tot câmpul plăcii, adică

$$\frac{\sigma_{xn}(x_n, y_n, z_n)}{\sigma_{xm}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\sigma_{yn}(x_n, y_n, z_n)}{\sigma_{ym}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\tau_{xyn}(x_n, y_n, z_n)}{\tau_{xym}(x_m, y_m, z_m)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_m} = K_\sigma. \quad (10.65)$$

Din relațiile (10.64) se obțin criteriile

$$\frac{\sigma h^2}{p a^2} = \text{idem}; \quad (10.66)$$

$$\mu = \text{idem}. \quad (10.67)$$

Criteriul (10.67) impune modificarea criteriului (10.62), care devine

$$\frac{E h^3 w}{p a^4} = \text{idem}. \quad (10.68)$$

Eforturile secționale M_x , M_y , M_{xy} , T_x , T_y se modelează cu ajutorul criteriilor

$$\frac{M}{p a^2} = \text{idem}; \quad \frac{T}{p a} = \text{idem}. \quad (10.70)$$

care se obțin din relațiile de definiție ale acestor eforturi [5].

Încovoierea plăcilor circulare rigide se modelează după aceeași lege ca a celor dreptunghiulare.

Studiul vibrațiilor transversale ale unei plăci rigide se face cu ecuația (10.59), la care în membrul drept se adaugă termenul $\left(-m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$.

unde m este masa unității de suprafață din planul plăcii. Legea de modelare a problemelor de vibrații este formată din criteriile (10.62), (10.63) la care se mai adaugă următorul criteriu al frecvenței ν

$$\frac{m \nu^2 a^4}{D} = \text{idem}. \quad (10.71)$$

Încărcarea $p(x, y, t)$, trebuie să satisfacă în acest caz condiția

$$\frac{p_n(x_n, y_n, t_n)}{p_m(x_m, y_m, t_m)} = \frac{p_n}{p_m} = K_p.$$

Amplitudinile se determină din criteriul (10.62).

10.4.4. ÎNCOVOIEREA ȘI STABILITATEA PLĂCILOR CU DEFORMĂȚII MARI

Din analiza ecuației diferențiale a încovoierii plăcilor cu deformații mari (fig. 10.4) rezultă criteriile (10.62 – 10.63)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right],$$

la care se mai adaugă

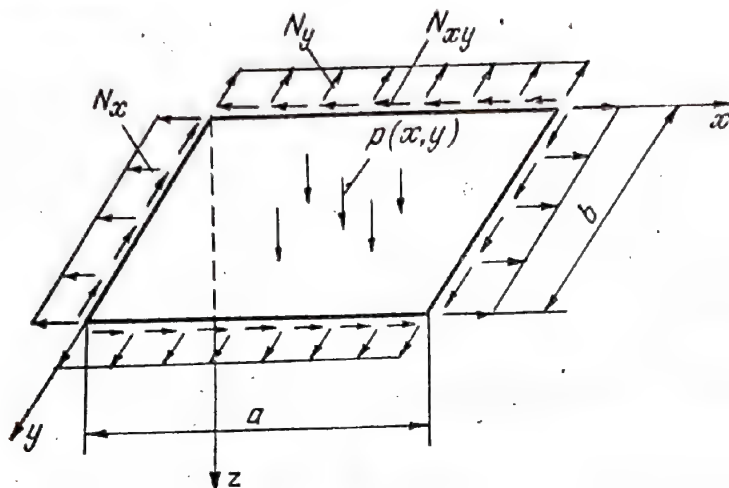


Fig. 10.4

$$\frac{N_{xn}}{N_{xm}} = \frac{N_{yn}}{N_{ym}} = \frac{N_{xyn}}{N_{xym}} = \frac{N_n}{N_m} = K_N; \quad (10.72)$$

$$\frac{Na^2}{D} = \text{idem}. \quad (10.73)$$

Pentru modelarea completă trebuie analizate și relațiile de legătură între eforturile de membrană N_x , N_y , N_{xy} și deplasările u_0 , v_0 , w , unde u_0 și v_0 sînt deplasări pe direcțiile x respectiv y ale unui punct din planul median al plăcii. Relațiile amintite

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y)$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1 + \mu)}{Eh} N_{xy}$$

dau criteriile

$$\mu = \text{idem}; \quad \frac{u_0 a}{h^2} = \text{idem}; \quad \frac{u_0}{v_0} = \text{idem}; \quad \frac{w}{h} = \text{idem}. \quad (10.74)$$

Modelarea problemelor de stabilitate a plăcilor se realizează cu ajutorul relațiilor (10.63), (10.72) și a criteriului (10.73) în care N se înlocuiește cu N_{cr} .

10.5. PROIECTAREA MODELELOR

Proiectarea modelelor constă în stabilirea formelor, dimensiunilor și tehnologiei de execuție a modelelor. Rezolvarea acestor probleme depinde în primul rând de destinația modelului. Realizarea unui model perfect asemenea cu prototipul este destul de complicată, uneori chiar imposibilă, și nu este întotdeauna necesară. De aceea, respectând cu strictețe condițiile geometrice de modelare pentru elementele de rezistență, se neglijează amănuntele constructive nesemnificative, care nu influențează asupra rezultatelor urmărite în cursul încercărilor. Nu trebuie însă neglijate slăbirile locale, care, influențează capacitatea portantă a construcțiilor.

O etapă importantă în proiectarea modelelor o constituie stabilirea, pe baza legii modelului, a factorilor de scară.

10.5.1. RELĂȚII ÎNTRE FACTORII DE SCARĂ ÎN MODELAREA PROBLEMELOR TEORIEI ELASTICITĂȚII

În studiul pe modele a rezistenței organelor de mașini și a altor construcții având configurații și solicitări complexe, modelarea se face pe baza criteriilor de similitudine obținute prin analiza ecuațiilor generale ale elasticității.

Întrucât cele șase relații (10.25 — 10.29), care alcătuiesc legea de modelare, conțin nouă factori de scară, rezultă că trei dintre aceștia pot fi aleși, însă nu la întâmplare.

Astfel, factorul de scară pentru modulul de elasticitate, K_E , este impus prin alegerea materialului modelului (în general diferit de materialul prototipului).

Factorul de scară geometric (K_L) se alege de asemenea, independent de ceilalți factori de scară. Mărimea acestuia depinde de gabaritul și complexitatea prototipului, de posibilitățile de încărcare ale modelului, de materialele și aparatele de măsură disponibile, de posibilitățile de execuție și de precizia cerută.

Se consideră cazul în care forțele masice influențează neglijabil starea de tensiuni, adică legea de modelare nu conține criteriul (10.25).

Dacă condițiile la limită sînt date numai în deplasări (a doua problemă fundamentală a teoriei elasticității), cel de al treilea factor de scară care se alege este K_{uc} .

Factorii de scară derivați, rezultînd din relațiile (10.26 — 10.29) sînt în acest caz

$$K_u = K_{uc}; \quad K_\varepsilon = \frac{K_{uc}}{K_L}; \quad K_\sigma = \frac{K_E K_{uc}}{K_L}, \quad (10.75)$$

Dacă se ia $K_{uc} = K_L$, asemănarea geometrică existentă înainte de deformare se menține și după deformare, condiție absolut necesară în cazul deplasărilor mari. În acest caz relațiile (10.75) devin

$$K_u = K_{uc} = K_L; K = 1; K_\sigma = K_E. \quad (10.76)$$

Dacă condițiile la limită sînt date numai în tensiuni (prima problemă fundamentală a teoriei elasticității), este rațional să se aleagă K_p , astfel încît deformațiile care apar în model să fie suficient de mari pentru a putea fi măsurate, fără a se depăși însă anumite valori limită. Factorii de scară derivați se determină cu relațiile

$$K_\sigma = K_p; K_\epsilon = \frac{K_p}{K_E}; K_u = K_{uc} = \frac{K_p K_L}{K_E}. \quad (10.77)$$

În cazul în care condițiile la limită sînt date și în tensiuni și în deplasări (problema mixtă a teoriei elasticității) se poate alege fie factorul de scară al încărcărilor exterioare, fie cel al deplasărilor conturului; între mărimile acestora există următoarea relație, dedusă din (10.26), (10.27) și (10.29):

$$\frac{K_p K_L}{K_{uc} K_E} = 1 \quad (10.78)$$

Acele dimensiuni ale modelului, care impun condiții la limită în deplasări (de exemplu anumite spații care dispar după încărcarea modelului), trebuie modelate cu ajutorul factorului de scară K_{uc} și nu K_L .

Forțele exterioare concentrate (F), forțele distribuite liniar (q) și momentele concentrate (M) se modelează cu ajutorul următorilor factori de scară

$$K_F = K_p K_L^2; K_q = K_p \cdot K_L; K_M = K_p \cdot K_L^3. \quad (10.79)$$

În problemele elasticității plane, în care grosimea h se modelează cu ajutorul factorului de scară K_h (care poate diferi de K_L), relațiile (10.79) devin

$$K_F = K_p K_L K_h; K_q = K_p K_L. \quad (10.80)$$

Trecerea de la model la prototip se face în cazul stării plane cu ajutorul următorilor factori de scară

$$K_\sigma = K_p = \frac{K_F}{K_L K_h}; K_u = \frac{K_p K_L}{K_E} = \frac{K_F}{K_E K_h}. \quad (10.81)$$

a) *Probleme de contact.* În problemele de contact a unei sfere, avînd diametrul D și constantele elastice E_1 și μ_1 , cu o suprafață plană de constante

elastice E_2 și μ_2 , raza (r) a suprafeței de contact și tensiunea maximă (σ) se calculează cu relațiile

$$r = K_0 \sqrt[3]{FD \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}; \quad \sigma = K'_0 \sqrt[3]{\frac{F}{D^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}} \quad (10.82)$$

unde F este forța de apăsare.

Similitudinea geometrică a zonelor de contact impune $K_r = K_L$ și dacă se notează cu K_c , factorul de scară al mărimii

$$\frac{E_1 E_2}{E_1(1 - \mu_2^2) + E_2(1 - \mu_1^2)}$$

din (10.82) se obțin următoarele relații între factorii de scară

$$K_D = \frac{K_c K_L^3}{K_F}; \quad K_\sigma = \frac{K_F}{K_L^2}. \quad (10.83)$$

A doua relație din (10.83) se poate folosi numai referitor la tensiunea maximă de contact. În ce privește distribuția de tensiuni în zona contactului și în afara ei, modelarea este distorsionată, așa cum se va vedea la § 10.5.1.

Dacă modelul este confecționat din același material ca și prototipul și dacă se ia $K_F = K_L^2$, rezultă $K_D = K_L$ și $K_\sigma = 1$.

În cazul contactului liniar relațiile (10.83) devin

$$K_D = \frac{K_c K_L^2}{K_q}; \quad K_\sigma = \frac{K_q}{K_L} \quad (10.84)$$

unde q este forța corespunzătoare unității de lungime a suprafeței de contact, iar D este diametrul cilindrului, în contact cu suprafața plană.

b) *Influența forțelor masice.* În cazul în care forțele masice nu pot fi neglijate (așa cum se întâmplă în cazul barajelor hidrotehnice, a utilajelor de turnătorie, etc.), factorul de scară pentru modelarea acestora trebuie să îndeplinească următoarele condiții, care rezultă din legea de modelare (10.25–10.29)

$$K_q = \frac{K_p}{K_L} \text{ sau } K_q = \frac{K_E K_{uc}}{K_L^2}. \quad (10.85)$$

Dacă forțele masice nu sînt gravitaționale, modelarea acestora nu prezintă dificultăți. Dacă însă forțele masice provin din greutatea proprie, satisfacerea criteriului (10.25), care a stat la baza stabilirii relațiilor (10.85), este greu de realizat. Într-adevăr, presupunînd modelul realizat din același

material cu prototipul, adică avînd $\rho_m = \rho_n$, factorul de scară al forțelor masice devine o mărime impusă, $K_Q = 1$, care diferă de cea dată de relațiile (10.85). În consecință rezultă pentru tensiuni un alt factor de scară, $K_\sigma = K_L$, diferit de (10.75) sau (10.77).

Dacă $K_L \gg 1$ valorile tensiunilor măsurate sînt neglijabile față de cele care apar în prototip, ceea ce poate duce la apreciable erori de măsurare.

Acceași restricție apare și dacă modelul este confecționat dintr-un alt material decît prototipul. În acest caz

$$K_Q = K_p; \quad K_\sigma = K_p K_L. \quad (10.86)$$

Acest neajuns se poate evita prin :

- folosirea modelelor parțiale pentru studiul unor elemente izolate ale prototipului;
- folosirea modelelor din materiale avînd valori mici ale modulului de elasticitate (materiale gelatinoase);
- folosirea modelelor geometrice afine.

Cea mai eficientă metodă pentru realizarea oricărui factor de scară a forțelor masice este însă centrifugarea modelului. În acest caz :

$$K_Q = K_p K_a, \text{ unde } K_a = \frac{g}{a_m}. \quad (10.87)$$

Accelerația modelului a_m putînd fi modificată în limite foarte largi, ea poate fi astfel aleasă încît să satisfacă relațiile :

$$K_p K_a = \frac{K_p}{K_L} \text{ sau } K_p K_a = \frac{K_E K_{uc}}{K_L^2}. \quad (10.88)$$

Pentru obținerea tensiunilor cauzate numai de încărcările exterioare, în cazul în care modelul este solicitat simultan și de forțe gravitaționale, se face separat studiul modelului încărcat numai prin greutatea proprie, după care se aplică principiul suprapunerii efectelor.

c) *Influența coeficientului lui Poisson* : Prin alegerea materialului modelului rezultă implicit μ_m și dacă $\mu_m \neq \mu_n$, criteriul (10.28) nu mai este satisfăcut. Un astfel de model se numește distorsionat. Influența pe care o are neîndeplinirea acestui criteriu asupra stării de tensiuni și de deformății nu a putut fi stabilită în cazul general, de aceea, eroarea introdusă în cazul $|\mu_n - \mu_m| \neq 0$ se apreciază la fiecare problemă de modelare în parte.

Modelarea prin similitudine impune ca factorii de scară să aibă valori constante în spațiu și în timp. Din relația (10.26, a), care se mai poate scrie sub forma

$$K_\epsilon = \frac{\frac{1}{E_n} [\sigma_{xn} - \mu_n(\sigma_{yn} + \sigma_{zn})]}{\frac{1}{E_m} [\sigma_{xm} - \mu_m(\sigma_{ym} + \sigma_{zm})]} \quad (10.89)$$

se observă că realizarea condiției de invariabilitate a lui K_ε , prin respectarea primei condiții din (10.25, a), este posibilă numai dacă $\mu_n = \mu_m$, sau în cazurile particulare: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (starea liniară) și $\sigma_y = -\sigma_z$ (forfecare pură).

Starea de tensiuni nefiind (în general) uniformă, inegalitatea $\mu_n \neq \mu_m$ influențează nu numai asupra valorilor absolute ale deformațiilor și tensiunilor, ci și asupra legii de distribuție a acestora. De aceea coeficienții de corecție, care se pot stabili în unele cazuri (cînd se cunosc legile de distribuție ale tensiunilor și deformațiilor), sînt valabili, în general, numai în anumite puncte ale modelului. Astfel, în centrul plăcilor dreptunghiulare rigide, factorul de scară al tensiunilor, rezultînd din relația (10.66), trebuie înmulțit cu coeficientul

$$K_1 = \frac{1 + \mu_n}{1 + \mu_m}. \quad (10.90)$$

Pentru placa circulară, simplu rezemată pe contur, coeficientul de corecție pentru factorii de scară ai tensiunilor tangențiale și radiale în centrul plăcii sînt

$$K_{1\sigma_t} = \frac{\mu_n}{\mu_m}; \quad K_{1\sigma_r} = \frac{3 + \mu_n}{3 + \mu_m}. \quad (10.91)$$

Pentru un disc în rotație, avînd grosimea constantă și diametrele interior și exterior egale respectiv cu d_m , D_m , coeficientul de corecție este același în toate punctele

$$K_{1\sigma} = \frac{(3 + \mu_n) + (1 - \mu_n) d_m/D_m}{(3 + \mu_m) + (1 - \mu_m) d_m/D_m}. \quad (10.92)$$

În alte cazuri, în care legea de distribuție a mărimilor care interesează este cunoscută, coeficienții de corecție pot fi obținuți cu destulă ușurință [24], [34].

Dacă însă legea de distribuție a tensiunilor sau deformațiilor nu este cunoscută (așa cum se întîmplă în teoria elasticității, unde nu există o soluție generală a ecuațiilor lui Lamé, sau Beltrami-Michell), trecerea de la tensiunile determinate pe model la cele ale prototipului se face, în cazul în care μ_m diferă de μ_n , cu ajutorul unor relații analitice [24]. Folosirea acestora necesită însă experimentarea pe două modele (în cazul stării plane) sau pe trei modele (în cazul stării spațiale), confecționate din materiale diferite (avînd $\mu_{m1} \neq \mu_{m2}$ respectiv $\mu_{m1} \neq \mu_{m2} \neq \mu_{m3}$).

Corecțiile care trebuie aplicate factorilor de scară ai modelelor distorsionale depind de mărimea studiată, variînd în limite destul de largi. În unele cazuri aceste corecții pot atinge 100 % sau chiar mai mult. Acesta este cazul mărimilor în care intervine expresia rațională $(1 - 2\mu)$, dacă $\mu_n \leq 0,3$ iar $\mu_m \geq 0,4$.

Coeficienții de corecție sînt în general neglijabili, dacă $\mu_n \approx \mu_m$.

În cazul stării plane, distribuția tensiunilor și deformațiilor nu depinde de constantele elastice, dacă modelul este simplu conex [32]. În cazul

modelelor multiplu conexe (cu diverse orificii), distribuția tensiunilor este independentă de constantele elastice numai dacă rezultanta și momentul resultant al forțelor aplicate fiecărui contur sînt nule. Mărimile tensiunilor depind însă de constantele elastice. În celelalte cazuri coeficientul lui Poisson influențează atît distribuția cît și valorile tensiunilor.

10.5.2. RELAȚII ÎNTRE FACTORII DE SCARĂ ÎN MODELAREA BARELOR, SISTEMELOR DE BARE ȘI PLĂCILOR

Relațiile dintre factorii de scară, necesare pentru proiectarea modelelor barelor și sistemelor de bare, se obțin din criteriile de similitudine care alcătuiesc legile de modelare respective (§ 10.4).

Astfel, de exemplu, în modelarea stabilității rețelelor ortogonale plane se aleg factorii de scară $K_{L^{(1)}}$ și $K_{L^{(2)}}$. Din (10.56) rezultă $K_{a_r^{(1)}} = K_{L^{(1)}}$, ($r = 1, \dots, n$) și $K_{a_s^{(2)}} = K_{L^{(2)}}$, ($s = 1, \dots, m$). Se alege de asemenea $K_{I_r^{(1)}}$, pentru o grindă oarecare r , după care din (10.54) rezultă, pentru o grindă oarecare s (ortogonală cu r)

$$K_{I_s^{(2)}} = \frac{K_{L^{(2)}}^3 K_{I_r^{(1)}}}{K_{L^{(1)}}^3}. \quad (10.93)$$

Factorii de scară ai momentelor de inerție ale celorlalte $(n-1)$ respectiv $(m-1)$ grinzi, trebuie să satisfacă criteriile (10.55).

În sfîrșit din criteriul (10.57) se determină factorul de scară pentru forțele axiale de compresiune

$$K_{N_r} = \frac{K_E K_{I_r^{(1)}}}{K_{L^{(1)}}^2}. \quad (10.94)$$

În mod analog se procedează în stabilirea factorilor de scară în modelarea plăcilor, cu singura deosebire că, dacă criteriul (10.67) nu este îndeplinit, modelul folosit în studiul tensiunilor este distorsionat. Consecințele și corecțiile care trebuiesc aduse în acest caz factorilor de scară au fost analizate la § 10.5.1.

10.6. ALEGEREA MATERIALELOR PENTRU MODELE

O importanță deosebită în problemele de modelare o are alegerea materialelor din care se confecționează modelele.

În alegerea materialelor o primă importanță o au caracteristicile mecanice, care trebuie să corespundă scopului pentru care este construit modelul. Astfel, pentru studiul în domeniul elastic prezintă importanță limita de proporționalitate și valoarea modului de elasticitate, fără să intereseze mărimea limitei de curgere. Dacă se examinează deformațiile elasto-plastice mici ale unei structuri, prezintă importanță limita de

curgere, dar nu interesează mărimea rezistenței la rupere a materialului folosit pentru confecționarea modelului structurii respective.

În determinarea sarcinilor limită rolul hotărâtor îl au rezistența la rupere și alungirea specifică la rupere.

La alegerea materialelor trebuie avute, de asemenea, în vedere posibilitățile de prelucrare a formelor modelului, modul de îmbinare a elementelor sale componente precum și posibilitățile de solicitare ale acestuia. În sfârșit, materialele folosite pentru confecționarea modelelor trebuie să fie ieftine și accesibile.

Modelele metalice, masive sau realizate din table, se utilizează de obicei în studiul deformațiilor elasto-plactice, în determinarea sarcinilor limită, precum și în alte cazuri în care se studiază fenomene complexe, legate de comportarea structurilor.

Caracteristicile mecanice ale modelelor metalice trebuie să fie aceleași (sau foarte apropiate) de ale prototipului.

În cazul modelelor metalice alcătuite din plăci este foarte important ca tablele folosite să aibă variații de grosime cât mai mici, un grad de anizotropie cât mai redus și, dacă îmbinarea se realizează prin sudură, materialul trebuie să prezinte o bună sudabilitate, astfel ca deformațiile care apar la montaj să fie minime.

Pentru cercetarea deformațiilor și tensiunilor în domeniul elastic se folosesc mase plastice transparente sau semitransparente cum ar fi plexiglasul, celuloidul, fenoplastul (material plastic cu baza de fenol și aldehydă formică), ș.a. Dintre acestea cea mai largă întrebuințare o are plexiglasul.

Plexiglasul este un material ușor, omogen și cu izotropie destul de ridicată, avînd coeficientul lui Poisson apropiat de al oțelului. Valoarea mică a modului de elasticitate al plexiglasului permite obținerea unor deformații sensibile, măsurabile cu aparatura tensometrică obișnuită, prin încărcări suficient de mici $\left(50 - 100 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}\right)$. Modulul de elasticitate

este practic același la întindere și compresiune, dar depinde de temperatură. Astfel, în domeniul temperaturilor obișnuite ($15 - 20^\circ\text{C}$), valoarea modului de elasticitate se modifică în limitele $\pm 5\%$, ceea ce introduce erori suficient de mici în calculul tensiunilor ($\pm 2\%$). În modelarea problemelor dinamice se folosește modulul de elasticitate dinamic, a cărui valoare depinde de frecvența vibrației.

Determinarea constantelor elastice se recomandă a se face în laborator, pentru fiecare lot în parte sau chiar pentru fiecare foaie de plexiglas în parte.

Înlăturarea tensiunilor interne și stabilizarea caracteristicilor mecanice se pot realiza printr-o încălzire uniformă, timp de 2—3 ore, la temperatura de $75 - 100^\circ\text{C}$. Acest tratament termic are ca efect o reducere a dimensiunilor liniare din planul plăcii cu 2—3% și o mărire a grosimii cu 4—5%.

Materialele plastice au conductibilitatea termică mult mai mică, în comparație cu a metalelor. Astfel, de exemplu, la 20°C , plexiglasul are coeficientul de conductibilitate termică $\lambda = 0,15 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot \text{grd}$, față

de 20 – 50 kcal/m · h · grd, pentru oțel și 100 – 140 kcal/m · h · grd, pentru duraluminiu. Din această cauză, în cazul testării modelelor prin metoda tensometriei electrice este mult încetinit procesul de egalizare a temperaturii mărcii (încălzită datorită curentului electric care trece prin circuitul punții) și modelului, fenomen denumit „fluaj aparent”. Acest fenomen, precum și fluajul real — care se manifestă mult mai pronunțat la materialele plastice, chiar la temperaturi obișnuite — impun ca măsurările să se execute după câteva minute de la aplicarea încărcărilor, la temperaturi cât mai constante și solicitând modelul la tensiuni care să nu depășească 100 daN/cm². Deformația care apare datorită acestei solicitări, în cazul unui material avînd $E = 30000 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$, este $\varepsilon = 0,0033$, valoare care se

poate măsura cu ușurință. Fluajul aparent mai poate fi evitat prin menținerea continuă a traductorilor la o tensiune electrică egală cu cea de măsurare, dată de o sursă exterioară punții [9].

Pentru cercetări în domeniul elasto-plastic se folosesc materiale pe bază de policlorură de vinil (plastificate termic). Cu rezultate deosebit de bune se pot folosi materialele indigene SDP și CSDP materiale care au la bază compoundinguri vinilice, obținute la ICECHIM [3]. Acestea au curba caracteristică apropiată de aceea a materialelor ideal plastice, limita de curgere variază între 550 daN/cm² și 620 daN/cm², în funcție de temperatură și de tipul solicitării. Odată cu apariția deformațiilor plastice aceste materiale își schimbă culoarea, albindu-se la întindere și întunecîndu-se la compresiune. Restul materialului, solicitat sub limita de curgere, își păstrează culoarea naturală, în general galben — deschis. Datorită acestei proprietăți aceste materiale se numesc cromoplastice.

Cîteva caracteristici mecanice și fizice ale materialelor mai frecvent folosite la confecționarea modelelor sînt date în tabelul 10.1.

Tabelul 10.1

Caracteristici aproximative ale cîtorva materiale plastice utilizate pentru modele tensometrice

Materialul	Modulul de elasticitate $E \left[\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \right]$	Coefficientul lui Poisson μ	Limita de proportionalitate $\sigma_p \left[\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \right]$	Rezistența la rupere $\sigma_r \left[\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \right]$	Greutatea specifică $\gamma \left[\frac{\text{daN}}{\text{dm}^3} \right]$
Plexiglas	$2,5 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^4$	0,35	300	500 – 600	1,2
Celuloid	$1,4 \cdot 10^4 - 1,5 \cdot 10^4$	0,4	250 – 300	300 – 600	1,5
Fenoplast (rezit turnat)	$3,2 \cdot 10^4$	0,35	400	—	1,2 – 1,3
SDP, CSDP *)	$2 \cdot 10^4 - 3,8 \cdot 10^4$	0,35	$\sigma = 550 - 620$	600 – 680	—

* Prin modificarea condițiilor tehnologice de obținere și prin modificarea caracteristicilor ingredientilor folosiți s-a reușit o diversificare foarte mare a acestor materiale.

Modelele de cauciuc se folosesc, de obicei, pentru obținerea unor rezultate calitative. Ele sînt ieftine, accesibile și ușor prelucrabile, însă prezintă o serie de neajunsuri, legate de neliniaritatea relației dintre tensiuni și deformații (modulul de elasticitate al cauciucului variază între limite foarte largi: $2 - 7 \cdot \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$ [20]). Coeficientul lui Poisson are valori

foarte mari ($\mu = 0,46 - 0,49$). În cazul în care se folosesc la măsurări cantitative, alungirile specifice care apar în modelele confecționate din cauciuc se limitează la 10 – 12%. În acest domeniu modulul de elasticitate are variații mici. Pentru stabilirea deformațiilor datorite fluajului pronunțat, modelele din cauciuc se mențin sub sarcină cca 30 minute, după care se efectuează măsurările. Acestea se fac, de obicei, prin metoda rețelilor (trasate cu tuș) sau prin metoda tensometriei electrice rezistive, folosind traductori pentru deformații mari [20], [39].

Stabilitatea construcțiilor, alcătuite din elemente subțiri (învelitori, rezervoare, etc.) se poate studia pe modele confecționate din carton, tratat cu ajutorul unor lacuri speciale, pe bază de ulei. Deși prezintă un grad destul de ridicat de anizotropie ($E_x \cong 3 \cdot 10^4 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$; $E_y \cong 2,26 \cdot 10^4 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$;

$\mu_{xy} = 0,28$; $\mu = 0,23$; $G = 0,996 \cdot 10^4 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$) și are caracteristici mecanice nestabile, s-au realizat încercări cu bune rezultate prin această metodă [8].

La executarea modelelor folosite în studiul tensiunilor datorită greutateii proprii se folosesc materiale gelatinoase, avînd valori foarte mici ale modulului de elasticitate ($\text{sub } 10 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$).

Unele modele ale structurilor întîlnite în construcții navale și aeronautice se confecționează din materiale stratificate, care au o rezistență superioară la încovoiere și stabilitate. Dacă umplutura dintre plăcile metalice este formată din polistiren sau fenoplast expandat se realizează și o bună izolare termică și acustică.

Materialele optic-active, folosite la confecționarea modelelor, utilizate în fotoelasticitate, au fost descrise la capitolul 4.

10.7. EXECUTAREA MODELELOR

Modelele metalice masive se execută după aceeași tehnologie după care se execută prototipul, avînd însă grijă să se asigure calitatea necesară a suprafețelor. Îmbinarea prin sudură a tablelor de grosimi mici (0,2 – 0,5 mm), practic nu se poate realiza. În caz că totuși se execută apar deformații foarte mari. Din acest motiv îmbinările tablelor subțiri ale modelelor se execută prin nituire, prin sudură electrică (cu rezistență de contact) sau prin lipire, folosindu-se după împrejurări, aliaje tari (pe bază de cupru,

cupru-zinc, argint) sau moi (pe bază de plumb și staniu). Croirea și tăierea tablelor și profilelor se execută prin mijloace obișnuite iar curbarea și îndoirea se execută la valțuri cu role sau la alte dispozitive simple.

Modelele din mase plastice se execută prin prelucrări mecanice la mașini de frezat, strunjit, găurit, după ce s-a efectuat trasarea și tăierea materialelor. La folosirea acestor mijloace de prelucrare trebuie avute în vedere două particularități ale maselor plastice (și în deosebi ale plexiglasului) și anume fragilitatea ridicată și conductibilitatea termică scăzută.

Pentru evitarea apariției fisurilor în timpul prelucrării datorită fragilității ridicate a materialelor plastice, este necesar a se folosi scule bine ascuțite, care să respecte întocmai unghiurile de tăiere. De asemenea, este necesar a se respecta regimul de tăiere stabilit pentru astfel de materiale. Vibrațiile în timpul prelucrării se evită prin fixarea corespunzătoare a modelului și a sculei.

Conductibilitatea termică scăzută a materialelor plastice duce la încălzirea mai rapidă a sculei, prin urmare la uzura mai intensă a acesteia. Căldura degajată în procesul de tăiere duce la înmuierea materialului, lipirea lui pe sculă și, deci, la mărirea frecării dintre material și suprafața sculei. În consecință apare o degajare și mai mare de căldură, care poate provoca chiar topirea materialului. Pentru răcire nu se folosește apă sau alte lichide ci se fac pauze sau se utilizează aer comprimat (care înlătură și șpanul format).

Prelucrarea formelor complicate ale modelelor se face cu pile și șmirghel. La fel și finisarea suprafețelor.

O atenție deosebită trebuie acordată calității suprafețelor, caracterizate prin existența micro și macro neregularităților, care pot apare în procesul de prelucrare.

Calitatea suprafețelor influențează distribuția de tensiuni și deformări, prin creșterea locală a tensiunilor cauzată de strivirea unor neregularități, precum și prin apariția unor deplasări suplimentare, elasto-plastice, a suprafețelor în contact. Deplasările totale (u_c) ale punctelor suprafețelor în contact se compun din deplasările generale ale corpului (u_{c1}) și din deplasările elasto-plastice (u_{c0}) datorită neregularităților. Satisfacerea cât mai corectă a condițiilor de similitudine impune o astfel de prelucrare a suprafețelor în contact, încât deplasările u_{c0} ale modelului și prototipului să se afle în același raport (10.29, a) în care se află deplasările u_{c1} , al căror factor de scară este dat de relația (10.77)

$$\frac{u_{con}}{u_{com}} = \frac{u_{c1n}}{u_{c1m}} = K_{u_c} = \frac{K_p K_L}{E_E} = K_{u_{c0}} = K_{u_{c1}} \quad (10.95)$$

Dacă se face notația

$$K_k = \frac{K_E}{K_L} \quad (10.96)$$

relația (10.95) se scrie sub forma

$$K_p = K_k K_{u_{c1}} \quad (10.97)$$

de urde rezultă că modelarea calității suprafețelor în contact trebuie realizată nu numai geometric (pe înălțimea neregularităților) ci și după rigiditatea stratului superficial, al cărui factor de scară este dat de relația (10.96). Rigiditatea k a stratului superficial se determină experimental, pentru diverse materiale (avind diferite grade de prelucrare a suprafeței) și diferite presiuni aplicate [19].

Pentru măsurarea deformațiilor în interiorul materialului, modelele se execută din plăci înleiate (între care se montează traductoare rezistive) sau prin turnarea în straturi a rășinilor epoxidice.

Modelele din materiale plastice ale structurilor alcătuite din plăci subțiri se confecționează prin îmbinarea detaliilor (prelucrate separat, conform proiectului) prin sudură. Uneori, înainte de sudură, părțile componente ale modelului se supun unui tratament termic de recoacere, la $110 - 115^{\circ}\text{C}$.

Lipirea detaliilor se face prin încălzire locală și adăugare de span (din același material), care se topește cu ajutorul letconului. Marginile îmbinate se prelucrează în prealabil corespunzător. O astfel de îmbinare este suficient de rigidă și asigură o rezistență locală de $300 - 400 \text{ daN/cm}^2$ (la încovoiere sau forfecare prin răsucire) suficientă pentru modelele utilizate în tensometrie.

Detaliile cu simplă sau dublă curbura se realizează la cald cu ajutorul matrițelor.

În cazurile în care modelul are zone închise, montarea detaliilor care închid aceste zone se face concomitent cu lipirea traductoarelor rezistive.

10.8. SOLICITAREA MODELELOR

Încărcările aplicate modelelor reproduc două tipuri de forțe care pot solicita prototipul și anume: forțe de suprafață, care se datoresc contactului elementului studiat cu altele învecinate și forțe volumice (gravitaționale sau inerțiale).

Forțele de suprafață se pot aplica modelului prin dispozitive mecanice (cu pîrghii, cu șurub, cu arcuri), sau prin sisteme pneumatice și hidraulice.

Dispozitivele de încărcare cu pîrghii, acționate prin greutate, folosesc pentru realizarea forțelor care nu depășesc $10 - 15 \text{ kN}$. Încărcări pe suprafețele exterioare sau presiuni în interiorul modelelor închise (rezervoare, cilindri) de $0,5 - 5 \text{ daN/cm}^2$ se obțin cu ajutorul sistemelor pneumatice. Presiuni interioare mai mari de 5 daN/cm^2 se realizează prin sisteme hidraulice. Încărcări pe suprafețe exterioare, care depășesc 5 daN/cm^2 se pot obține prin sisteme mecanice dar mai ales cu ajutorul cilindrilor hidraulici. Forțele volumice se pot realiza prin centrifugarea modelului.

Dispozitivele de încărcare trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- să reproducă fără denaturări, sarcinile aplicate prototipului;
- să poată realiza încărcarea continuă sau în trepte;

— în cazul încărcărilor complexe, să permită aplicarea, separată sau simultană, a forțelor care alcătuiesc încărcarea complexă; aplicarea unei încărcări nu trebuie să conducă la modificarea celorlalte;

— în timpul procesului de deformare a modelului mărimea și direcția forțelor aplicate nu trebuie să se modifice și nu trebuie să apară forțe suplimentare;

— fiecare din încărcări să poată fi măsurată;

— să fie simple din punct de vedere constructiv și al montajului și ușor de controlat în timpul încărcărilor.

Dispozitivele de încărcare sînt alcătuite, în general, din următoarele părți componente:

— elemente de aplicare a încărcării asupra modelului (dispozitive de prindere, suporturi, reazeme, dispozitive de presare, elemente de aplicare a sarcinilor continue);

— elemente de transmitere a forțelor, care asigură un anumit raport de amplificare și direcția dorită; ele se folosesc uneori și pentru măsurarea forțelor;

— elemente de forță (greutăți, resoarte, înșurubări, cilindri hidraulici sau pneumatici);

— scheletul de rezistență (cadru, carcasă, batiu, suport) pentru fixarea modelului și a părților componente ale dispozitivului de încărcare;

— elemente de măsurare a sarcinilor aplicate modelelor.

Forțele concentrate de întindere se aplică modelelor cu ajutorul unor plăcuțe prinse cu bolțuri metalice ca în figura 10.5.

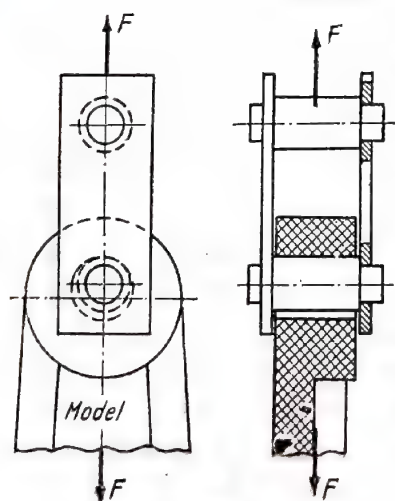


Fig. 10.5

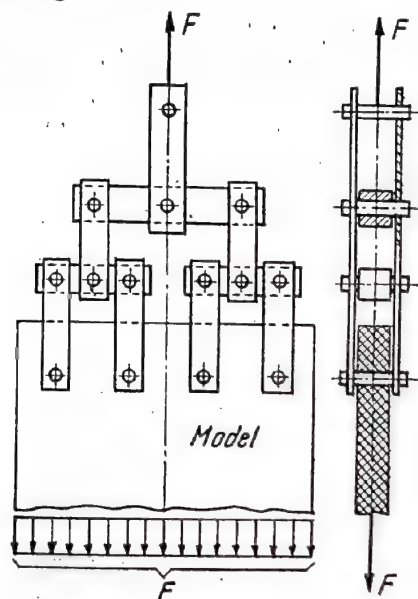


Fig. 10.6

Dacă se studiază starea de tensiuni din îmbinare, bolțul face parte din model, confectionîndu-se din materialul potrivit.

Întinderea uniformă pe o porțiune din conturul modelului se poate realiza ca în figura 10.6.

Forțele de compresiune concentrate se aplică prin intermediul rondelilor din cauciuc, plumb sau carton. La solicitarea de compresiune a modelelor plane sau a barelor, aplicarea perfect centrică a forțelor are o mare importanță, excentricitățile determinând apariția tensiunilor suplimentare de încovoiere, sau chiar pierderea stabilității modelului. Pentru a preîntîmpina apariția acestui din urmă fenomen se prevăd rezemări suplimentare pentru împiedicarea deplasărilor laterale, care să nu modifice însă condițiile la limită.

Aplicarea unei forțe concentrate ca în figura 10.7, a prin intermediul plăcilor egalizatoare bine ajustate 1, determină o distribuție a presiunii pe

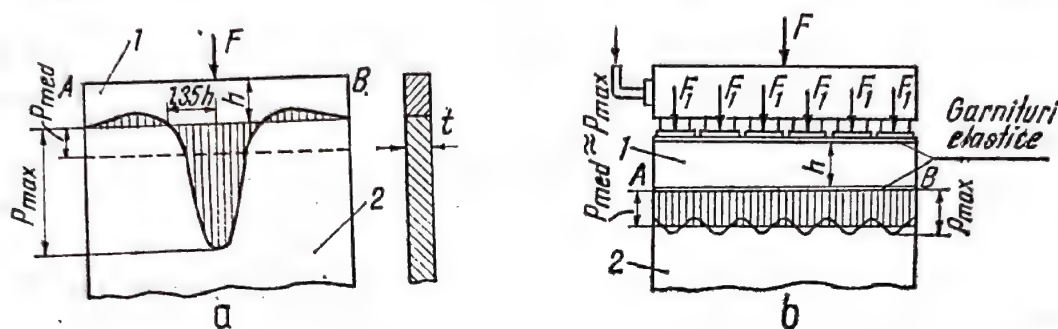


Fig. 10.7

modelul 2, apropiată de cea obținută cu formula de calcul a tensiunilor normale ce apar într-un semiplan elastic, la distanța h de margine, prin aplicarea unei forțe F .

Aplicînd plăcuței egalizatoare 1 (fig. 10.7, b) mai multe forțe F_1 , egale, presiunea exercitată asupra modelului 2 va avea o distribuție ca cea reprezentată în fig. 10.7, b. Procedeu descris mai sus asigură o transmitere uniformă a forței F modelului, dacă rigiditatea acestuia este mult mai mare față de cea a plăcuței de egalizare și dacă frecarea pe latura AB este neglijabilă.

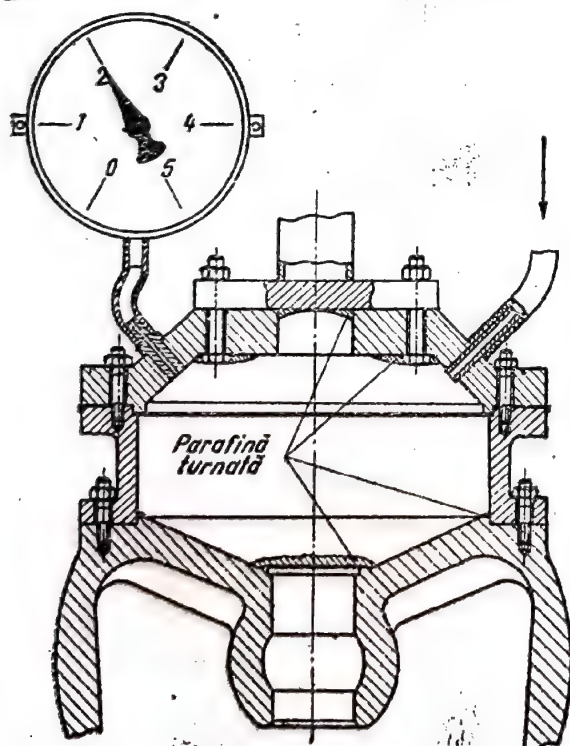


Fig. 10.8

Solicitarea modelelor închise (recipienti, cilindri) se face cu ajutorul aerului comprimat, care este trimis direct în model, după ce s-au etanșat îmbinările (dacă există) cu parafină topită sau cu garnituri de cauciuc sau carton (fig. 10.8).

Încărcarea după o lege oarecare se poate realiza în mod aproximativ cu ajutorul unui sistem de forțe paralele, ale căror mărimi variază conform legii date. Pentru proiectarea unui astfel de dispozitiv, se împarte epura

presiunilor care trebuie realizată (fig. 10.9) în 2^n arii, cărora li se determină centrele de greutate, în dreptul acestor puncte fiind aplicat primul rând de role, care acţionează asupra plăcuţelor ce vin în contact cu modelul şi care se extind corespunzător ariilor în care s-a făcut împărţirea. Pentru 2^{n-1}

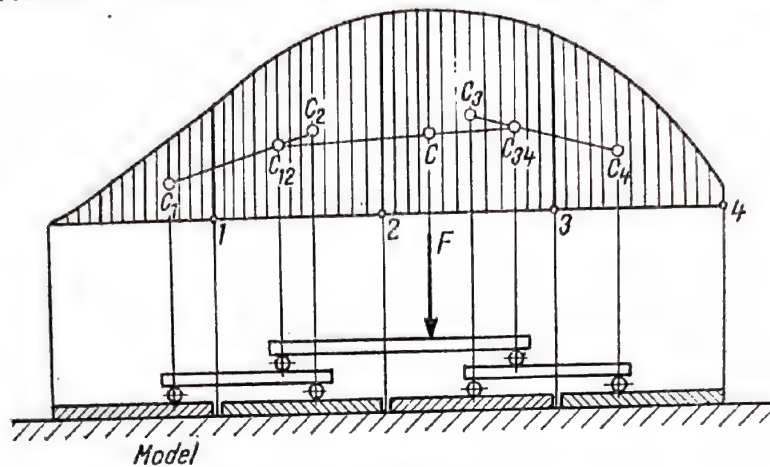


Fig. 10.9

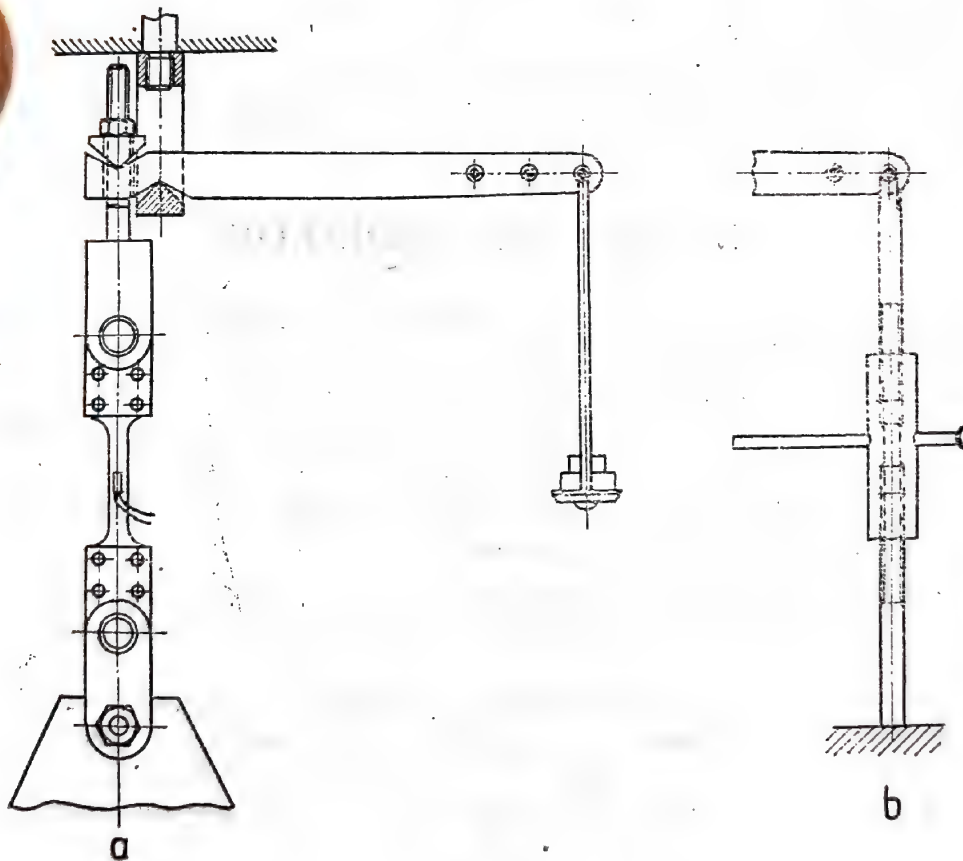


Fig. 10.10

grupe învecinate de câte două arii se află din nou centrele de greutate, în dreptul cărora se aplică al doilea rând de role ş.a.m.d.

Elementele cele mai răspândite de transmitere a forţelor sînt pîrghiile, care se folosesc atît pentru amplificarea cît şi pentru modificarea direcţiei de acţiune a forţelor. În figura 10.10 este reprezentat un dispozitiv de încă-

care cu pîrghii, folosind drept elemente de încărcare greutatea (fig. 10.10, a) sau un manșon filetat în două sensuri la cele două capete (fig. 10.10, b).

Măsurarea forțelor relativ mici (pînă la 50 kN) se face direct cu ajutorul dinamometrelor cu arc. La sistemele de încărcare prin greutate, dinamometrele servesc și la controlul transmiterii prin pîrghii a încărcării asupra modelului. Pentru forțe mai mari se folosesc captori cu elemente elastice (inele sau lamele) intercalate în sistemul de transmitere a forțelor. În acest caz forțele se măsoară indirect, fie prin măsurarea unor deplasări ale elementului elastic, fie prin citirea la o punte a deformațiilor unui traductor rezistiv, montat pe elementul elastic.

În cazul sistemelor de încărcare pneumatice sau hidraulice măsurarea forțelor se face prin măsurarea presiunii cu ajutorul manometrelor, care trebuie montate cît mai aproape de locul de transmitere a presiunii fluidului asupra modelului.

Scheletul de rezemare diferă de la model la model, dar, printr-o proiectare judicioasă și prin unele modificări se pot încerca mai multe modele diferite pe același stand. Pentru modele relativ mici (cca $1000 \times 1000 \text{ mm}^2$) există sisteme de încărcare la care se realizează mai multe tipuri de solicitare.

Încărcările de valori foarte mari se pot obține la prese sau mașini de încercat, la care se adaptează dispozitive speciale de transmitere a forțelor.

10.9. TESTAREA MODELELOR

Starea de tensiuni în diferite puncte ale modelului se determină prin măsurarea deformațiilor specifice pe direcția bazei tensometrelor (extensometrelor) aplicate în punctele respective. Cea mai răspîdită metodă de determinare a stării de deformații și de tensiuni a modelului este tensometria electrică rezistivă, prezentată în capitolul 3.

Baza traductoarelor rezistive folosite depinde de precizia cerută și de gradientul de variație a deformațiilor.

Numărul punctelor de măsurare trebuie să fie ales cît mai rațional, astfel încît să se poată stabili valorile tensiunilor maxime care apar în model.

Pentru evidențierea celor mai solicitate zone ale modelelor complexe se recomandă să se efectueze, în prealabil, un studiu experimental prin metoda lacurilor casante (Cap. 7), care permite stabilirea direcțiilor principale și aprecierea ordinului de mărime a tensiunilor maxime.

Numărul de traductoare necesar a fi montate într-un punct sau într-o secțiune, în diferite cazuri, modul de montare a acestora și metodologia de determinare a deformațiilor și tensiunilor principale sînt prezentate în capitolul 3.

Concomitent cu măsurarea deformațiilor, sau independent de aceasta, se determină deplasările diferitelor puncte ale modelului, cu ajutorul comparatoarelor, montate pe scheletul de rezemare.

Valorile deformațiilor, tensiunilor și deplasărilor determinate pe model se trec într-un tabel, după care se face trecerea la prototip, pe baza legii de modelare folosită la proiectarea modelului. Valorile, care sînt sensibile în afara legii de variație a tensiunilor într-o anumită zonă, se elimină.

Aplicații 1°. Grinda cu platbande late. Grinzile, avînd secțiunea formată dintr-o inimă de care sînt sudate două platbande late (fig. 10.11), se întîlnesc frecvent în construcții metalice, navale, etc.

Antrenarea platbandelor la încovoierea acestor grinzi se face prin intermediul tensiunilor tangențiale transmise acestora de inimă, care preia încărcarea transversală. Din această cauză tensiunile normale au o repartitie neuniformă pe lățimea platbandelor (fig. 10.13).

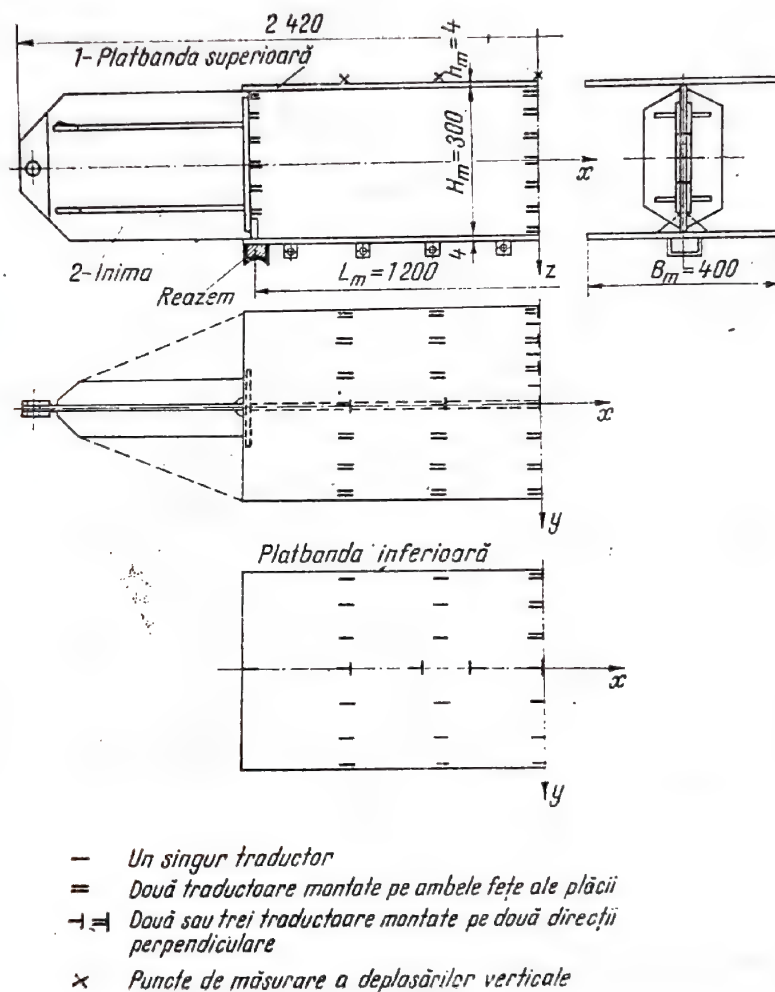


Fig. 10.11.

O problemă fundamentală care apare în studiul acestor grinzi este determinarea „lățimii active”, adică a acelei lățimi, care în ipoteza distribuției uniforme a tensiunilor, egale cu tensiunea maximă din inimă, preia aceeași forță ca și lățimea reală.

Întrucît recomandările privind alegerea lățimii active sînt incomplete și contradictorii [23], s-a impus verificarea, corectarea și completarea acestora. Cea mai eficientă metodă pentru rezolvarea acestui scop s-a dovedit a fi metoda elementelor finite, care permite luarea în considerare a influenței tuturor parametrilor, care determină comportarea grinzilor cu tălpi late. Folosind această metodă pentru analiza stării de tensiuni în platbandele grinzilor cu tălpi late, s-au comparat totodată unele rezultate cu cele obținute prin efectuarea măsurărilor tensometrice pe modele [18].

În figura 10.11 este prezentat unul din modelele utilizate, confecționat din plexiglas, având modulul de elasticitate $E_m = 33000 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$ și coeficientul lui Poisson $\mu_m = 0,35$.

Dimensiunile principale ale modelului sînt: $L_m = 1200 \text{ mm}$; $B_m = 400 \text{ mm}$; $H_m = 300 \text{ mm}$; $L_{1m} = 2420 \text{ mm}$. Pentru a preveni pierderea stabilității plăcilor s-au montat la capete diafragme și plăcuțe de rigidizare, care nu modifică starea de tensiuni. Grosimea plăcilor din care a fost confecționat modelul a fost $t_m = 4 \text{ mm}$.

Montajul elementelor componente ale modelului s-a făcut prin cordoane de sudură realizate prin turnarea unor adezivi formați din două componente.

Testarea modelului s-a efectuat pe standul reprezentat în figura 10.12.

Săgețile au fost măsurate cu ajutorul comparatoarelor 4, montate pe bara 7, pentru a elimina influența tasării reazemelor.

Pe model s-au montat în total 104 traductoare rezistive cu baza de 5 mm , ceea ce a permis obținerea unui număr suficient de mare de valori ale tensiunilor în platbandă și în inimă. Pentru a elimina influența eventualelor deformații inițiale, în unele secțiuni s-au montat traductoare pe ambele fețe ale plăcii (fig. 10.12).

Încărcarea modelului s-a realizat prin dispozitivele 2 de solicitare cu șurub-piuliță. O încărcare apropiată de cea uniformă s-a realizat pe zona centrală a modelului cu ajutorul sistemului 1, format din bare articulate. Forțele s-au măsurat cu dinamometrele 3.

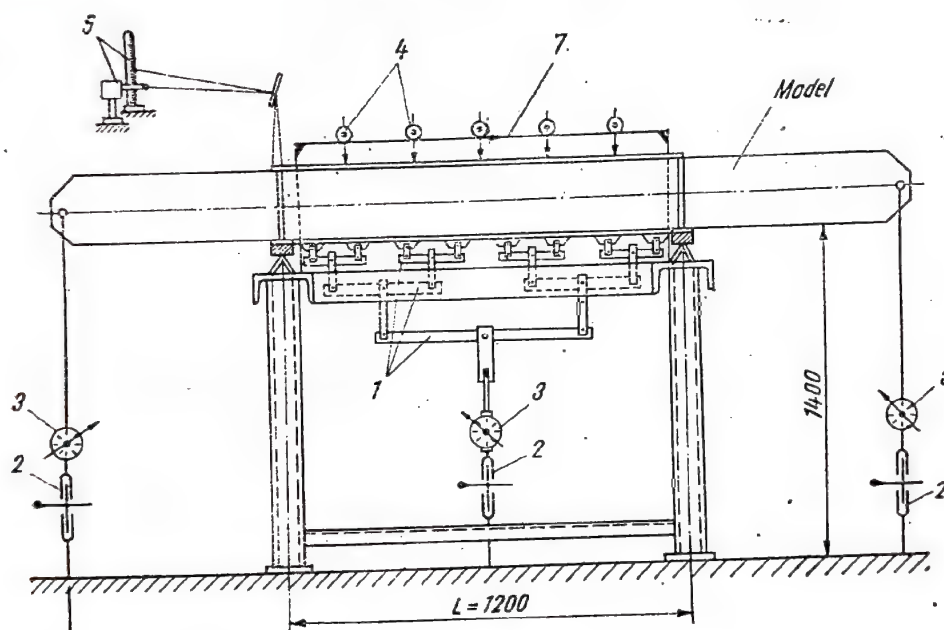


Fig. 10.12.

Măsurările s-au efectuat în condițiile simplei rezemări la capete a grinzii (experiment I) și apoi în condițiile în care inima grinzii este încastrată total în secțiunile de rezemare (experiment II). În ambele experimente marginile transversale și longitudinale ale platbandelor au rămas neîncărcate. Realizarea încastrării totale în cazul experimentului II a fost posibilă prin încărcarea consolelor grinzii cu forțele F_1 , astfel încît unghiurile de rotire ale secțiunilor de rezemare, măsurate cu ajutorul dispozitivului de amplificare optică 5, să fie nule.

Calculul prin metoda elementelor finite a fost efectuat pentru grinzi cu tălpi late, confecționate din oțel avînd $\mu_n = 0,3$ și $E_n = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$. Dimensiunile acestor grinzi au fost:

$L_n = 12 \text{ m}$; $B_n = 4 \text{ m}$; $H_n = 3,0 \text{ m}$; $h_n = 12 \text{ m}$.

Întrucît modelul este alcătuit din domenii simplu conexe, distribuția de tensiuni, care interesează în mod deosebit, nu este influențată de constantele elastice. Modelul fiind distorsionat ($K_\mu \neq 1$) și neputîndu-se stabili coeficienții de corecție, așa cum s-a arătat la § 10.5.1, c, ar fi fost necesar să se facă testări pe două modele confecționate din materiale diferite ($\mu_{1m} \neq \mu_{2m}$).

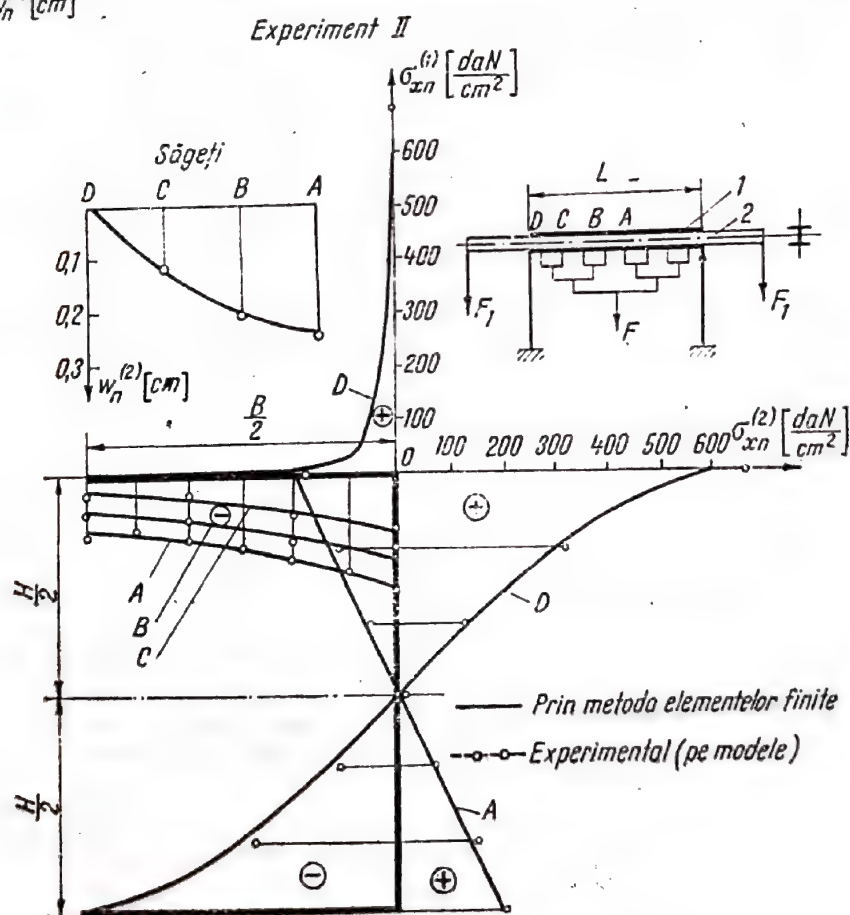
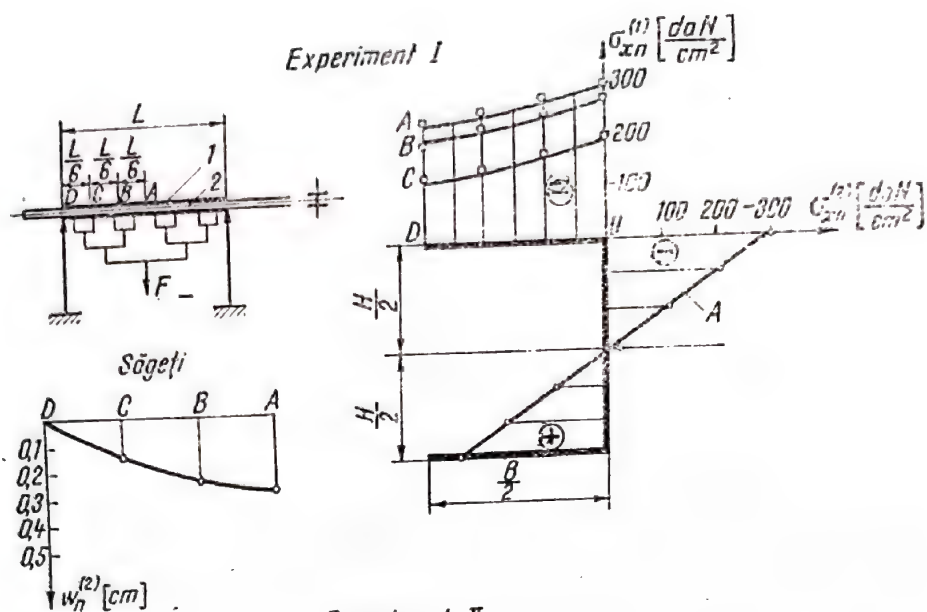


Fig. 10.13.

Însă diferența dintre $\mu_m = 0,35$ și $\mu_m = 0,3$ fiind mică, influența coeficientului lui Poisson se neglijează (în cazul unei diferențe între coeficienții lui Poisson de 0,15 eroarea maximă care ar fi apărut, în cazul unui model multiplu conex, ar fi fost de 7,5 % [12]). În aceste condiții, factorii de scară pentru tensiuni și deplasări sînt dați de relațiile (10.81). Întrucît

$$K_L = \frac{L_n}{L_m} = \frac{B_n}{B_m} = \frac{H_n}{H_m} = 10; \quad K_h = \frac{h_n}{h_m} = 3; \quad K_E = \frac{E_n}{E_m} = 63,8,$$

și luînd

$$K_F = \frac{F_n}{F_m} = \frac{F_{1n}}{F_{1m}} = 200,$$

rezultă

$$K_\sigma = \frac{K_F}{K_L K_h} = 6,67; \quad K_u = \frac{K_F}{K_E K_h} = 1,02.$$

Rezultatele măsurărilor sînt reprezentate în figura 10.13. Din compararea acestor rezultate cu cele obținute prin metoda elementelor finite rezultă că aceasta din urmă dă pentru deplasări valori care concordă foarte bine cu cele obținute experimental. În ce privește tensiunile, exceptînd zonele cu concentratori, rezultatele obținute prin metoda elementelor finite nu diferă cu mai mult de 8 % de cele obținute experimental. Creșterea sensibilă a tensiunilor în zonele de discontinuitate a secțiunii grinzii impune reducerea continuă a lățimii platbandei, așa cum este reprezentat cu linii întrerupte în figura 10.11.

2) *Studiul pe model al unor elemente din structura unei platforme plutitoare autoridicătoare* [7].

Studiul experimental, prezentat în cele ce urmează s-a efectuat pe modelul unor elemente din structura unei platforme plutitoare autoridicătoare proiectată pentru lucrările de amenajare a albiei Dunării.

Platforma este alcătuită din pontoane K.S.3 care formează un cadru dreptunghiular pe care sînt amplasate utilajele și instalațiile de forță. În lungul platformei se deplasează un pod rulant pe care este amplasată instalația de foraj. Platforma plutitoare este remorcată pînă la locul de forare, unde stîlpii sînt coboriți și apoi, cu ajutorul unor cricuri hidraulice (fig. 10.14), platforma se ridică la cota de lucru.

Construcția se prezintă ca un sistem spațial static nedeterminat (platforma sprijinindu-se pe patru stîlpi, iar prinderea de fiecare stîlp făcîndu-se prin tije). Între stîlpi și grinzi a fost prevăzut un joc de 20 mm. Pînă la consumarea acestui joc platforma poate avea mici deplasări în planul orizontal. Deoarece grinzile platformei au o rigiditate mare la încovoiere și răsucire în raport cu rigiditatea stîlpilor și tijelor ($I_{gr} = 13599100 \text{ cm}^4$ și $I_{st} = 197000 \text{ cm}^4$), repartizarea eforturilor în tije va depinde, în cea mai mare parte, de deformațiile stîlpilor și tijelor, care sînt determinate de modul de rezemare al stîlpilor și de modul în care se face contactul între grindă și stîlp. Avînd în vedere acest lucru, modelarea platformei s-a făcut reducînd sistemul spațial la un sistem plan, construindu-se numai o grindă principală rezemată pe cei doi stîlpi. Calculele preliminare, care au verificat raționamentul privind solicitarea de încovoiere, au fost considerate concludente și pentru torsiune.

Așa cum s-a arătat, platforma constituie un sistem static nedeterminat. Metoda eforturilor aplicată unui sistem static nedeterminat conduce la următorul sistem de ecuații

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = 0; \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10.98)$$

unde

$$\delta_{i1} = \int \frac{m_i m_j}{EI} ds + \int \frac{n_i n_j}{EA} ds; \quad \delta_{i0} = \int \frac{m_i M_0}{EI} ds + \int \frac{n_i N_0}{EA} ds. \quad (10.99)$$

Se notează cu K_X și K_A factorii de scară pentru eforturile static nedeterminate (X) și pentru arii (A)

$$\frac{X_{jn}}{X_{jm}} = \frac{X_n}{X_m} = K_X; \quad \frac{A_n}{A_m} = K_A.$$

Modelul fiind din oțel, ca și prototipul rezultă $K_E = 1$.

Aducînd sistemul (10.98) la formă adimensională, după înlocuirea coeficienților δ_{ij} , δ_{i0} cu expresiile (10.99), se obțin următoarele relații între factorii de scară

$$K_X = K_F \text{ și } K_A = \frac{K_I}{K_L^2} \quad (10.100)$$

unde

$$K_F = \frac{F_n}{F_m}; \quad K_L = \frac{L_n}{L_m}; \quad K_I = \frac{I_n}{I_m}.$$

Alegînd: $K_I = 202000$; $K_L = 23,8$; $K_F = 705$, rezultă din (10.100):

$$K_X = 705; \quad K_A = 356.$$

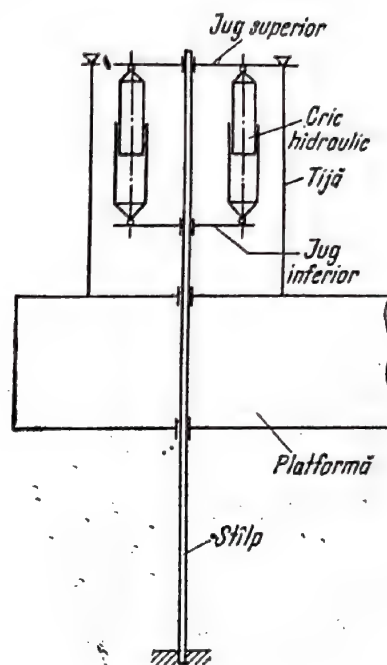


Fig. 10.14.

Realizarea modelului. Modelul grinzii principale și al stîlpilor (fig. 10.15) a fost executat la o scară relativ mică ($1 : 23,8$) de aceea efectele locale nu au putut fi modelate (prinderile dintre chesoane, dintre stîlpi și jugul superior etc.). Grinda principală 1 (fig. 10.15) a fost realizată din zece cutii de formă paralelipipedică ($72 \times 148 \times 298$) mm, confecționate din tablă de oțel cu grosimea de 5 mm. Asamblarea cutiilor s-a făcut prin lipire cu cositor. Pentru a asigura o rigiditate suficientă grinzii în zonele de îmbinare a cutiilor s-au folosit două manșoane de legătură 3 (fig. 10.15). Stîlpii 2 (fig. 10.15) au fost confecționați din tablă de oțel cu grosimea de 0,5 mm, cu secțiunea dreptunghiulară ($52 \times 47,5$) mm. Manșoanele puț (4) au fost confecționate din tablă de oțel cu grosimea de 1,5 mm. Găurile din aceste manșoane au fost făcute astfel ca stîlpii să intre forțat.

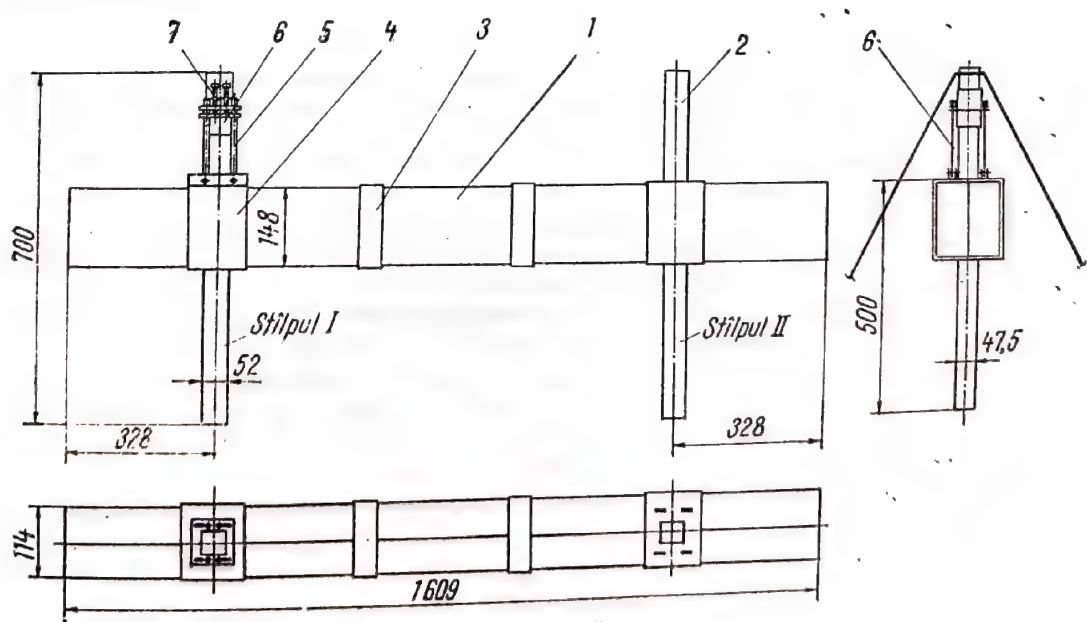


Fig. 10.15.

La ultimele determinări aceste găuri au fost lărgite, realizându-se un joc de 4 mm. Tijele de susținere 5, (fig. 10.15) au fost executate în așa fel încât sistemul de prindere la capete să fie similar celui din realitate. Colierele 6 (fig. 10.15 și fig. 10.16), care modelează jugul superior au fost confecționate din tablă de oțel cu grosimea de 1,5 mm. Plăcuțele (7) cu șuruburi de reglare au

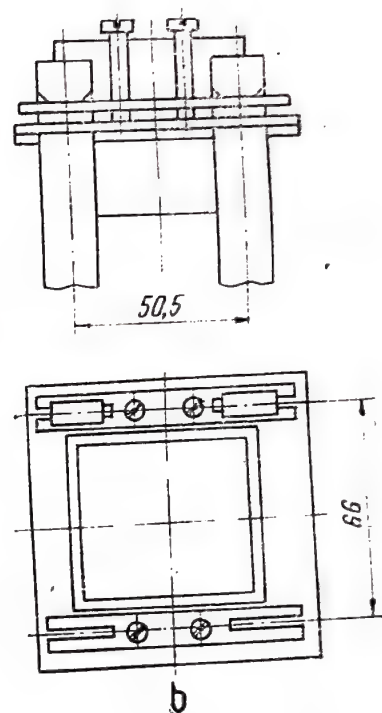
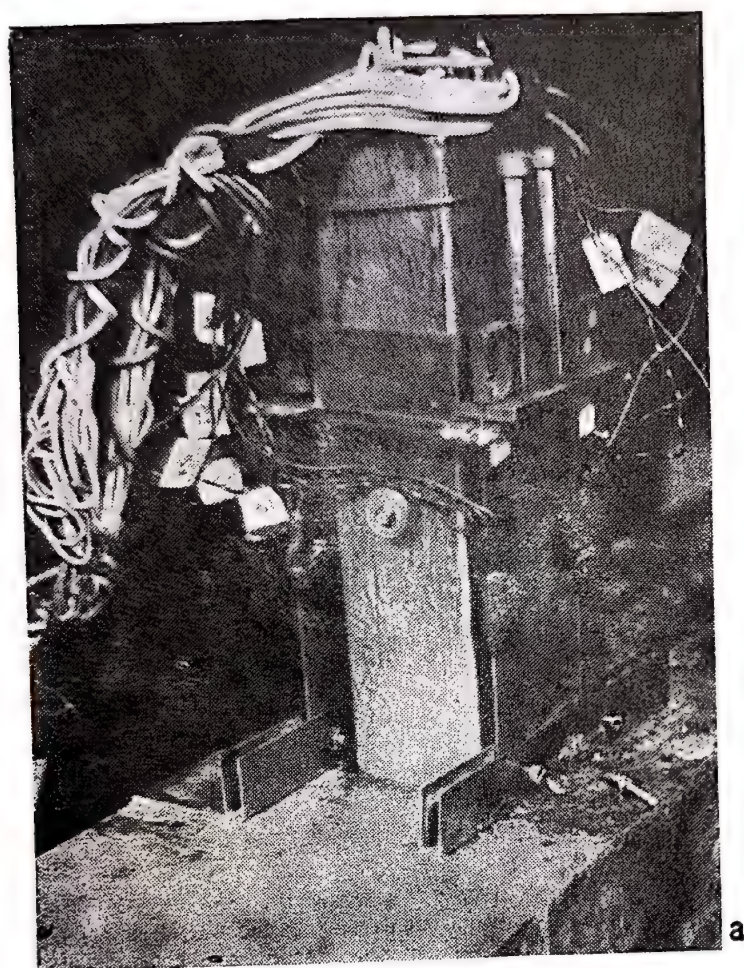


Fig. 10.16.

fost montate între bordura colierului și umerii de sprijin ai tijelor de susținere (fig. 10.16). Prin ridicarea sau coborîrea lor, cu ajutorul șuruburilor, s-au putut asigura condiții de rezemare asemănătoare la cele patru tije ale unui stîlp.

Încărcarea modelului s-a realizat cu greutatea suspendate pentru sarcinile concentrate și cu cărămizi pentru sarcinile distribuite (fig. 10.17).

Măsurarea eforturilor din bare. Pentru determinarea eforturilor axiale din tije s-a folosit tensometria electrică rezistivă. Pentru eliminarea efortului dat de solicitarea secundară de încovoiere din tije, pentru mărirea preciziei de măsurare, precum și pentru compensarea efectului temperaturii, pe fiecare tijă s-au aplicat câte patru traductoare tensometrice rezistive. Poziția acestor traductoare pe tijă și legarea lor în brațele punții este arătată în figura 10.18.

Traductoarele longitudinale folosite au fost de fabricație Hottinger de tipul 10/120 FB 1 — A 12 cu $R = 120$, $8 \pm 0,25 \% \Omega$, $k = 2,1 \pm 0,5 \%$ și lungimea activă $l = 10$ mm. Traductoarele trans versale au fost de aceeași fabricație însă de tipul 3/120 LP.11 cu $R = 120,4 \pm 0,25 \% \Omega$, $k = 2,03 \pm 0,5 \%$ și lungimea activă $l = 3$ mm.

Plasnd traductoarele în punte așa cum se arată în fig. 10.18 lungirea specifică ϵ_m citită la punte (vezi capitolul 3), va fi

$$\epsilon_m = \frac{\Delta R}{k R} = 2 \epsilon_N \left(\frac{k_1}{k} + \mu \frac{k_2}{k} \right), \quad (7)$$

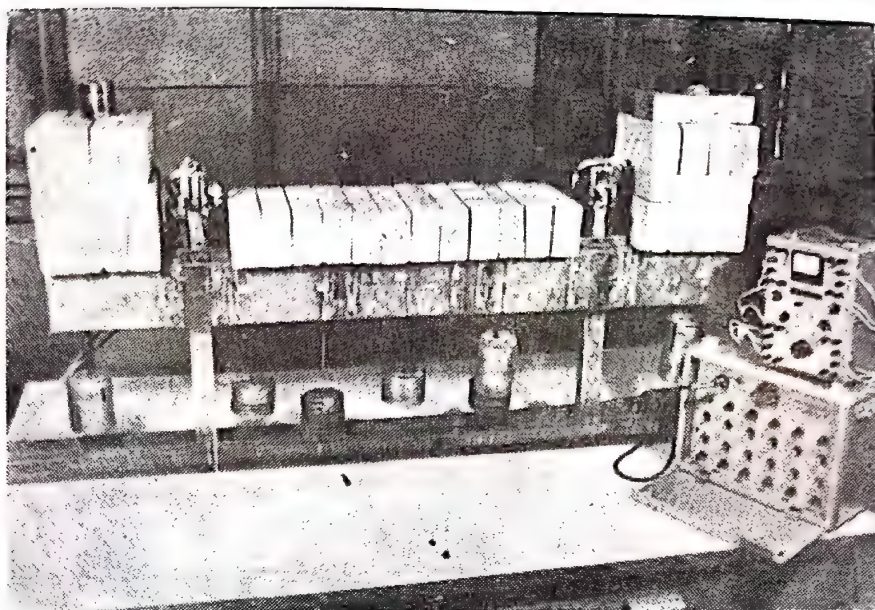


Fig. 10.17.

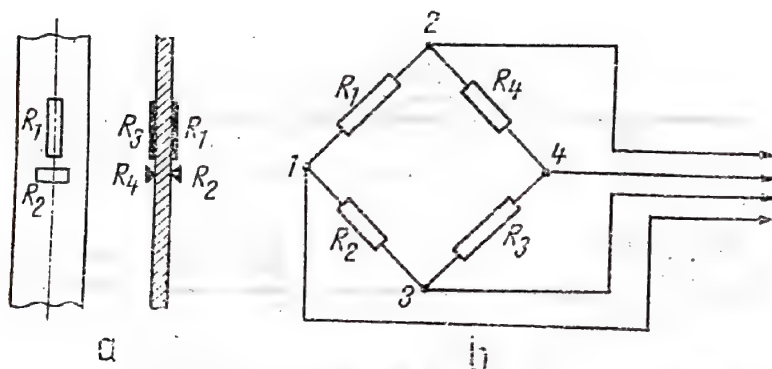


Fig. 10.18.

unde : ϵ_N este lungirea specifică produsă de solicitarea axială, $k_1 = 2,1$; $k_2 = 2,03$; μ — coeficientul lui Poisson ; $k = 2,0$ este valoarea constantei fixată la puntea tensometrică. Înlocuind valorile constantelor în ecuația (7) a rezultat

$$\epsilon_m = 2,709 \epsilon_N. \quad (8)$$

Prin urmare, cu montajul folosit s-a mărit sensibilitatea determinărilor de 2,709 ori. Avându-se în vedere că pot să apară diferențe datorită unor abateri față de dimensiunile normale ale barelor și față de valorile considerate, care intervin în calcul (E , μ , k_1 și k_2) s-a procedat la etalonarea fiecărei tije pentru stabilirea raportului dintre valoarea deformației citite și a încărcării.

Rezultatele determinărilor. Eforturile din tijele de ridicare au fost măsurate, pentru diferite moduri de rezemare a stîlpilor (fig. 10.19). Pentru a urmări influența modului de încărcare a

grinzii asupra eforturilor din tije, încărcarea modelului s-a făcut în diferite moduri așa cum se arată în figura 10.20. Rezultatele determinărilor făcute pentru diferite moduri de încărcare și rezemare sînt prezentate în tabelele 10.2 și 10.3.

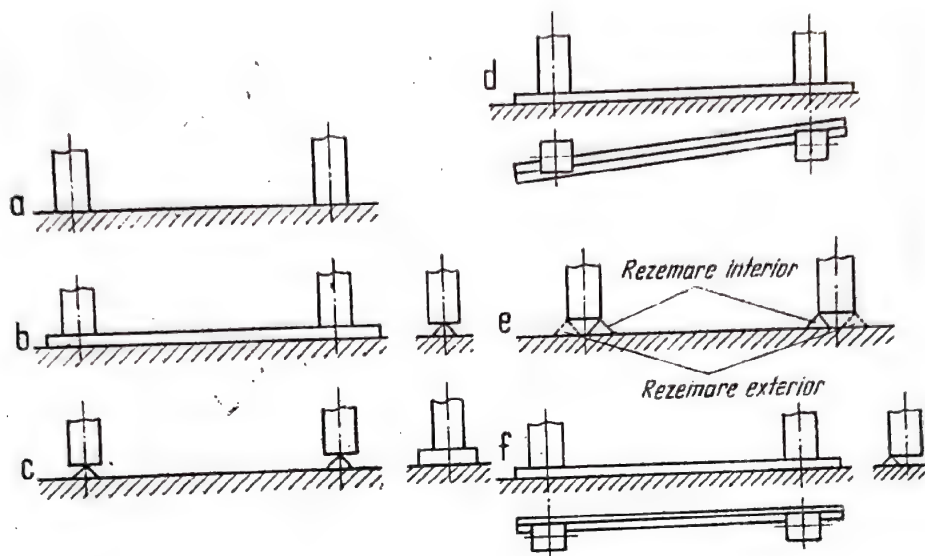


Fig. 10.19.

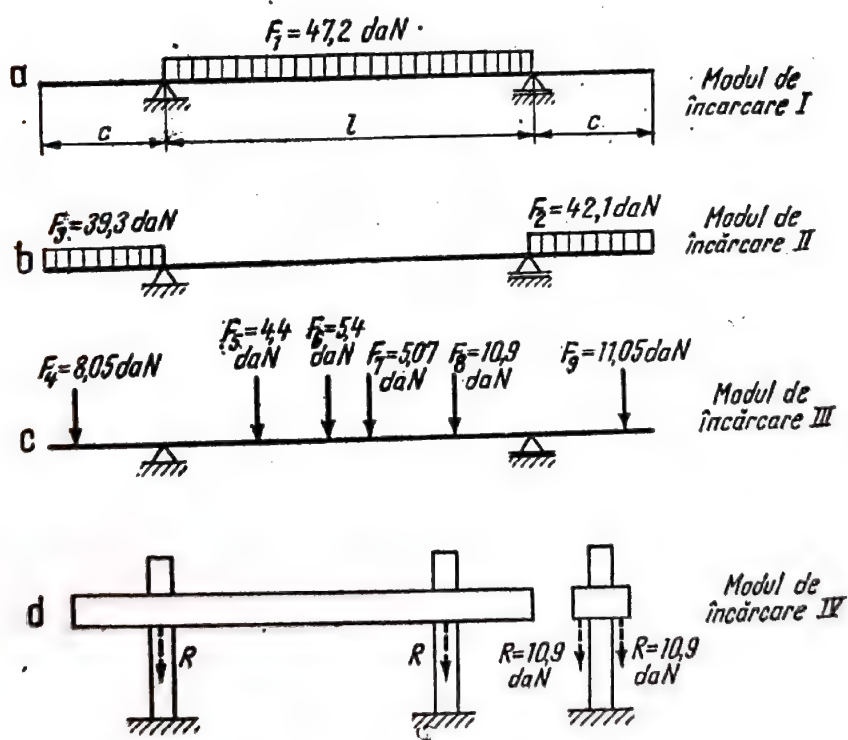


Fig. 10.20.

Din examinarea datelor prezentate în tabelele 10.2 și 10.3 a rezultat că repartizarea eforturilor în tije este influențată în limite largi de modul de rezemare a stîlpilor, de variația în așezarea sarcinilor și de forțele de frecare dintre stîlpi și grindă.

Tabelul 10.2

Rezultatele determinărilor pentru încărcarea I + II + III (Fig. 10.20) și diferite moduri de rezemare a stîlpilor $F_m^{tot} = 174,27 \text{ daN}$; $F_n^{tot} = 1220,1 \text{ kN}$

Modul de rezemare	Efortul	Tija Nr.							
		1	2	3	4	5	6	7	8
I Fig.(10.19. a)	$F_m[\text{daN}]$	32,40	19,10	22,60	7,0	17,50	14,70	33,50	30,00
	$F_n[\text{kN}]$	228,4	134,6	159,3	49,3	123,3	103,6	236,1	211,5
II Fig.(10.19. b)	$F_m[\text{daN}]$	27,70	19,30	16,20	20,70	16,40	18,00	22,40	22,80
	$F_n[\text{kN}]$	195,3	136,0	114,2	145,9	115,6	126,9	157,9	160,7
III Fig.(10.19. c)	$F_m[\text{daN}]$	—	—	—	—	24,30	21,30	20,00	15,60
	$F_n[\text{kN}]$	—	—	—	—	171,3	130,1	141,0	109,9
IV Fig.(10.19. d)	$F_m[\text{daN}]$	36,50	14,00	7,75	29,10	8,60	22,70	31,50	16,90
	$F_n[\text{kN}]$	257,3	98,7	54,6	205,0	60,5	160,0	222,0	119,0
V Fig.(10.19. e) interior	$F_m[\text{daN}]$	27,20	22,60	19,40	17,20	27,80	19,80	13,70	22,60
	$F_n[\text{kN}]$	191,0	159,0	137,0	121,0	196,0	139,5	96,5	159,0
V Fig.(10.19. e) exterior	$F_m[\text{daN}]$	—	—	—	—	24,60	16,10	21,40	20,90
	$F_n[\text{kN}]$	—	—	—	—	173,0	113,5	151,0	147,5
VI Fig.(10.19. f)	$F_m[\text{daN}]$	28,8	24,4	20,2	18,10	18,90	20,50	22,70	22,60
	$F_n[\text{kN}]$	203,0	172,0	143,0	128,0	132,0	144,5	160,0	159,0

Tabelul 10.3

Rezultatele determinărilor pentru încărcarea I + II + III + IV (Fig. 10.20) și diferite moduri de rezemare a stîlpilor

$$F_m^{tot} = 196,07 \text{ daN}; \quad F_n^{tot} = 1379,1 \text{ kN}$$

Modul de rezemare	Efortul	Tija Nr							
		1	2	3	4	5	6	7	8
II Fig.(10.19. b)	$F_m[\text{daN}]$	31,10	20,90	18,30	25,30	24,80	15,50	17,70	31,70
	$F_n[\text{kN}]$	218,0	147,0	128,5	177,5	174,0	109,0	124,5	223,0
IV Fig.(10.19. d)	$F_m[\text{daN}]$	40,1	16,10	7,75	30,90	13,0	25,20	33,20	19,30
	$F_n[\text{kN}]$	282,0	116,5	54,4	217,0	91,4	177,0	233,0	137,0
V Fig.(10.19. e)	$F_m[\text{daN}]$	28,80	31,30	30,60	13,20	28,30	25,80	19,6	22,30
	$F_n[\text{kN}]$	202,0	219,0	215,0	92,5	198,0	181,0	138,0	156,0
VI Fig.(10.19. f)	$F_m[\text{daN}]$	28,40	31,20	25,0	17,30	16,10	25,60	30,30	19,90
	$F_n[\text{kN}]$	199,0	219,0	176,0	121,0	113,0	180,0	213,0	140,0

BIBLIOGRAFIE

1. ALEXANDROV, A. I., AHMETZJANOV M. N., *Poliartizacionno-Optičeskie metody mehaniki deformiruemogo tela*, Nauka, Moskva, 1973.
2. ARHANGORODSKIJ A. G., BELEN'KIJ, L. M., *Modelirovanie procinosti sudovuh konstrukciij*, Leningrad, 1969.
3. BĂLAN, ST., RĂUTU, S., PETCU, V., *Cromoplasticitatea*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1963.
4. BEAUJOINT, N., NIZERI, A., REMENIERAS, G., *Étude sur modèle réduit des contraintes dans les barrages*, Ann. Ponts et. Chaussées, Nr. 123, 1953.
5. BESCHEA, N., *Rezistența materialelor — capitole speciale*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.
6. BOLEANȚU, L., FISCHER, M., BABEU, T., *Quelques particularités des essais de résistance sur les modèles des éléments avec dimensions réduites*, RILEM, Methodology and Technique of Testing Structures, International Symposium, Bucharest, sept. 1969, IV supplement.
7. BUGA, M., BURLACU, C., ILIESCU, N., RUSIU, GH., RUSU, O., TIPERCIUC, GH., TUDOSE, I., *Studiul pe model al unui element din structura platformei plutitoare autoridicătoare K.S.3.*, Comunicare la sesiunea științifică a Institutului Politehnic București, 29 — 30 mai, 1969.
8. BRAITHWAITE, J. C., WILLIAMS, R., *The use of scale models in predicting the behaviour of complex structures*, Trans. E. N. Coast. Inst. Engrs. and Shipbuilder, 1963, 79, No. 4.
9. CHAPMAN, J. C., TAYLOR, P. F., *Investigation on a Structural Model of the s.s. „Ocean Vulcan”*, The Royal Institut of Naval Architects, July, 1970 vol. 112, No. 3.
10. DURELLI, A. J., PHILLIPS, E. A., TSAO, C. H., *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*, Mc Graw-Hill Book co. inc., 1958.
11. FINK, K., ROHRBACH, CH., *Handbuch des Spannung — und Dehnungsmessung*, VDI — Verlag Düsseldorf, 1958.
12. FROCHT, M. M., *Photoelasticity*, vol. I, II, New-York, John Willey & Sons, 1948, 1949.
13. HETENYI, M., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, New-York, Ed. John Wiley, 1950.
14. HORUN, S., *Aplicațiile materialelor plastice*, Ed. tehnică, București, 1975.
15. IOSIPESCU, N., *Introducere în fotoelasticitate*, vol. I, Editura tehnică, București, 1958.
16. MOCANU, D.R., BUGA și GEORGESCU, C., *Determinarea experimentală a eforturilor unitare*, Editura Transporturilor și Telecomunicațiilor, 1966.
17. MODIGA, M., *Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticității prin metoda elementului finit*, Lucrări științifice, vol. 5, 1972, Institutul Politehnic Galați.
18. MODIGA, M., *Verificarea experimentală a stării de eforturi în grinzile cu tălpi late*, Comunicare la a XVI-a sesiune științifică a Institutului Politehnic Galați, mai, 1972.
19. MOROZOV, B. A., *Modelirovanie i procinosti metallurgičeskijh mašin*, Mašgiz, Moskva, 1963.
20. MÜLLER, R., *Gummiomodellversuche zur Bestimmung der Spannungsverteilung in geschweissten Laschenverbindungen*, Schweißtechnik, Nr. 11, 1963.
21. NĂDĂȘAN, ST., *Încercări și analize de metale*, Ed. tehnică, București, 1965.
22. PERLIN, A.A., ŠALKIN, M.K., HRJAŠČEV, I. K., *Issledovanie procinosti sudovuh konstrukciij na tenzometricheskijh modeljah*, Leningrad, Sudostroenie, 1967.
23. POSTNOV, V. A., MODIGA, M., *Vibor prisoeдинennogo pojaska širokopoluh balok*, Sudostroenie, 1971, No. 10.
24. PRIGOROVSKIJ, N. I., PREJSS, A.K., *Issledovanie napriajenishi jestkosti detalet mašin na tensometricheskijh modeljah*, Moskva, 1958.
25. *Procinosti, ustotčivosti, kolebania — Spravocinik*, vol. I, II, III, Izd. Masinostroenie, Moskva 1968.
26. PROŠKO, V. M., *Issledovanie napriajeniah na obiemnh modelah, sb. Poliarizačionno — optičeskij metod issledovaniah napriajeniah*, Izd. A. N. SSSR, 1956.
27. RILEY, W. F., DURELLI, A. J., *Stress Distribution on the Boundary of an Elliptical Hole in a Large Plate during Passage of a Stress Pulse of Long Duration*, Intern. J. Mech. Sci., Oxford — London — New York — Paris, 2, 4, 1961.
28. ROHRBACH, CH., CZAICA, N., *Deutung des Mechanismus der Dehnungsmessstreifens und seiner wichtigsten Eigenschaften and Hand eines Modells*, Material — prüfung, 1, 4, 1959.
29. SEDOV, L. I., *Metodt podobiia i razmernosti v mehanike*, Moskva, Izd. Nauka, 1965.

30. ȘERBĂNESCU, G., SANDI, H., ZORAPAPEL T., *Dynamic Model Tests of a Large — Panel Structure*, RILEM, *Methodology and Technique of Testing Structures*, International Symposium, Bucharest, sept. 1969, IV supplement.
31. STAICU, C.I., *Analiza dimensională generală*, Ed. tehnică, București, 1976.
32. TEODORESCU, P.P., *Probleme spațiale în teoria elasticității*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1970.
33. VASILESCU, AL. A., *Analiza dimensională și teoria similitudinii*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1969.
34. VASILESCU, AL. A., PRAISLER, G., *Similitudinea sistemelor elastice*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1974.
35. VÎLCOVICI, V., BĂLAN, ST., VOINEA, R., *Mecanica teoretică*, Ed. tehnică, București, 1966.
36. WEBER, M., *Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und Modellwissenschaft*, Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft 1930, B. XXXII.
37. WECK, G., *Laboratory Testing of Large Structures*, RILEM, *Methodology and Technique of Testing Structures*, International Symposium, Bucharest, sept. 1969, IV supplement.
38. WILKENS, R. I., *Struct M. I., Modell Analysis of Structures*, Civil Engineering, 1950, vol. 45, No. 528.
39. WOCKE, W., *Die direkte Modellmethode zur Lösung von Spannungs — und Strömungsproblem*, Maschinenbautechnik, 1958, No. 10 und 1959, No. 7.
40. WOCKE, W., ULLMAN, K., *Experimentelle Dehnungsanalyse*, VEB, Fachbuchverlag, Leipzig, 1974.
41. * * * *Manualul inginerului mecanic*, vol. I. Editura tehnică, 1974.

ETALONAREA TENSOMETRELOR

Ing. N. FÎNTINARU

11.1. ETALONAREA TENSOMETRELOR AMOVIBILE

11.1.1. GENERALITĂȚI

Metoda etalon de reproducere a deformațiilor pieselor sub acțiunea solicitărilor, consacrată în tehnica actuală, constă în simularea deformațiilor prin translația relativă a unei piese — cursor — încorporată într-un aparat care permite măsurarea translației cu o precizie corespunzătoare. Aparatele pentru reproducerea deformațiilor sînt cunoscute sub denumirea generică de *calibratoare tensometrice* întrucît se utilizează curent la stabilirea și verificarea caracteristicii de convertire a indicațiilor tensometrelor — operația de calibrare —. Pentru operațiile de etalonare metrologică se folosesc calibratoare speciale la care translația cursorului se măsoară atît discret, cu cale plan-paralele, cît și continuu cu aparate de înaltă precizie.

Operațiile metrologice — calibrare, etalonare și verificare — constau, în principiu, din măsurarea simultană a deplasării cursorului atît cu tensometrul montat în calibrator, cît și cu aparatul de măsurat de înaltă precizie al calibratorului. Prin compararea indicațiilor tensometrului și ale calibratorului se stabilesc caracteristicile metrologice definitorii pentru competitivitatea aparatului [25].

11.1.2. CALIBRATOARE PENTRU TENSOMETRE AMOVIBILE

Calibratoarele sînt aparate destinate etalonării statice a tensometrelor amovibile. Construcțiile de calibratoare cuprind în principiu un cadru rigid cu șine sau coloane de ghidare a cursorului, un dispozitiv mecanic cu ac filetat de translatare fină a cursorului și un aparat de măsurare a deplasării cursorului.

O largă răspîndire au cunoscut-o calibratoarele cu comparatoare cu cadran cu valoarea diviziunii 1/100 mm sau 1/1000 mm, măsurîndu-se direct sau amplificat deplasarea cursorului. Utilizarea comparatoarelor mecanice limitează însă performanțele calibratorului, prin restrîngerea domeniului de măsurare și a preciziei. Astfel, în cazul comparatoarelor

1/100 mm, domeniul de măsurare se plafonează la 10 mm, cu o precizie de $(5 \dots 10) \mu\text{m}$, pentru ca să se reducă la 2 mm odată cu ridicarea preciziei la $1 \mu\text{m}$ prin folosirea comparatoarelor 1/1000 mm sau prin aplicarea unor elemente de amplificare a deplasării cursorului. Extinderea domeniului peste 10 mm se asigură prin introducerea dispozitivelor cu șurub micrometric, dar cu o precizie de cel mult $10 \mu\text{m}$ [28].

În fig. 11.1 este reprezentat un calibrator cu comparator cu cadran și amplificare mecanică [2]. Reperul fix 2 este prins în cadrul 1, iar reperul mobil 3 este antrenat de șurubul de reglare 5 prin intermediul unei pene 4. Pentru mărirea sensibilității calibratorului, pana 4 este construită cu panta 1 : 10. Cursa penei este măsurată cu comparatorul cu cadran 6. Ca un dezavantaj al acestui calibrator se menționează valoarea redusă a domeniului de măsurare. La un comparator de 1/100 mm cu un domeniu de măsurare de 5 mm se pot controla deplasări ale cuțitului tensometrului de 0,5 mm cu o precizie de $1 \mu\text{m}$. Pentru eliminarea jocurilor inerente la contactul dintre suprafețele în mișcare pană-cadru, pană-palpator comparator și pană-suport mobil, sînt prevăzute arcurile 7. Tensometrul de etalonat se montează cu baza de măsurare în poziția L_0 din figură. Acționînd șurubul 5, se compară indicațiile tensometrului cu indicațiile comparatorului cu cadran 6, care are o cursă de 10 ori mai mare decît cursa reperului mobil 3.

Fig. 11.2 reprezintă schița de principiu a unui calibrator cu șurub micrometric. Aparatul constă dintr-un batiu 1 pe care sînt fixate două bare

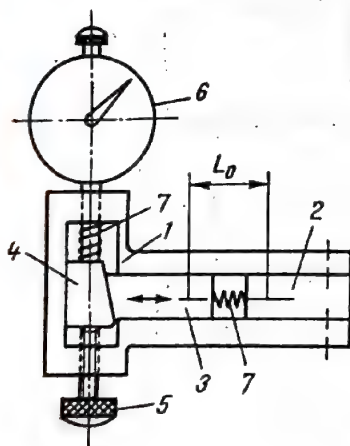


Fig. 11.1.

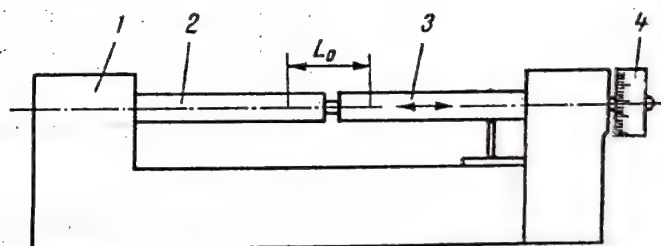


Fig. 11.2.

coaxiale, una fixă 2 și una mobilă 3. Bara mobilă 3 este deplasată longitudinal cu ajutorul unui șurub micrometric 4 cu tambur divizat, cu valoarea diviziunii de $2 \mu\text{m}$. Tensometrul de etalonat se montează cu cuțitele fixe pe bara 2 și cu cuțitele mobile pe bara 3. Prin deplasarea axială a barei mobile 3, se compară indicațiile tensometrului cu cele ale tamburului șurubului micrometric al calibratorului. În fig. 11.3 și 11.4 sînt prezentate calibratoare realizate după acest principiu [22 ; 36].

În fig. 11.5 se arată principiul de construcție și funcționare a unui calibrator utilizat la etalonarea comparatoarelor, tensometrelor și deforme-

trelor [17 ; 14]. Calibratorul constă dintr-un batiu 1 pe care se deplasează o piesă 2 în vederea potrivirii lungimii bazei de măsurare L_0 a tensometrului de etalonat. Tot pe batiul 1 glicează piesa mobilă 3 antrenată de șurubul

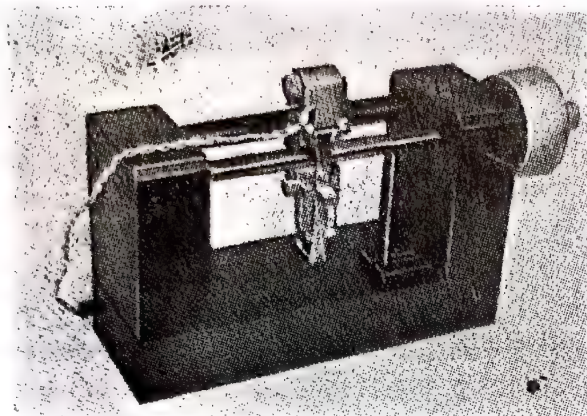


Fig. 11.3.

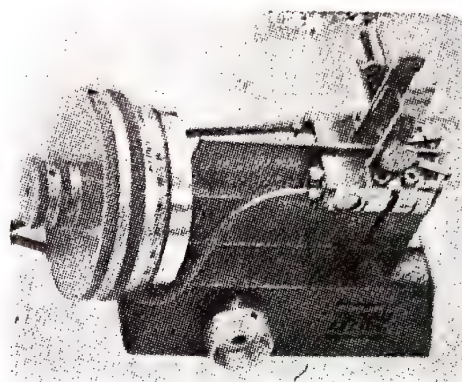


Fig. 11.4.

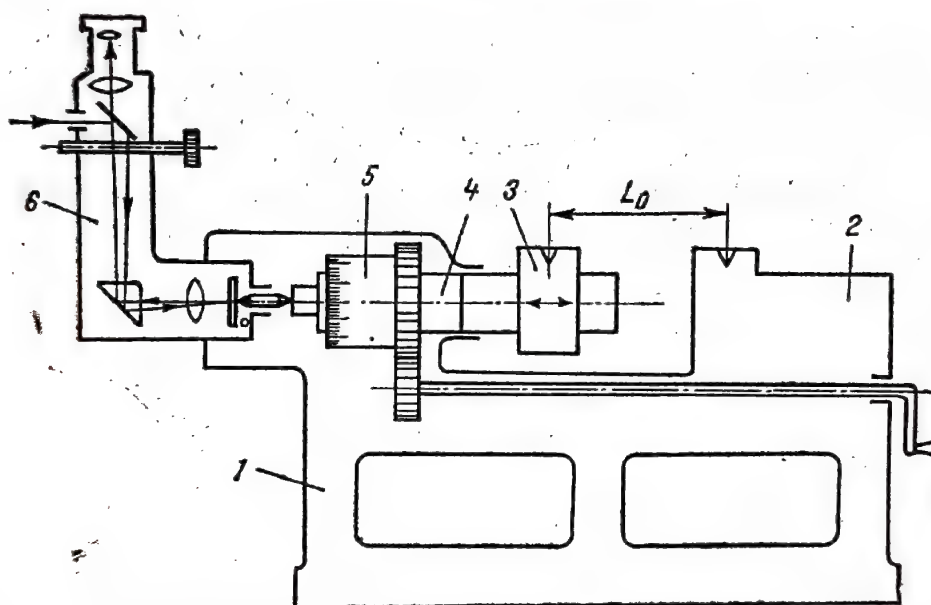


Fig. 11.5.

micrometric 4, prevăzut cu tamburul gradat 5 cu valoarea diviziunii de $5 \mu\text{m}$. Deplasările în mm se citesc pe o riglă fixată de batiul calibratorului, iar subdiviziunile se citesc pe tamburul gradat 5. Domeniul de măsurare este de 10 mm cu precizia de citire de $\pm 5 \mu\text{m}$. Pentru mărirea preciziei de citire, calibratorul este completat cu optimetrul 6 cu valoarea diviziunii de $1 \mu\text{m}$, asigurându-se precizia de $\pm 0,3 \mu\text{m}$ într-un domeniu de măsurare limitat la deformații de $\pm 0,1 \text{ mm}$. Tensometrul de etalonare se montează pe calibrator cu cuțitele sale mobile pe piesa 3 și cu cele fixe pe piesa 2. Etalonarea se face la diverse deplasări ale piesei mobile 3, comparându-se indicațiile tensometrului cu cele ale calibratorului.

Pentru încercarea și omologarea metrologică a tensometrelor și deformetrelor construite în țară, la Institutul Național de Metrologie, Laboratorul Timișoara s-a conceput și realizat un calibrator în acest scop [26 ; 27].

Urmărind eliminarea dezavantajelor calibratoarelor cu instrumente de măsurat mecanice, la calibratorul realizat s-a preconizat introducerea microscopului cu spirală Abbé pentru urmărirea deplasării cursorului acționat printr-un șurub micrometric. Prin măsurarea optică se elimină erorile sistematice datorite frecărilor și jocurilor din articulațiile mecanice și

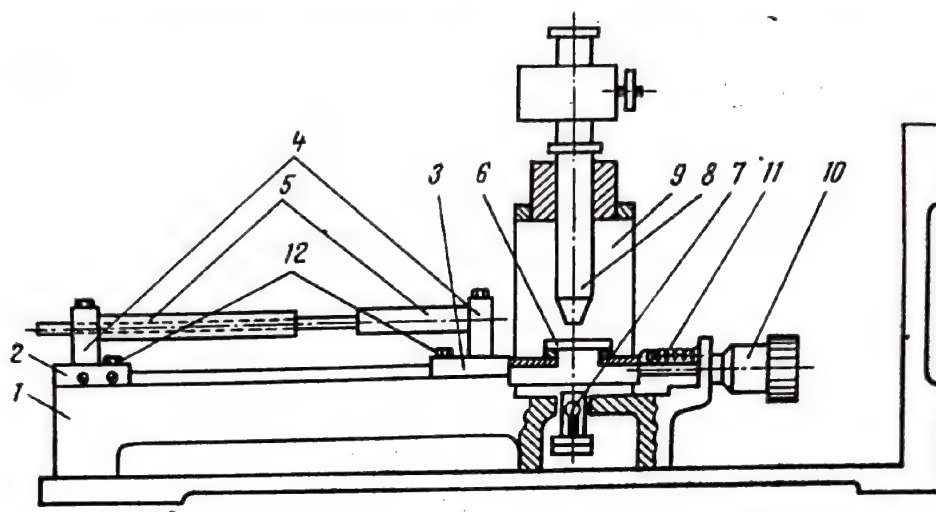


Fig. 11.6.

se reduc sensibil erorile accidentale de observație prin ridicarea preciziei de citire. Valoarea diviziunii microscopului Abbé este de $1\ \mu\text{m}$, cu o precizie de citire de $(0,2 \dots 0,5)\ \mu\text{m}$. Construcția calibratorului constă (fig. 11.6) dintr-un batiu rigid de fontă 1 pe care sînt așezate două sâni 2 și 3 conduse în ghidajele laterale ale batiului. Sania 2, amovibilă independent, se poate monta înainte de etalonare în diverse poziții pe batiu, încadrînd lungimile bazei de măsurare ale tensometrelor de etalonat. Sania-cursor 3 este legată la un capăt printr-o articulație sferică de un șurub micrometric 10, care comandă deplasarea în cursul operațiilor de etalonare. Translația saniei 3 este urmărită prin vizarea unei plăcuțe gradate de sticlă 6, încorporată în consola saniei 3, cu ajutorul unui microscop cu spirală Abbé 8, montat în batiu pe suportul 9, cu axul optic dispus perpendicular pe suprafața sticlei gradate 6, iluminată de lampa 7. Tensometrele amovibile de etalonat se montează pe accesoriile 4 și 5 care reproduc situația din exploatare. Un cuplu telescopic 5, cu un diametru exterior corespunzător tensometrului de verificat, se fixează prin intermediul flanșelor 4 pe suprafața frontală a sâniilor. La deplasarea saniei cursor 3, tuburile telescopice 5 se întrepătrund axial, simulînd deformarea, adică lungimea sau scurtarea unei epruvete cilindrice. Arcurile spirale 11 servesc la menținerea contactului permanent între șurubul micrometric 10 și sania 3.

O atenție deosebită trebuie acordată poziției tensometrului în cursul etalonării [34], pentru a se evita erorile datorite dezechilibrării sau deformării unor părți ale tensometrului. Astfel, tensometrele pentru determinări de deformății pe epruvete, prevăzute a funcționa în poziție verticală, la etalonare vor fi montate în aceeași poziție, calibratorul fiind astfel construit încît să poată fi utilizat în poziție verticală (fig. 11.7) sau

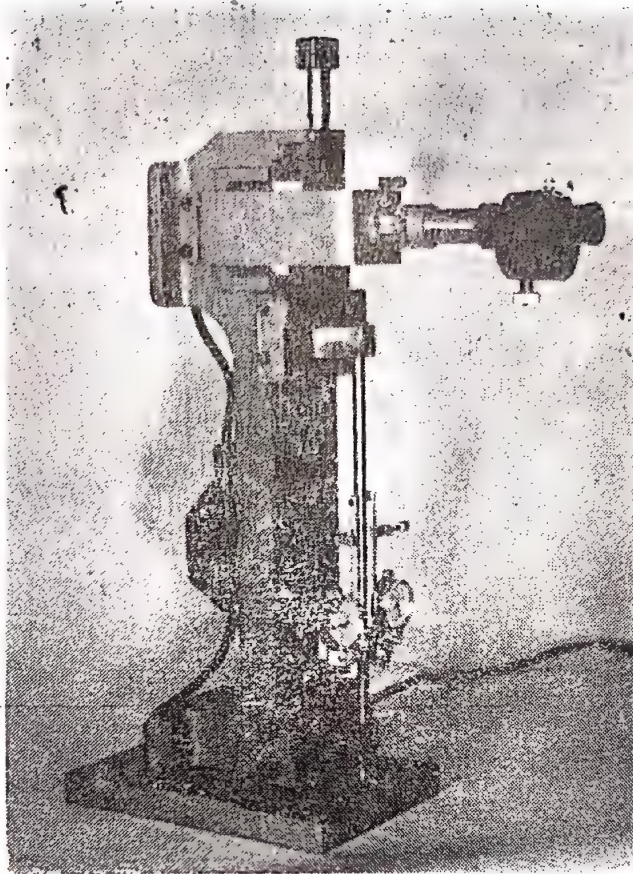


Fig. 11.7.

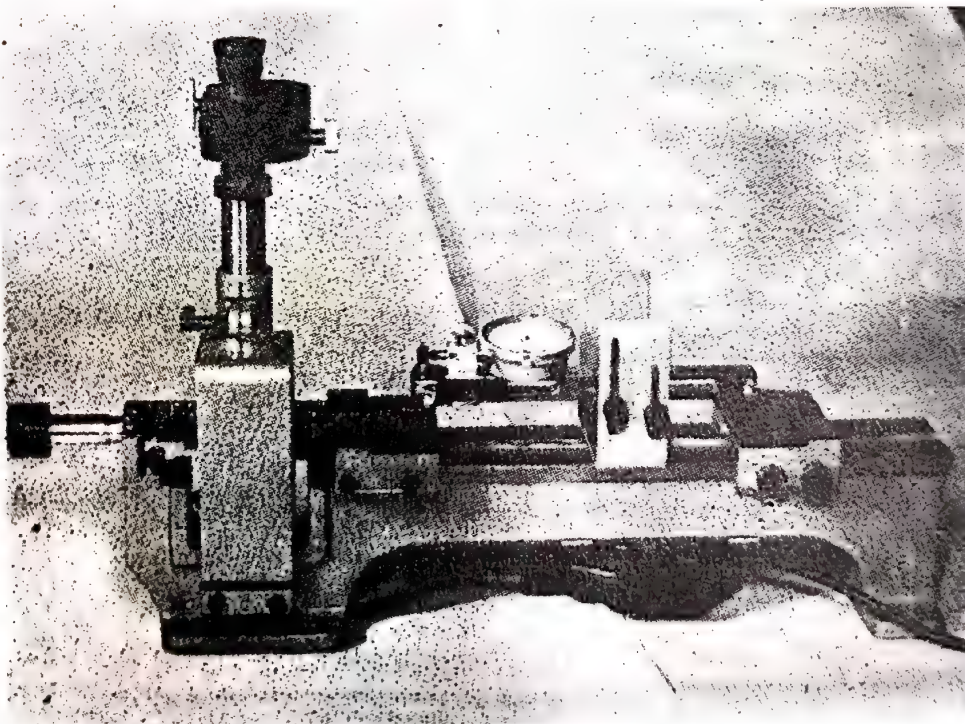


Fig. 11.8.

orizontală — cazul etalonării deformetrelor (fig. 11.8). Calibratorul s-a etalonat prin măsurări comparative cu cale plan-paralele. Distanțele dintre săniile 2 și 3, respectiv dintre scobiturile unor butoni montați în aceste sănii, au fost reglate la anumite lungimi univoc definite prin deschiderea dintre ciocurile unui cadru în care s-au intercalat blocuri de cale. Apoi aceste distanțe au fost măsurate la microscopul cu spirală. Repetind operațiile menționate, se stabilesc caracteristicile metrologice ale calibrato-
rului. În fig. 11.9 sînt reprezentate rezultatele unei etalonări efectuată

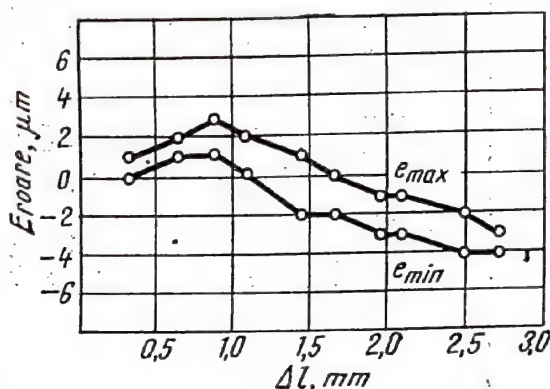


Fig. 11.9.

pentru lungimea inițială de 50 mm cu o variație de 3 mm. S-au măsurat 10 lungimi progresive între 50 și 53 mm, fiecare operație repetându-se de 6 ori. Se constată o strînsă reproductibilitate a rezultatelor în limitele unei amplitudini de $(1..3) \mu\text{m}$. Raportînd această amplitudine la lungimea inițială de 50 mm, abaterile relative apar foarte reduse $(2..6) \cdot 10^{-5}$. Aplicînd corecții la citirea indicațiilor calibrato-
rului corespunzător abaterilor sistematice stabilite la etalonare, se ajunge la o precizie de reproducere de $1,5 \mu\text{m}$. Domeniul de măsurare al calibrato-
rului realizat este de $(50..300) \text{ mm}$ pentru lungimea bazei de măsurare, și de $(0..12) \text{ mm}$ pentru variația acestei lungimi, cu o precizie de citire de $0,5 \mu\text{m}$ și o reproductibilitate de cel mult $1,5 \mu\text{m}$. Construcția se pretează unei utilizări largi permițînd montarea oricăror tipuri de tensometre sau deformetre în poziție verticală sau orizontală. Manipularea aparatului este simplă, sigură și rapidă, operația de etalobare desfășurîndu-se în condiții optime de reeditare a modului de exploatare. Pentru precizii mai mari, calibratoarele pot fi echipate cu aparatură specială ca ultraoptimetre sau interferometre. Normele ASTM [34] prevăd o precizie a calibrato-
rului de 5 ori mai bună decît a tensometrelor de etalonat.

11.1.3. METODOLOGIA ETALONĂRII STATICE A TENSOMETRELOR AMOVIBILE

După ce tensometrele amovibile de etalonat au fost verificate în ce privește aspectul exterior, dimensiunile, construcția și funcționarea lor, este necesară verificarea bazei de măsurare și etalonarea indicațiilor.

Tabelul 11.1

Definițiile și relațiile de calcul ale caracteristicilor metrologice ale tensometrelor

Caracteristica metrologică se determină prin :					
Nr. crt.	Caracteristica metrologică	Simbolul	Caracteristica metrologică se determină prin :		
			— aplicarea repetată a unei deformatii specifice efective și compararea ei cu media deformatiilor specifice indicate	Definiția	Relația de calcul
1	Eroarea relativă de justete	e_j	Diferența dintre deformatia specifică indicată medie $\bar{\varepsilon}_i$ și deformatia specifică efectivă ε la aplicarea repetată și în același sens a aceleiași solicitări efective, exprimată în procente din deformatia specifică efectivă	Diferența dintre deformatia specifică indicată ε_i și deformatia specifică efectivă medie $\bar{\varepsilon}$ obținute la încărcări repetate cu aceeași solicitare efectivă, exprimată în procente din deformatia specifică efectivă medie	$e_j = \frac{\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100 \%$ $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \varepsilon_j$
2	Eroarea relativă de fidelitate	e_f	Diferența dintre deformatia specifică indicată maximă $\varepsilon_{i \max}$ și minimă $\varepsilon_{i \min}$ obținute la aplicarea repetată și în același sens a aceleiași deformatii specifice efective ε , exprimată în procente din deformatia specifică efectivă	Diferența dintre deformatia specifică efectivă maximă ε_{\max} și minimă ε_{\min} obținute la realizarea repetată și în același sens a aceleiași deformatii specifice indicate ε , exprimată în procente din deformatia specifică efectivă medie	$e_f = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\bar{\varepsilon}} \cdot 100 \%$

3	Eroarea relativă de revenire	e_r	Diferența dintre deformația specifică medie indicată la descărcare $\bar{\epsilon}'_i$ și la încărcare $\bar{\epsilon}_i$ obținute la realizarea repetată a aceleiași deformații specifice efective ϵ , exprimată în procente din deformația specifică efectivă	$e_r = \frac{\bar{\epsilon}'_i - \bar{\epsilon}_i}{\bar{\epsilon}} \cdot 100\%$ $\bar{\epsilon}'_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \epsilon'_{ij}$	Diferența dintre deformația specifică efectivă medie la descărcare $\bar{\epsilon}'$ și la încărcare $\bar{\epsilon}$ obținute la realizarea repetată a aceleiași deformații specifice indicate ϵ_i , exprimată în procente din deformația specifică efectivă medie	$e_r = \frac{\bar{\epsilon}' - \bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \cdot 100\%$ $\bar{\epsilon}' = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \epsilon'_j$
4	Eroarea relativă de revenire la zero	e_{r0}	Diferența dintre deformația specifică medie indicată $\bar{\epsilon}'_{i0}$ după anularea solicitărilor și înainte de aplicarea primei trepte de solicitare $\bar{\epsilon}_{i0}$, exprimată în procente din deformația specifică maximă măsurată $\bar{\epsilon}_{is}$	$e_{r0} = \frac{\bar{\epsilon}'_{i0} - \bar{\epsilon}_{i0}}{\bar{\epsilon}} \cdot 100\%$ $\bar{\epsilon}'_{i0} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \epsilon'_{i0j}$ $\bar{\epsilon}_{i0} = 0$		
5	Eroarea relativă de liniaritate	e_l	Diferența dintre deformația specifică indicată medie $\bar{\epsilon}_i$ și deformația specifică liniară ϵ_l la aplicarea repetată și în același sens a aceleiași solicitări afective, exprimată în procente din deformația specifică efectivă	$e_l = \frac{\bar{\epsilon}_i - \epsilon_l}{\bar{\epsilon}} \cdot 100\%$	Diferența dintre deformația specifică efectivă medie $\bar{\epsilon}$ și deformația specifică liniară ϵ_l obținute la încărcări repetate cu aceeași solicitare efectivă, exprimată în procente din deformația specifică efectivă medie	$e_l = \frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_l}{\bar{\epsilon}} \cdot 100\%$

Verificarea bazei de măsurare se execută cu ajutorul unui calibrator reglat, în prealabil, la lungimea bazei de măsurare cu ajutorul unor cale plan-paralele de clasa 2 prinse în cadrele cu ciocuri din trusele cu accesorii. La trei operații succesive de montare în calibratorul reglat, diferențele între valorile lungimii bazei de măsurare indicată de tensometru și baza de măsurare nominală trebuie să fie cel mult egală cu valorile date în tabelul 11.2.

Tabelul 11.3

Erorile tolerate ale tensometrelor amovibile

Clasa de precizie	Toleranța pentru baza de măsurare b	Eroarea relativă maximă admisă pentru						Pragul de sensibilitate p_s	Valoarea medie a diviziunii v_d
		Justete e_j	Fideli-tate e_f	Creșterea indicațiilor e_c	Linia-ritate e_l	Revenire e_r	Revenire la zero e_{r0}		
	% din va-loarea nomi-nală a bazei	% din limita superioară a domeniului de măsurare							
0,1	$\pm 0,1$	$\pm 0,05$	0,1	$\pm 0,1$	$\pm 0,1$	$\pm 0,2$	$\pm 0,05$	0,01	0,1
0,2	$\pm 0,2$	$\pm 0,1$	0,2	$\pm 0,2$	$\pm 0,2$	$\pm 0,4$	$\pm 0,1$	0,02	0,2
1	± 1	$\pm 0,5$	1	± 1	± 1	± 2	$\pm 0,5$	0,1	1

Etalonarea indicațiilor tensometrelor se execută la calibrator, pentru trepte de variație a lungimii atât în succesiunea crescătoare cât și descrescătoare. Fiecare valoare a treptelor se obține ca media aritmetică din șase citiri la aceeași lungime efectiv reglată la calibrator și în aceeași succesiune a treptelor de variație a lungimii. După 3 serii de măsurări se demontează tensometrul și se continuă măsurările după remontarea sa în calibrator. Etalonarea tensometrelor se execută pentru cel puțin 10 trepte, repartizate pe întreg domeniul de utilizare. Diferența între două trepte succesive nu trebuie să depășească $1/8$ din domeniul întreg. Punctele corespunzătoare valorilor maxime și minime ale variației de lungime se verifică întotdeauna.

Montarea tensometrelor pe calibrator se va face în poziția normală de lucru a acestora. După montarea tensometrului, se deplasează reperul mobil al calibratorului cu ajutorul șurubului micrometric, la treptele de valori alese pentru etalonare. După atingerea fiecărei trepte, se citește și se notează indicația tensometrului, parcurcându-se în sens crescător întreg domeniul de utilizare. Se continuă apoi etalonarea în sens descrescător, efectuându-se citirea indicației la aceleași trepte ca la sensul crescător. În cursul operației de creștere sau descreștere a indicațiilor, nu este admisă inversarea sensului de lucru. În cazul că se depășește o anumită treaptă fără a efectua citirea, se reia întreaga serie de citiri [18].

În cursul etalonării, temperatura va fi de $20 \pm 2^\circ\text{C}$. Variația temperaturii în cursul unei serii de măsurări nu trebuie să depășească $0,5^\circ\text{C}$.

Caracteristicile metrologice ale tensometrelor etalonate se stabilesc după cum se arată în tabelul 11.1, iar valorile lor se compară cu limitele admise date în tabelul 11.2, efectuându-se astfel încadrarea tensometrelor în clasa de precizie 0,1 ; 0,2 sau 1.

11.2. ETALONAREA TRADUCTOARELOR REZISTIVE

11.2.1. GENERALITĂȚI

Prin etalonarea statică a traductoarelor tensometrice rezistive se înțelege ansamblul operațiilor de efectuat și al condițiilor necesare pentru determinarea constantei k a traductoarelor de etalonat. Necesitatea etalonării lor rezultă din faptul că traductoarele nu pot fi utilizate [21 ; 4 ; 1] fără a li se cunoaște constanta care, după cum s-a arătat la cap. 3 se definește cu relația

$$k = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{l_0}{\Delta l_0} \quad (11.1)$$

ΔR fiind variația rezistenței R a traductorului corespunzătoare variației Δl_0 a lungimii inițiale l_0 bazei de măsurare.

Se observă că pentru a cunoaște k este necesar a supune traductorul unei deformații cunoscute Δl_0 și a măsura variația rezistenței traductorului ΔR . Această operație constituie obiectul etalonării, în acest scop fiind deci necesare :

- un dispozitiv care să permită realizarea unor deformații cunoscute ;
- o instalație electrică pentru măsurarea variațiilor de rezistență ale traductorului.

Precizia de determinare a lui k depinde direct de precizia cu care se determină variația de rezistență și deformația specifică ; din relația (11.1), după legile propagării erorilor la măsurările indirecte rezultă [8 ; 9]

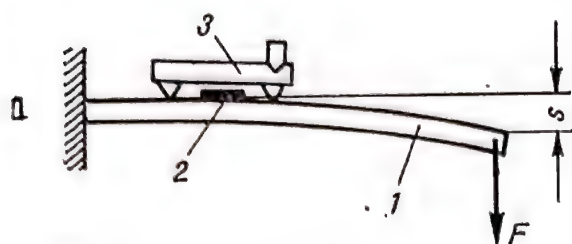
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta (\Delta R/R)}{\Delta R/R} + \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \quad (11.2)$$

astfel că eroarea relativă maximă de determinare a constantei k este egală cu suma erorilor relative cu care s-a determinat rezistența relativă $\Delta R/R$ a traductorului și deformația sa specifică ε . Efectuarea etalonării la un anumit nivel de precizie depinde deci de posibilitatea încadrării erorilor de determinare a rezistenței și deformației într-un anumit cîmp de erori accesibile metodei și dispozitivului de etalonare folosit [13].

Pentru etalonarea statică a traductoarelor tensometrice care se aplică prin lipire (traductoare rezistive sau unele traductoare piezo-electrice) sînt necesare elemente cu deformații cunoscute, pe care să se poată lipi traductoarele de etalonat. Dacă de exemplu elementul deformabil este o bară solicitată la încovoiere, în fig. 11.10 se arată cele 3 posibi-

lități de utilizare a acestui element pentru etalonarea traductoarelor lipite [30 ; 6].

În cazul a) bara 1 este solicitată cu o forță F corespunzătoare săgeții s , iar indicația traductorului 2 de etalonat este comparată cu indicația tensometrului etalon 3 care a fost, în prealabil, etalonat la un calibrator adecuat (pct. 11.1.2). Procedul este afectat de erori $\leq 2\%$.



În cazul b) bara 1 este solicitată cu o forță cunoscută F , iar deformarea corespunzătoare ε a traductorului 2 de etalonat se determină pe baza relațiilor cunoscute din Rezistența materialelor în funcție de dimensiunile grinzii și modulul de elasticitate E al materialului barei. Erorile care apar sînt de cîteva procente, fiind cauzate, mai ales, de imprecizia evaluării deformăției.

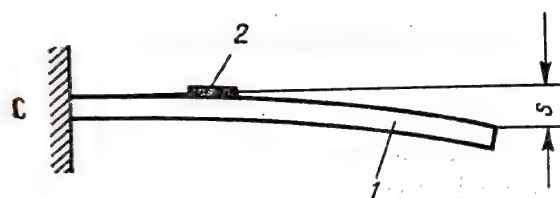
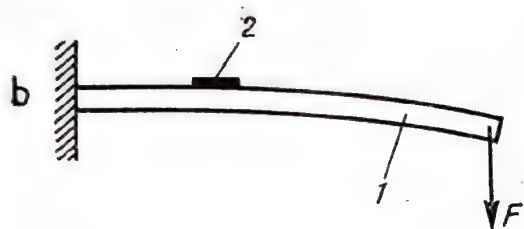


Fig. 11.10.

În cazul c) bara 1 este solicitată cu o forță oarecare, iar deformarea ε a traductorului 2 de etalonat se determină din săgeata s măsurată și din dimensiunile barei. Deoarece acest procedeu nu reclamă cunoașterea lui E , apar erori $\leq 1\%$. Cît timp relaxarea barei rămîne proporțională

cu tensiunea, deformăția ε nu este influențată de această relaxare.

11.2.2. STANDURI PENTRU ETALONAREA STATICĂ A TRADUCTOARELOR REZISTIVE

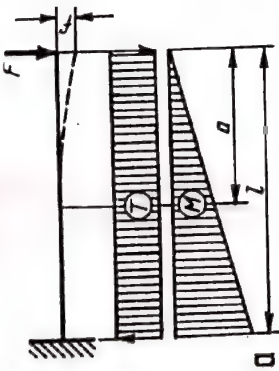
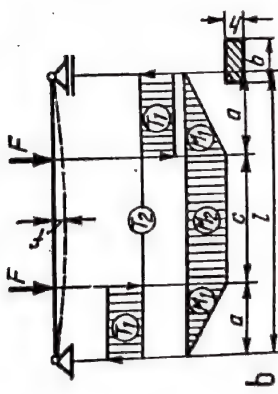
Realizarea deformățiilor specifice cunoscute se face cu ajutorul dispozitivelor de etalonare constituite, în general, din bare pe suprafața cărora apar deformății prestabilite în urma unor solicitări convenabil alese aplicate barei. Pe lîngă bara de etalonare, în componența standurilor de etalonare intră un sistem de solicitare a acestei bare, un dispozitiv de măsurare a săgeții barei și un echipament de măsurare a variației rezistenței electrice a traductoarelor.

Standurile de etalonare, fie că sînt cu deformăție liberă (încărcare cu greutate) fie că sînt cu deformăție impusă, trebuie să satisfacă următoarele condiții generale :

- să asigure realizarea unor deformății cunoscute reproductibile,
- să evite solicitări suplimentare parazite,
- să permită măsurarea săgeții efective a barei de etalonare,
- să poată fi folosite pentru calibrarea diferitelor tipodimensiuni de traductoare rezistive.

În mod obișnuit se utilizează bare de etalonare solicitate la încovoiere conform tabelului 11.3 după cum urmează [10] :

Schema barelor de etalonare

Schema de încărcare	Relații de calcul				Eroarea relativă maximă la determinarea lui k
	Forța tăietoare	Momentul încovoietor	Deformația specifică	Tensiunea și modulul de rezist.	
	$T = F$	$M = Fa$	$\epsilon = \frac{h}{l^2} f$ $h = \text{const.}$ $b = \text{variabil}$ $= y$	$\sigma = \frac{Fa}{W}$ $W = \frac{h^2}{6} y$	$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{\max} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\frac{\Delta R}{R}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta f}{f} + 2 \frac{\Delta l}{l}$
	$T_2 = 0$	$M_2 = Fa$	$\epsilon_2 = \frac{12 h}{3l^2 - 4a^2} f$ $h - \text{grosimea barei}$	$\sigma_2 = \frac{Fa}{W}$ $W = \frac{bh^2}{6}$	$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{\max} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\frac{\Delta R}{R}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2}{3} \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta f}{f}$
	$T_2 = 0$	$M_2 = Fa$	$\epsilon_2 = \frac{4h}{c^2} f$ $h - \text{grosimea barei}$	$\sigma_2 = \frac{Fa}{W}$ $W = \frac{bh^2}{6}$	$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_{\max} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{\frac{\Delta R}{R}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta f}{f} + 2 \frac{\Delta c}{c}$

— bară de egală rezistență cu secțiunea variabilă (grosimea constantă și lățimea variabilă liniar) încastrată la capătul unde secțiunea este maximă și solicitată prin aplicarea unei sarcini la celălalt capăt (tabelul 11.3, a);

— bară de secțiune constantă pe două reazeme simetrice solicitată prin aplicarea a două sarcini simetrice între reazeme (tabelul 11.3, b) sau în afara reazemelor (tabelul 11.3, c).

Pentru determinarea metrologică a factorului k al traductoarelor, normele germane VDE/VDI [35] recomandă utilizarea unei bare de încovoiere care pe lungimea sa utilă este solicitată la încovoiere pură, conform tabelului 11.3, c. Bara de încovoiere va fi confecționată dintr-un oțel cu granulație fină având la limita de proporționalitate o deformare specifică de minimum $3500 \mu\text{m/m}$ ceea ce corespunde unei tensiuni de circa $73,5 \text{ daN/mm}^2$. Fazele de tratament termic ale barei vor fi corelate cu fazele de prelucrare astfel ca tensiunile interne care apar în bară să se anuleze reciproc. Secțiunea barei este, în general, pătrată, cu lungimea laturii de minimum 25 mm . Valoarea deformăției specifice transversale a barei trebuie determinată și indicată cu o eroare $\leq 3\%$. Distanța între punctele terminale ale lungimii de utilizare și locurile de aplicare ale momentului încovoiător va fi de minimum 4 ori grosimea barei de încovoiere. Traductoarele se aplică în mijlocul barei astfel ca să nu ocupe mai mult ca 80% din lățimea barei.

Instalația de solicitare la încovoiere va fi cât mai rigidă fiind astfel construită încât să asigure aplicarea unui moment încovoiător constant în ambele sensuri consecutiv. Dacă momentul de încovoiere este realizat prin deplasarea egală a capetelor barei de etalonare și nu prin aplicarea unor forțe (greutăți) la aceste capete, raza de încovoiere a barei devine independentă de variația de temperatură. Se știe că o variație de $+1^\circ\text{C}$ provoacă la oțel o variație a modului de elasticitate de circa $-0,3^\circ/_{00}$, astfel că la o bară de încovoiere solicitată cu forțe (greutăți) deformăția specifică se modifică cu circa $+0,3^\circ/_{00}$. Aplicarea momentului încovoiător prin deplasări și nu prin forțe mai prezintă și avantajul unei tendințe minime de fluaj și de oscilație după încărcare.

Pe lungimea de utilizare a barei trebuie să se poată realiza o deformare specifică medie de pînă la $\pm 3000 \mu\text{m/m}$ reglabilă cu o precizie de $\pm 10 \mu\text{m/m}$ deci de $0,33\%$. Deformăția specifică medie pe suprafața barei se va determina la fiecare încărcare cu o precizie de $\pm 2 \mu\text{m/m}$, respectiv de $\pm 0,2\%$. Datorită variației toleranțelor de ajustare sau variației locale a modului de elasticitate, pot să apară abateri locale de la valoarea medie a deformăției specifice. Se recomandă ca aceste abateri să nu depășească $\pm 0,5\%$ din valoarea medie. Abaterea se poate determina din măsurări repetate în aceleași condiții [23 ; 24 ; 33].

Pentru încercarea și omologarea metrologică a traductoarelor tensometrice rezistive construite în țară, la Institutul Național de Metrologie Laboratorul Timișoara s-a realizat un banc pentru etalonarea acestora, conceput după schema din tabelul 11.3, c [29]. Bancul de etalonare (fig. 11.11) constă dintr-o masă-suport 1 care susține o șină rigidă de ghidaj 2 pe care culisează două suporturi 3 și 4 prevăzute cu un cuțit de

reazem fix 5 și un cuțit de reazem mobil 6 pe care se așează bara de etalonare 7, pe care se lipesc traductoarele de etalonat 8 — fig. 11.12. Bara de etalonare 7 este prevăzută pe fețele verticale în zona fibrei neutre cu două șanțuri de secțiune triunghiulară, în care pătrund șuruburile 9 cu vîrf conic, ce permit fixarea unui suport 10 care susține plăcuța micrometrică

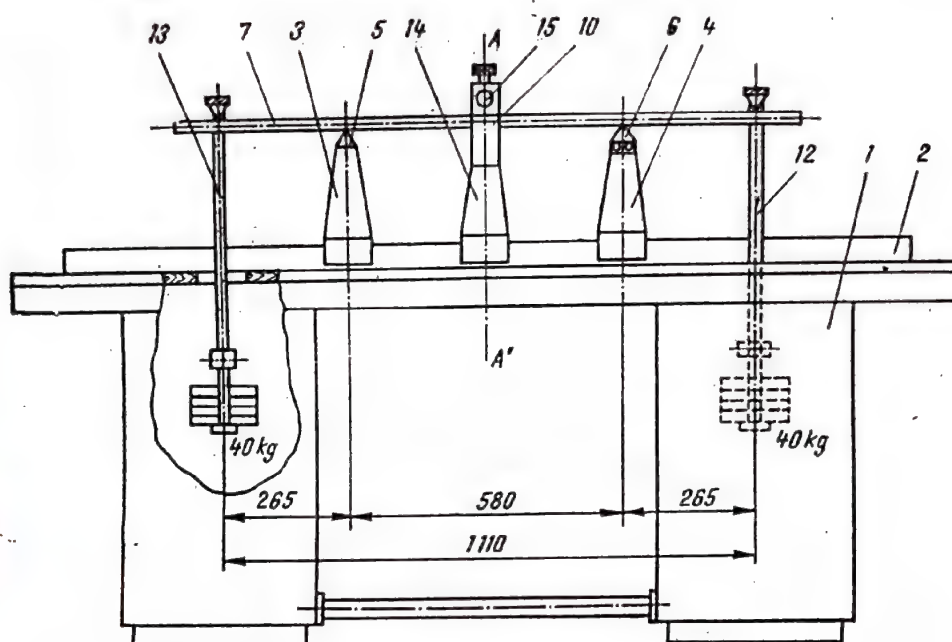


Fig. 11.11.

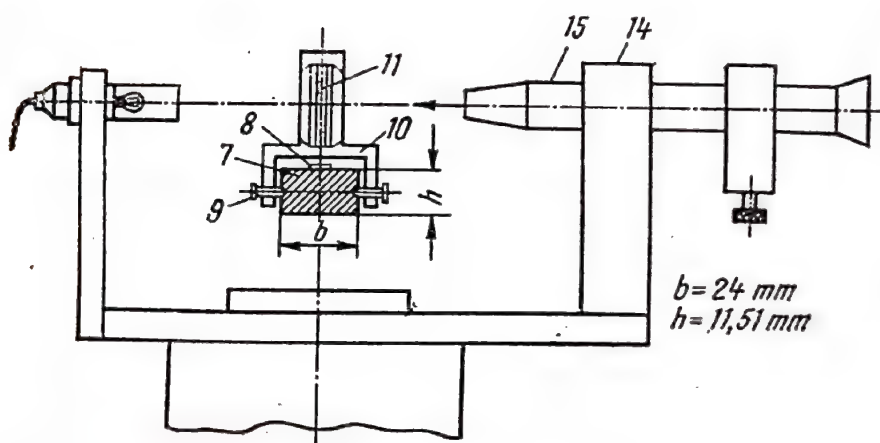


Fig. 11.12.

transparentă 11, luminată lateral. Încărcarea barei 7 se realizează cu ajutorul unor juguri tarate 12 și 13 fie în exteriorul reazemelor 3 și 4 ca în fig. 11.11, fie în interiorul lor prin schimbarea reciprocă a poziției suporturilor 3 și 4, cu jugurile de încărcare 12 și 13. Pe șina de ghidaj 2 culisează un suport 14 care susține un microscop cu spirală 15, cu valoarea diviziunii de 1 μm . Pentru determinarea săgeții efective a barei în dreptul unui

traductor de calibrat, se deplasează în zona acestuia plăcuța micrometrică 11 și se fixează suportul său 10 cu șuruburile 9, după care se vizează plăcuța micrometrică cu microscopul 15, reglînd indicația acestuia la zero, iar apoi se încarcă bara de calibrare 7 pînă la o anumită sarcină și se citește săgeata efectivă a barei la microscop. Din valoarea efectivă a săgeții, dimensiunile barei și valoarea sarcinii se determină deformația specifică efectivă pentru traductorul respectiv. Concomitent cu măsurarea săgeții, se determină și variația rezistenței electrice $\Delta R/R$ a traductorului studiat. Constanta k a traductorului rezultă din raportul între variația rezistenței electrice $\Delta R/R$ și deformația specifică efectivă ε . Operațiile se repetă în aceeași ordine pentru fiecare traductor 8, lipit pe bara de etalonare 7. Bancul de etalonare realizat prezintă următoarele avantaje :

- bara de etalonare este o grindă liber rezemată cu console simetrice, la care între reazeme — zona de lucru — apare o stare de solicitare de încovoiere pură fără forță axială și forță tăietoare, astfel că pe cele două fețe ale barei — superioară și inferioară — vor exista numai tensiuni normale egale și de semn contrar,

- încărcare directă cu greutateți tarate, evitîndu-se solicitările suplimentare ce pot apare la încărcări prin pîrghii articulate,

- măsurarea săgeții efective în axa neutră a barei de etalonare în dreptul fiecărui traductor de calibrat,

- interschimbarea poziției punctelor de aplicare a sarcinii cu poziția reazemelor, obținîndu-se o extindere a domeniului de măsurare (la aceeași sarcină săgeți mai mari),

- poziția reazemelor este astfel aleasă, încît bara așezată pe reazeme nu se deformează sub acțiunea greutății proprii,

- deformarea cauzată de aplicarea la mijlocul barei a suportului de material plastic cu plăcuța micrometrică transparentă este neglijabilă,

- secțiunea barei este astfel aleasă încît deformația specifică respectiv tensiunea în bară ia valori convenabile, divizibile în trepte egale, iar săgeata maximă a barei intră în cîmpul de măsurare al plăcuței micrometrice,

- bara este solicitată sub limita de proporționalitate, asigurîndu-se o revenire elastică la poziția inițială,

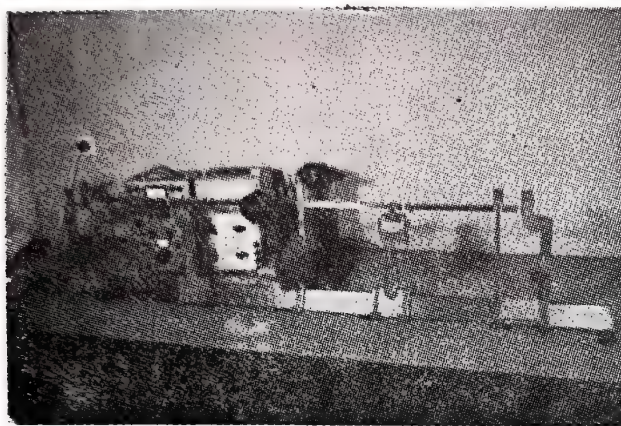
- suprafața zonei active a barei este suficientă pentru a permite aplicarea tuturor tipodimensiunilor de traductoare rezistive fabricate în țară.

Figura 11.13, a reprezintă bancul de etalonare realizat, cu detalii privind aplicarea sarcinilor tarate (fig. 11.13, b) și măsurarea optică a săgeții (fig. 11.13, c). Caracteristicile sale tehnice sînt date în tabelul 11.4. Bancul de etalonare s-a utilizat la încercarea atît a traductoarelor rezistive clasice cît și a celor cu straturi policristaline de germaniu realizate în țară [12].

11.2.3. METODOLOGIA ETALONĂRII STATICE A TRADUCTOARELOR REZISTIVE

Etalonarea și verificarea traductoarelor se execută în condițiile atmosferei standard de încercare prevăzute de STAS 6300—73 și anume temperatura $20 \pm 2^\circ\text{C}$, umiditatea relativă $65 \pm 5\%$ și presiunea [atmosfe-

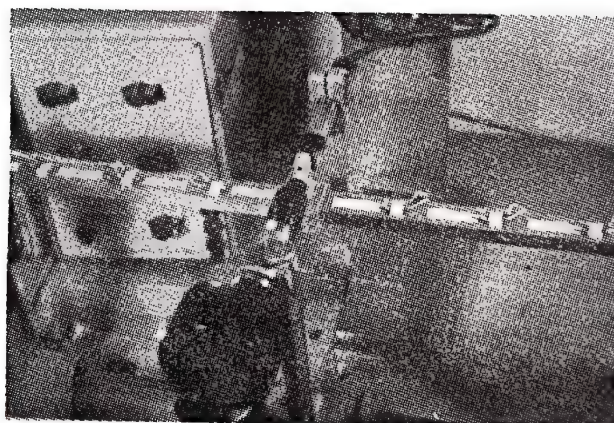
rică 960 ± 100 mbar. Traductoarele tensometrice rezistive fabricate în țară se calibrează și se verifică la controlul curent al lucrărilor de traduc-



a)



b)



c)

Fig. 11.13.

toare și la omologarea unui nou tip de traductor [19]. Pentru denumirea de „traductor electrotensometric rezistiv” se folosește prescurtarea „TER”.

Etalonarea și verificarea traductoarelor rezistive se execută pe probe de TER extrase din lot, iar unele operații de verificare se extind asupra fiecărui exemplar din lot.

Prin probe de TER se înțelege un număr de TER extrase dintr-un lot. Prin lot de TER se înțelege un număr limitat din aceeași serie de fabricație,

Caracteristicile tehnice ale bancului de etalonare construit la Institutul Național de Metrologie București, Laboratorul Timișoara

1. Date constructive		2. Domeniul de utilizare	
Secțiunea barei de încovoiere	11,51 × 24 mm ²	Lungimea bazei de măsurare	1... 200 mm
Lungimea utilă a barei	580 mm	Lățimea bazei de măsurare	1... 20 mm
Sarcina maximă aplicată	2 × 40 daN	Rezistența electrică a TER	100... 1000 Ω
Săgeata teoretică maximă	7547,42 μm	Domeniul compensatorului MK	±26.10 ³ μm/m
Tensiunea teoretică maximă	21,6 daN/mm ²	Valoarea diviziunii la MK	1 μm/m
Deformația specifică maximă	1030 μm/m	Precizia de citire la microscop	0,2 μm
3. Toleranțe de execuție a barei		4. Precizia de reproducere	
Grosimea	± 0,01 mm	Sarcina	± 0,02 %
Lățimea	± 0,01 mm	Săgeata	± 0,1 %
Brațul momentului încovoietor	± 0,5 mm	Rezistența electrică	± 0,2 %

Precizia globală asigurată la calibrare 0,5%

adică realizat în condiții identice : executat cu același dispozitiv și de același operator, cu element sensibil din același material, cu aceleași dimensiuni și cu aceeași configurație a rețelei, avînd suportul din același material și cu aceleași dimensiuni, lipit cu același adeziv, cu același fel de fire de conexiune (terminale) și avînd aceeași bază de măsurare l_0 , rezistență electrică R și constantă k (cu anumite toleranțe maxime admise de standarde sau norme). Un lot se consideră constituit din maximum 100 exemplare la care caracteristicile urmărite pot fi stabilite pe fiecare TER în parte [11].

Un nou tip de TER se consideră realizat prin modificarea valorii nominale a oricărui parametru constructiv (l_0 , R , k , dimensiuni, materiale, configurație, etc.) a tipului de TER din loturi deja omologate. Pentru omologarea unui nou tip de TER se etalonează și se verifică un număr minim de 5–6 bucăți din fiecare lot livrat, admițîndu-se că există o repartiție normală (după Gauss) a erorilor mărimilor verificate. Probele de TER din lot se iau la întîmplare.

Operațiile de verificare se pot executa asupra fiecărui exemplar din lot și asupra probelor extrase din lot. Verificarea fiecărui exemplar din lot constă din :

- verificarea aspectului exterior și a execuției elementelor componente,
- verificarea lungimii bazei de măsurare,
- verificarea rezistenței electrice a elementului sensibil.

Verificarea fiecărei probe extrase din lot constă din :

- verificările menționate mai sus pentru fiecare exemplar din lot,
- verificarea rezistenței de izolație a suportului,
- stabilirea prin etalonare a constantei k .

La omologarea unui nou tip de TER se efectuează în mod suplimentar determinarea caracteristicilor metrologice ale probelor, în cadrul unor încercări funcționale pentru determinarea erorilor relative maxime de justete, fidelitate, creștere a indicațiilor, liniaritate, revenire și revenire la zero, precum și a rezistenței de izolație, pragului de sensibilitate și a valorii medii a diviziunii (TER fiind asociat cu un anumit aparat sau puncte de măsurare). Atît la omologarea unui nou tip de TER cît și la controlul curent al livrărilor, se verifică inscripțiile pe ambalejele loturilor de TER.

Verificarea aspectului exterior, a dimensiunilor și a asamblării părților componente a TER se face constatîndu-se îndeplinirea condițiilor tehnice prescrise pentru elementul sensibil, suportul său, adezivul, firele terminale, contactul intermediar (ca anexă a TER) și foita sau pelicula de protecție (dacă există). Aceste verificări se execută prin observație vizuală sau prin măsurări cu aparate obișnuite.

Verificarea lungimii bazei de măsurare, a rezistenței electrice a elementului sensibil și a rezistenței de izolație a suportului se face constatînd dacă acestea corespund condițiilor tehnice fixate în norme sau standarde. Măsurarea lungimii l_0 și a lățimii l' a bazei TER se face cu precizia de 0,1 mm pentru l_0 și $l' \geq 10$ mm și cu precizia de 0,1 mm pentru l_0 și $l' < 10$ mm. Măsurarea rezistenței electrice R a elementului sensibil respec-

tiv a variației sale relative $\Delta R/R$ trebuie efectuată cu o punte, un compensator sau un montaj de măsurare a cărui eroare maximă de măsurare să nu depășească $\pm 0,1\%$ respectiv $\pm 5 \mu\Omega/\Omega$. Măsurarea se face prin comparație cu rezistențe-etalon cu domeniul de măsurare pînă la $20000 \mu\Omega/\Omega$, divizibil în trepte mari de $2000 \mu\Omega/\Omega \pm 0,02\%$, respectiv în trepte mici de $200 \mu\Omega/\Omega \pm 0,05\%$. Măsurarea rezistenței de izolație a suportului se execută cu un megohmmetru sau punte cu tensiunea de alimentare de maximum 50 V (baterii) pentru evitarea străpungerii. Rezistența de izolație a suportului se măsoară între firele de conexiune (terminale) ale TER și suprafața unei plăci de metal pe care traductorul este apăsător cu ajutorul unei plăcuțe de cauciuc.

Determinarea constantei k a probelor trebuie făcută pentru valoarea maximă a deformației specifice pînă la care TER se comportă liniar, deci poate fi utilizat pentru măsurări. Valoarea lui k astfel obținută urmează a fi atribuită întregului lot din care s-au extras probele încercate.

Stabilirea constantei k prin etalonare comportă o serie de operații și anume:

a) Lipirea probelor pe bara de încovoiere, astfel ca jumătate din numărul lor să fie repartizate pe partea superioară, iar cealaltă jumătate pe partea inferioară a barei. Traductoarele se lipesc paralel cu axa longitudinală a barei, cu abateri maxime de $\pm 1^\circ$.

b) Verificarea stării probelor în urma lipirii și uscării (continuitate, scurtcircuit, izolație).

c) Măsurarea rezistenței electrice a probelor nesolicitate.

d) Solicitarea barei de etalonare alternativ de cîte 3 ori cu încărcări prelabile de \pm respectiv \mp (1100 ± 50) $\mu\text{m/m}$.

e) Descărcarea barei și măsurarea rezistenței electrice a probelor la solicitare nulă (după încărcările prelabile), cu controlul valorii de zero a săgeții barei.

f) Solicitarea barei într-un sens pînă ce $|\epsilon|$ atinge valoarea (1000 ± 10) $\mu\text{m/m}$ și măsurarea variației relative de rezistență $\Delta R/R$ a probelor și a valorii săgeții barei.

g) Descărcarea barei și măsurarea rezistenței electrice a probelor la solicitare nulă (după încărcarea într-un sens), pentru controlul aplicării sarcinii.

h) Solicitarea barei în sens contrar pînă ce $|\epsilon|$ atinge valoarea (1000 ± 10) $\mu\text{m/m}$ și măsurarea variației relative de rezistență $\Delta R/R$ a probelor și a valorii săgeții barei.

i) Descărcarea barei și măsurarea rezistenței electrice a probelor la solicitare nulă (după încărcarea în sens contrar), pentru controlul aplicării sarcinii.

j) Măsurarea săgeții barei se face conform fig. 11.14, iar determinarea deformației medii ϵ_m pe suprafața barei se face cu ajutorul relațiilor [15; 16]

$$\epsilon_m = \frac{\pm h}{\frac{a^2}{p_1} + p_1 + h} ; \quad \epsilon_m = \frac{\pm h}{\frac{a^2}{p_2} + p_2 - h} \quad (11.3)$$

după cum săgeata p_1 se măsoară pe partea concavă, respectiv p_2 pe partea convexă a barei de încovoiere.

k) Deformația specifică efectivă ε a rețelei traductorului aflată la distanța e de suprafața barei de etalonare (fig. 11.15) se obține din relația

$$\varepsilon = \varepsilon_m \left(1 + \frac{2e}{h} \right). \quad (11.4)$$

În cazul sistemului optic de măsurare a săgeții arătat în fig. 11.12, nu este necesară aplicarea acestei corecții.

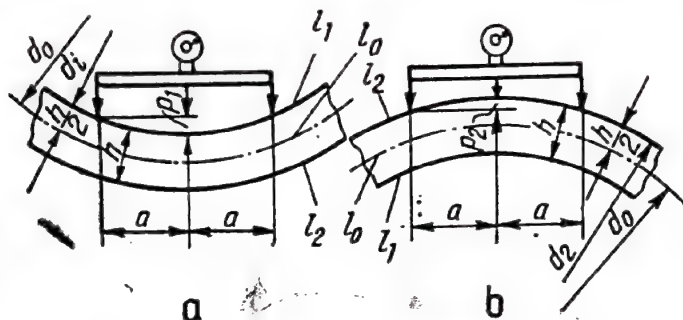


Fig. 11.14

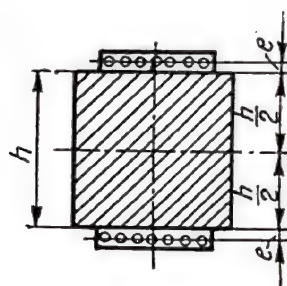


Fig. 11.15

l) Variația relativă de rezistență efectivă $\Delta R/R$ se obține din variația relativă de rezistență măsurată $\frac{\Delta R}{R + R_c}$ cu ajutorul relației

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R}{R + R_c} \left(1 + \frac{R_c}{R} \right) \quad (11.5)$$

în care R_c este valoarea rezistenței electrice a cablurilor de legătură dintre traductoare și echipamentul de măsurare.

m) Constanta k a probelor calibrate rezultă din relația [35]

$$k = \frac{\left| \frac{\Delta R}{R_{poz}} \right| + \left| \frac{\Delta R}{R_{neg}} \right|}{\left| \varepsilon_{poz} \right| + \left| \varepsilon_{neg} \right|} \quad (11.6)$$

unde $\left| \frac{\Delta R}{R_{poz}} \right|$ și $\left| \frac{\Delta R}{R_{neg}} \right|$ reprezintă valorile medii ale variațiilor relative de rezistență efectivă, obținute la aplicarea repetată a operațiilor menționate la pct. f) și h), $\left| \varepsilon_{poz} \right|$ și $\left| \varepsilon_{neg} \right|$ reprezintă valorile medii ale deformațiilor specifice efective, obținute din săgețile măsurate la aplicarea repetată a operațiilor menționate la pct. f) și h).

În fig. 11.16 se arată definirea constantei k ca panta dreptei trasată între cele două valori extreme determinate.

n) Operațiile menționate la pct. e), f), g), h) și i) se repetă în aceleași condiții de 6 ori, obținându-se valorile k_1, k_2, \dots, k_6 pentru fiecare traductor etalonat. Valoarea medie k_{TER} a constantei unui traductor etalonat rezultă din relația

$$k_{TER} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 k_i \quad (11.7)$$

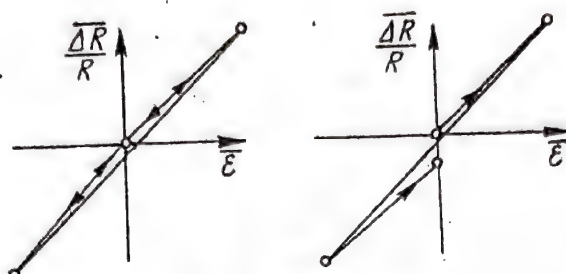


Fig. 11.16

Conform STAS 7122—72 amplitudinea w a șirului de date se calculează din

$$w = k_{TER \max} - k_{TER \min} \quad (11.8)$$

iar calculul abaterii medii pătratice s cu ajutorul amplitudinii se efectuează cu relația

$$s = \frac{1}{d_n} \bar{w} \quad (11.9)$$

\bar{w} fiind amplitudinea medie iar valoarea factorului $1/d_n$ fiind :

Numărul de date din șir	5	6	7	8	9	10
Factorul $1/d_n$	0,43	0,40	0,37	0,35	0,34	0,32

Dacă de exemplu se calibrează 6 traductoare, cu ajutorul relației (11.7) se vor obține valorile $k_{TER1}; k_{TER2}; \dots; k_{TER6}$. Plaja de toleranță admisă de normele VDE/VDI 2635 [35] este de $\pm 2 s$.

Conform STAS 2631—72 pct. 2.8, formula corectată a dispersiei de sondaj este

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_{TERi} - \bar{k}_{TER})^2} \quad (11.10)$$

Ca rezultat la omologarea unui nou tip de traductor se va indica valoarea medie \bar{k}_{TER}

$$\bar{k}_{TER} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 k_{TERi} \quad (11.11)$$

și intervalul de încredere pentru o precizie statistică de $P = 95\%$. Intervalul de încredere se calculează :

$$- \text{absolut } \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s; \quad - \text{relativ } \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s}{\bar{k}_{\text{TER}}} \cdot 100\% \quad (11.12)$$

unde pentru $P = 95\%$ conform STAS 2631-72 rezultă :

n	5	6	7	8	9	10
t	2,571	2,447	1,365	1,306	2,262	2,228
t/\sqrt{n}	1,150	0,999	0,974	0,815	0,754	0,705

o) Pentru determinarea caracteristicilor metrologice funcționale ale traductoarelor, este necesară încărcarea-descărcarea barei de etalonare la 5 trepte de solicitare de câte $(200 \pm 2) \mu\text{m/m}$ deci până la $(1000 \pm 10) \mu\text{m/m}$ (pct. f și h), și repetarea operațiilor de câte 6 ori (pct. n). Din rezultatele astfel obținute se calculează caracteristicile metrologice definite în tabelul 11.1, iar încadrarea probelor de traductoare într-o anumită clasă de precizie se va face conform tabelului 11.5 [7 ; 3].

Etalonarea dinamică a traductoarelor tensometrice este tratată în literatura tehnică [5], urmărind determinarea limitei superioare a frecvenței admise și rezistența la oboseală a TER [31].

11.3. ETALONAREA PUNȚILOR ȘI A AMPLIFICATOARELOR TENSOMETRICE

La măsurarea deformațiilor specifice cu traductoarele rezistive, se utilizează punți și amplificatoare tensometrice. Aceste aparate necesită un control periodic care să le ateste menținerea funcționării în limitele clasei de precizie. Controlul se face cu ajutorul unei instalații de etalonare care permite reproducerea unor variații de rezistență relativă $\Delta R/R$ în condiții de simulare a deformațiilor specifice de măsurat.

În fig. 11.17 se arată schema electrică de principiu utilizată la etalonarea aparatelor tensometrice (AT) [32]. La baza schemei stă divizorul inductiv de tensiune tip DIT 5 (DIT 4) realizat de Institutul Național de Metrologie București [20] având valoarea raportului de divi-

Tabelul 11.5

Condiții tehnice pentru caracteristicile metrologice ale traductoarelor rezistive

Clasa de precizie **)	Caracteristici constructive				Caracteristici funcționale *)								
	Toleranța max. admisă la				Rezistența de izolație minimă R_i	Eroarea relativă maximă admisă pentru							
	baza de măsurare l_0, l'	rezistența electrică R	constantă traducto- rului k	Justete e_j		Fideli- tate e_f	Creșterea indic. e_c	Inițialitate e_i	Revenire e_r	Revenire la zero e_{r0}	Pragul de sensibi- litate e_s	Valoarea medie a divizi- unii v_d	
													% din valoarea măsurată
	% din valoarea nominală				MΩ								
	< 10 mm	≥ 10 mm											
1	±10	± 5	±0,2	±0,5	10 ³	±1	1	±1	±2	±0,5	0,1	1	
2	±15	±10	±0,4	±1,0	10 ²	±2	2	±2	±4	±1,0	0,2	2	
3	±20	±15	±0,6	±1,5	10	±3	3	±3	±6	±1,5	0,3	3	
Efectu- area veri- ficărilor	Se determină pentru fiecare exemplar din lot				Se determină pe 5—6 probe extrase din lotul examinat								
	Se determină la controlul curent al livrării de traductoare				Se determină suplimentar la omologarea unui nou tip de traductor								

*) În domeniul deformațiilor elastice ale barei de etalonare, până la $\varepsilon \cong 1000 \mu\text{m/m} = 10^{-3}$

**) Pentru traductoarele cu semiconductoare se admite cl. 5 și cl. 10.

zare $0...1,11111$ și rezoluția 10^{-7} , ceea ce corespunde la $0,1 \mu\text{m/m}$. Se menționează că valorile de etalonare ale schemei din fig. 11.17 au o mare precizie datorită reproductibilității rapoartelor de divizare asigurate

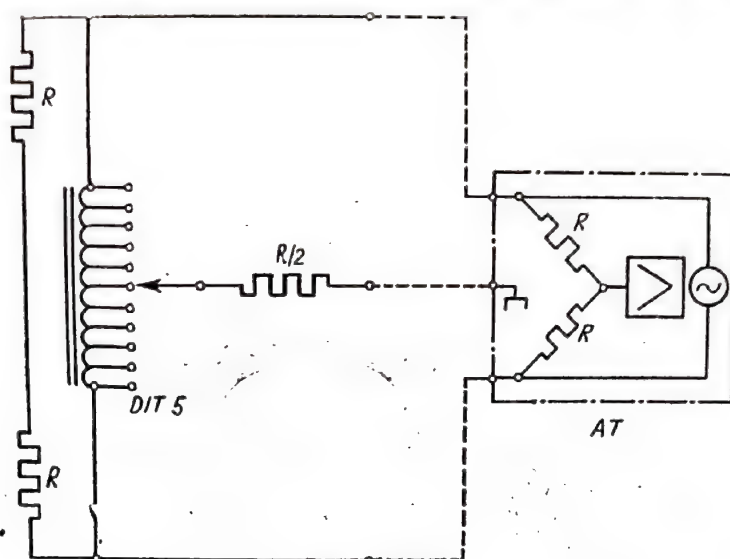


Fig. 11.17

de divizorul inductiv ; punctele de etalonare sînt stabile în timp, contactele de comutare a rapoartelor fiind numai în diagonală de măsurare, în timp ce rezistența totală la borne rămîne constantă pe întreg domeniul de etalonare.

BIBLIOGRAFIE

1. ARGHIRIADE, J., ȘOFLETE, L., *Evaluarea erorilor în determinările extensometrice cu traductoare electrice rezistive (TER)*. Construcția de mașini, vol. 26, nr. 4, 1974.
2. BIDERMAN, V. L., *Metode experimentale de cercetare a tensiunilor și deformațiilor. În „Calculul de rezistență în construcția de mașini” sub redactarea S. D. Ponomariov*, vol. 1. Editura Tehnică, București 1960.
3. BORNHARDT, J. F., *Bestimmung von Messfehlern, Beurteilung und Aussage von Messfehlerangaben*. Messtechnische Briefe 2 (1969), 3 (1969). Hottinger Baldwin Messtechnik, Darmstadt 1969.
4. BUZDUGAN, G., BLUMENFELD, M., *Tensometria electrică rezistivă*. Editura Tehnică, București 1966.
5. CZAİKA, N., *Geberdynamik*. In „Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Größen” herausgeg. von C. Rohrbach. VDI Verlag, Düsseldorf 1967.
6. FINK, K., ROHRBACH, C., *Handbuch der Spannungs- und Dehnungsmessung*. VDI Verlag, Düsseldorf 1958.
7. FÎNTÎNARU, N., *Despre normalizarea traductoarelor extensometrice rezistive (TER)*. Metrologia aplicată, vol. 16 (1969), nr. 4.
8. FÎNTÎNARU, N., *Despre precizia de determinare a tensiunilor prin măsurarea deformațiilor cu mărci tensometrice*. Metrologia aplicată, vol. 13 (1966), nr. 4.
9. FÎNTÎNARU, N., *Etalonarea mărcilor extensometrice*. Metrologia aplicată, vol. 14 (1967), nr. 8.
10. FÎNTÎNARU, N., *Scheme și dispozitive pentru calibrarea statică a traductoarelor extensometrice rezistive (TER)*. Metrologia aplicată, vol. 16 (1969), nr. 7.
11. FÎNTÎNARU, N., *Verificarea și calibrarea statică a traductoarelor tensometrice rezistive (TER) pe bază de probe extrase din loturi*. Metrologia aplicată, vol. 16 (1969), nr. 12.
12. GRIGOROVICI, R., DEVENYI, A., BELU, A., COSTĂCHESCU, C., *Traductor piezorezistiv cu straturi semiconductoare și procedeu de fabricare*. Brevet de invenție nr. 54614/1971, titular Institutul de Fizică București.
13. HANN, F., *Problema aprecierii preciziei unui dispozitiv de calibrare a traductoarelor electrice rezistive*. Metrologia aplicată, vol. 13 (1966), nr. 4.
14. HANN, F., *Metode și aparate de măsurat în încercarea prin încărcare a construcțiilor*. În „Încercarea construcțiilor” sub redactarea S. Bălan și M. Arcan. Editura Tehnică, București, 1965.
15. HOFMANN, K., *Über die Ermittlung von Kenngrößen metallischer Dehnungsmessstreifen (DMS)*. ATM-Archiv für Technisches Messen, V 1372—3, 1975.
16. HOFMANN, K., *Methoden zur Bestimmung technischer Daten von Dehnungsmessstreifen (DMS)*. Proceedings of the Fifth International Conference on Experimental Stress Analysis, Paper 16, Udine 1974.
17. HUGGENBERGER, A., SCHWAIGERER, S., *Messverfahren und Messeinrichtungen für Verformungsmessungen*. In „Handbuch der Werkstoffprüfung, Prüf- und Messeinrichtungen” herausgeg. von Siebel E. und Ludwig N. Springer Verlag, Berlin 1958.
18. *Instrucțiuni 3—76—75 pentru verificarea și calibrarea extensometrelor mecanice cu comparator cu cadran, elaborate de Institutul Național de Metrologie București*, sub redactarea R. Prexl și L. Doboșan. Editura Tehnică, București 1976.
19. *Instrucțiuni 3—78—75 pentru verificarea și calibrarea statică a traductoarelor tensometrice rezistive (TER), elaborate de Institutul Național de Metrologie București*, sub redactarea N. Fîntînaru. Editura Tehnică, București 1976.

20. MILLEA, A., BURCĂ, V., POMÎRLAN, M., *Schemă cu divizoare inductive pentru etalonarea statică a aparatelor tensometrice electrice*. Institutul Național de Metrologie București. Referat de laborator nepublicat, 1974.
21. MOCANU, D., BUGA, M., HALCHINI, C., TEODORU, M., *Utilizarea tensometriei electrice la determinarea eforturilor unitare*. Institutul central de documentare tehnică, București, 1967.
22. Mohr Federhaff Mannheim. *Prospecte de fabricație*.
23. National Aerospace Standard NAS-942. Strain Gages Bonded Resistance. National Standard Association, Inc., Washington, D.C. 1960.
24. *Proposed Revisions to NAS-942 from Sept. 1, 1967*. BLH-Electronics, Inc., Waltham, Mass., 1967.
25. RAȚIU, M., *Încadrarea extensometriei în disciplina metrologică*. Lucrare în curs de publicare 1976.
26. RAȚIU, M., PREXL, R., MATKOVICI, I., *Calibrator pentru extensometre*. Brevet de invenție nr. 52265/13.6.70, titular Institutul Național de Metrologie București.
27. RAȚIU, M., PREXL, R., MATKOVICI, I., *Calibrarea și verificarea extensometrelor optice și mecanice*. Institutul Național de Metrologie București, Laboratorul Timișoara. Studiu nepublicat, 1967.
28. RAȚIU, M., PREXL, R., *Calibrator pentru extensometre*. Metrologia aplicată, vol. 17 (1970), nr. 12.
29. RAȚIU, M., FÎNTÎNARU, N., MATKOVICI, I., *Banc pentru calibrarea traductoarelor tensometrice rezistive (TER)*. Brevet de invenție nr. 54255/11.8.71, titular Institutul Național de Metrologie București.
30. ROHRBACH, C., *Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Größen*. VDI Verlag, Düsseldorf 1967.
31. RUZHA, Z., *Elektricheskie tenzometri soprotivlenia*. Gosenergoizdat, Moskova 1961.
32. SILVIAN, S., *Metodă și aparat pentru etalonarea statică a aparatelor tensometrice electrice*. Brevet de invenție nr. 51356/22.10.68, titular INCERC București.
33. *Tentative Methods of Test for Performance Characteristics of Bonded Resistance Strain Gages*. ASTM Standards Book, Part 30 (1965), Standard Nr. E 251-64 T. American Society for Testing Materials, Philadelphia 1965.
34. *Tentative Method of Verification and Classification of Extensometers*. ASTM Standards Book, Part 3 (1965), Standard Nr. E 83-64 T. American Society for Testing Materials, Philadelphia 1965.
35. VDE/VDI Richtlinie 2635. *Dehnungsmessstreifen mit metallischem Messgitter. Kenngrößen und Prüfbedingungen*. Herausgeg. von Hofmann K. und Czaika N. VDE/VDI-Handbuch Messtechnik II, Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin/Köln 1974.
36. *Zwick Werkstoffprüfmaschinen Einsingen/Ulm*. Prospecte de fabricație.

PRELUCRAREA STATISTICĂ A DATELOR EXPERIMENTALE

Prof. dr. ing. M. BUGA
Dr. ing. I. CONSTANTINESCU

12.1. GENERALITĂȚI

Efectuarea măsurării unei mărimi implică un postulat : se admite că se poate asocia un număr sau un indice mărimii ce se măsoară, adică se admite că mărimea corespunde unei dimensiuni sau unui nivel bine definit [4].

În urma procesului experimental de măsurare se obține o informație sub forma unui număr ce reprezintă raportul dintre valoarea mărimii măsurate și valoarea unei alte mărimi, considerată drept unitate de măsură [7]. În consecință, procesul de măsurare se compune din operația de comparare, cea de codificare precum și o operație de prelucrare a informațiilor obținute.

În timpul comparării și a codificării, informația pe care experimentatorul dorește să o obțină este „perturbată” de influențe întâmplătoare care nu se cunosc, sau care se cunosc dar nu pot fi înlăturate ; se spune că informația este afectată de erori. Pentru a se putea estima valoarea adevărată a mărimii măsurate, este necesară prelucrarea rezultatelor măsurării. Această prelucrare se face pe baze fundamentate științifice, după metode generale elaborate în acest scop de către statistica matematică. Metodologia de prelucrare, relațiile de calcul și terminologia corespunzătoare fac obiectul a numeroase normative și standarde [9], [10], [11], care au stat la baza întocmirii acestui capitol.

Expresia matematică a măsurării unei mărimi scalare este

$$M = m [M] \quad (12.1)$$

în care M este o mărime fizică concretă, de o speță dată, $[M]$ un sub-multiplu al lui M , de aceeași speță, luat ca unitate de măsură, iar m un număr [5]. În relația (12.1) m este un factor numeric, cantitativ, iar $[M]$ este un factor calitativ, care definește speța mărimii măsurate M , factor luat ca unitate de măsură presupusă cunoscută riguros. Rezultatul M al măsurării se numește măsură sau valoare a mărimii considerate, iar rezultatul numeric m al operației de măsurare este valoarea numerică.

Definită în acest mod, operația de măsurare este o *măsurare directă*. Valoarea M obținută considerînd unitatea de măsură lipsită de eroare se numește *valoarea reală* sau *valoare adevărată*, aceasta fiind pentru studiul erorilor *valoarea de referință*.

Diferența dintre rezultatul măsurării unei mărimi și valoarea adevărată a mărimii respective este *eroarea de măsurare*. Cînd se face o măsurare repetată a unei mărimi M , șirul de valori m obținut conține erori de măsurare necunoscute. Principala problemă a prelucrării matematice a rezultatelor măsurărilor este cea a determinării cît mai precise a valorii m . Pentru aceasta este necesară cunoașterea proprietăților erorilor de măsurare.

12.2. ERORI DE MĂSURARE

Studiul erorilor de măsurare poate fi abordat din diverse puncte de vedere, după scopul urmărit. În cele ce urmează se face doar o clasificare și enunțare a acestora, insistîndu-se numai asupra acelor aspecte care sînt esențiale pentru dezvoltările ulterioare.

12.2.1. CLASIFICAREA ERORILOR DUPĂ ORIGINEA LOR [2]

Erorile pot avea drept cauză :

a) *Principiul de măsurare*. Este posibil ca teoria însăși a procedeului de măsurare utilizat să nu fie riguros valabilă pentru operația de măsurare ce se realizează.

b) *Mijloacele de măsurare*. Pentru ca erorile de măsurare să fie cît mai mici este necesară alegerea judicioasă a metodelor și a mijloacelor de măsurare, precum și a condițiilor în care urmează să se efectueze măsurarea. Mijloacele de măsurare se aleg avînd în vedere caracteristicile lor tehnice de construcție și de funcționare, precum și caracteristicile metrologice : justetea, fidelitatea, sensibilitatea.

c) *Operatorul*. Erorile comise de operator pot fi datorate imperfecțiunii simțurilor (văzul, auzul), neatenției, incompetenței, neglijenței etc.

12.2.2. CLASIFICAREA ERORILOR DUPĂ NATURA LOR

a) *Erori grosolane*. Caracteristic erorilor grosolane este faptul că nu sînt conforme cu realitatea. Ele constituie greșeli de măsurare și provin din încălcarea principiilor generale de măsurare sau dintr-o eroare gravă aparținînd operatorului. Un rezultat care conține o eroare grosolană diferă esențial de rezultatele celorlalte măsurări. De regulă, la o repetare a măsurărilor, erorile grosolane nu se reproduc, ceea ce permite depistarea și înlăturarea lor.

b) *Erori sistematice*. Cînd o influență oarecare, acționînd singură asupra măsurării, produce o eroare avînd o anumită valoare — nenulă — totdeauna aceeași, se spune că măsurarea este afectată de o eroare sistematice.

tică. Erorile sistematice pot fi datorate unei reglări sau etalonări incorecte a instrumentelor, unei erori a operatorului (de exemplu face sistematic o eroare de paralaxă) sau condițiilor experimentale (de exemplu un aparat se utilizează la o temperatură diferită de cea la care a fost etalonat sau reglat).

Se remarcă faptul că erorile sistematice sînt foarte grave, deoarece ele nu se elimină cînd se repetă de mai multe ori măsurarea unei aceleiași mărimi și cînd se adoptă ca valoare a mărimii măsurate media aritmetică a rezultatelor măsurărilor.

Uneori este posibil ca erorile sistematice să fie depistate, prin măsurarea aceleiași mărimi prin metode diferite sau prin măsurarea cu același aparat a mai multor mărimi cunoscute. Odată determinate valorile erorilor sistematice, ele pot fi eliminate prin corectarea corespunzătoare a rezultatelor măsurărilor.

c) *Erori aleatorii*. Deoarece în natură și în tehnică nu există fenomene izolate, orice proces de măsurare este influențat de o multitudine de factori care reprezintă efecte ale unor alte fenomene ce se produc simultan cu cel ce se studiază. Influența individuală a fiecăruia din acești factori este neglijabilă, din care cauză nu este posibilă depistarea și înlăturarea lor, efectul global fiind producerea unor erori aleatorii inevitabile ce nu pot fi înlăturate din rezultatele individuale ale măsurărilor.

Teoria probabilităților și statistica matematică permit să se determine în ce măsură erorile aleatorii influențează estimațiile adevăratelor valori ale mărimilor măsurate și cum se pot afla acestea cu o eroare determinată. În acest scop se definește un model probabilistic al apariției erorilor aleatorii și o lege a repartiției acestora.

12.3. REPARTIȚIA NORMALĂ A ERORILOR ALEATORII DE MĂSURARE

12.3.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE. DEFINIȚII [9]

Dacă prin efectuarea unor măsurări pentru o mărime, a căror adevărată valoare este m , se obțin erorile aleatorii z_i , atunci înseși rezultatele măsurărilor

$$x_i = m + z_i \quad (12.2)$$

sînt aleatorii. Repetînd de un număr mare de ori, în condiții identice, măsurarea mărimii m , se constată că rezultatele aleatorii x_i ale măsurării sînt caracterizate de o lege de repartiție bine determinată.

În termenii teoriei probabilităților, orice rezultat al unui experiment se numește eveniment, sigur fiind evenimentul care se produce cu certitudine la orice efectuare a experimentului. Eveniment imposibil este cel care nu se poate produce.

Probabilitatea unui eveniment este o măsură a șanselor de realizare a acelui eveniment. Dacă un experiment se desfășoară astfel încît producerea

oricărui eveniment legat de acesta are un număr finit de șanse egal — posibile, probabilitatea evenimentului este raportul dintre numărul rezultatelor favorabile producerii evenimentului și numărul tuturor rezultatelor posibile. Probabilitatea evenimentului x se notează $P(x)$ și este un număr cuprins între 0 și 1, valoarea 0 corespunzând unui eveniment imposibil, iar 1 unui eveniment sigur.

Variabila aleatorie X este funcția numerică definită pe mulțimea rezultatelor x_i ale unui experiment. Variabila X ale cărei valori x_i pot umple un interval x_1, x_2 și căreia i se poate atașa o funcție $f(x)$ cu proprietățile

$$f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad (12.3)$$

astfel încît :

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad (12.4)$$

se numește variabilă aleatorie continuă.

Funcția $f(x)$ se numește densitate de probabilitate, sau densitate de repartiție, a variabilei $X(x)$.

12.3.2. REPARTIȚIA NORMALĂ A ERORILOR ALEATORII DE MĂSURARE [6] [9]

Dacă măsurarea unei mărimi m se efectuează, în condiții identice, de un număr mare de ori n , obținându-se șirul de valori aleatorii x_i , iar din acestea, q valori se află în intervalul x_1, x_2 , probabilitatea

$$\frac{q}{n} = P(x_1 < x < x_2) \quad (12.5)$$

este o caracteristică a intervalului x_1, x_2 și se numește frecvență relativă a variabilei x în intervalul considerat.

Funcția care permite ca pentru orice interval x_1, x_2 să se determine probabilitatea $P(x_1 < x < x_2)$ se numește repartiție de probabilitate a variabilei x .

În calculele ingineresti cel mai des se folosește repartiția de probabilitate normală (Gauss — Laplace), definită prin densitatea de probabilitate de forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^{*2}}} \quad (12.6)$$

pentru $-\infty < x < +\infty$; $\sigma^* > 0$, în care m este adevărata valoare a mărimii măsurate, iar σ^* este un parametru.

Observație: În normativul [9], ca și în majoritatea lucrărilor de statistică matematică pentru parametrul σ^* din relația (12.6) se folosește notația σ . Pentru a evita unele confuzii ca urmare a utilizării în capitolele anterioare a notației σ pentru tensiunile normale, în acest capitol se va folosi notația σ^* .

În figura 12.1 s-a reprezentat grafic funcția $f(x)$, care în cele ce urmează se va numi curbă de repartiție.

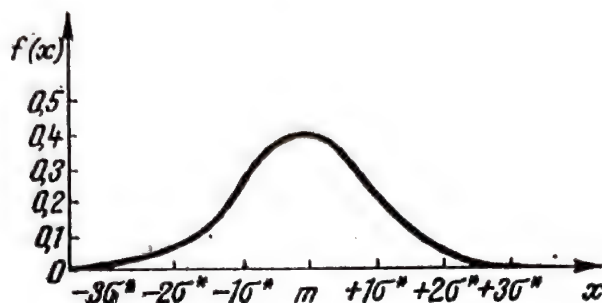


Fig. 12.1.

În calcule este mai comod ca în locul densității de probabilitate (12.6), definită pentru rezultatele măsurărilor x_i , să se utilizeze densitatea de probabilitate $p(z)$ a erorilor aleatorii z_i . În acest scop se face schimbarea de variabilă (v. relația 12.2))

$$z_i = x_i - m \quad (12.7)$$

și se obține

$$p_{0;\sigma^*}(z) = \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^{*2}}} \quad (12.8)$$

Dacă se spune despre $f(x)$ că este centrată în m , atunci $p_{0;\sigma^*}(z)$ este centrată în origine.

12.3.3. PROPRIETĂȚILE PRINCIPALE ALE REPARTIȚIEI NORMALE [6]

Legea de repartiție normală a erorilor aleatorii (12.8) este de regulă într-o bună concordanță cu experiența. În acest caz se pot formula metode de calcul privind estimarea adevăratei valori a mărimii măsurate și a preciziei măsurărilor. Însă, pentru fundamentarea acestor calcule trebuie verificat pentru fiecare caz în parte, așa cum se va arăta la § 12.5, dacă repartiția este normală.

Principalele proprietăți ale repartiției normale a erorilor aleatorii de măsurare sînt :

a) *Simetria*. Erorile aleatorii de semne diferite se întîlnesc la fel de frecvent.

b) *Concentrarea*. Erorile aleatorii mici în valoare absolută, sînt mai frecvente decît cele mari și aceasta cu atît mai mult cu cît parametrul σ^* are valori mai mici (v. fig. 12.2).

c) *Regula „trei sigma”*. Probabilitatea ca variabila aleatorie z să depășească limitele $\pm 3 \sigma^*$ este foarte mică și anume

$$P(|z| > 3 \sigma^*) = 0,0027,$$

ceea ce arată că practic erorile de măsurare sînt mărginite în valoare absolută de limita $3 \sigma^*$.

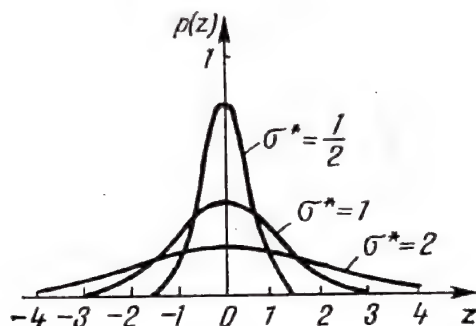


Fig. 12.2

12.3.4. PARAMETRII STATISTICI PRINCIPALI [10], [11]

Normativul [11] prevede că în cazul unei repartiții normale a șirului de date x_i obținute prin n măsurări, desfășurate în condiții identice, pentru o aceeași mărime, se pot calcula parametrii statistici principali definiți după cum urmează (în ordinea importanței lor):

a) *Parametri de tendință*

— Media aritmetică de sondaj a șirului de date:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (12.9)$$

— Mediana de sondaj a șirului de date, aceasta fiind valoarea față de care frecvența valorilor mai mici decît ea este egală cu frecvența valorilor mai mari decît ea. Valorile x_i se aranjează în ordine crescătoare sau descrescătoare și mediana este:

— dacă n este impar

$$M_e = x_{(n+1)/2}; \quad (12.10, a)$$

— dacă n este par

$$M_e = \frac{1}{2} (x_{n/2} + x_{n/2+1}). \quad (12.10, b)$$

— Modul de sondaj al șirului de date:

$$M_0 = \bar{x} + 3(M_e - \bar{x}). \quad (12.11)$$

— Valoarea centrală a șirului de date :

$$x_c = \frac{1}{2} (x_{max} + x_{min}), \quad (12.12)$$

în care x_{max} este cea mai mare din valorile x_i , iar x_{min} , cea mai mică.

b) *Parametri folosiți ca indici de împrăștiere*

— Abaterea medie pătratică de sondaj

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad (12.13)$$

în care n_i este frecvența absolută corespunzătoare valorii x_i .

— Dispersia șirului de date :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2, \quad (12.14, a)$$

sau se poate folosi formula aproximativă

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2. \quad (12.14, b)$$

— Amplitudinea șirului de date, care este diferența dintre valoarea cea mai mare (x_{max}) și valoarea cea mai mică (x_{min}) din șirul de date

$$\bar{R} = x_{max} - x_{min}. \quad (12.15)$$

— Coeficientul de variație al șirului de date :

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}}, \quad (12.16)$$

— Abaterea medie absolută a șirului de date :

$$A_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i |x_i - \bar{x}|. \quad (12.17)$$

— Coeficientul de asimetrie al șirului de date :

$$\beta_1 = \frac{(\bar{\mu}_3)^2}{(s^2)^3}, \quad (12.18)$$

în care s^2 este dat de relația (12.14, a) iar

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^3. \quad (12.19)$$

Observație: Cu excepția coeficientului de variație și a coeficientului de asimetrie, toți parametrii statistici definiți mai sus se exprimă în aceleași unități de măsură ca și datele șirului

12.4. CARACTERISTICILE METROLOGICE ALE MIJLOACELOR DE MĂSURARE

La paragraful 12.2.1, b s-au făcut unele mențiuni privind alegerea metodelor și mijloacelor de măsurare, precum și a condițiilor în care urmează să se efectueze măsurarea. Detalierea acestora nu se poate face decât pentru fiecare situație concretă în parte, printr-un studiu aprofundat al fenomenului care se măsoară, al scopului care se urmărește și de cele mai multe ori al mijloacelor de măsurare avute la dispoziție. În cele ce urmează se vor face doar câteva considerații generale privind principalele caracteristici metrologice ale mijloacelor (aparaturii) de măsurare [4].

12.4.1. FIDELITATEA

Caracteristica metrologică a unui aparat de măsură de a da indicații cu o variație maximă cât mai mică, la măsurarea aceleiași mărimi, în condiții identice, se numește fidelitatea aparatului respectiv.

Fidelitatea unui aparat se apreciază prin mărimea dispersiei erorilor ce se obțin la utilizarea sa. În cele ce urmează se presupune că erorile sistematice ale aparatului sînt nule.

a) *Cazul cînd adevărata valoare a mărimii ce se măsoară este constantă.*

Dacă măsurările sînt nedistructive, este posibilă repetarea de n ori a măsurării mărimii m avută în vedere și aparatul furnizează indicațiile

$$x_i = m + z_i, \quad 1 < i < n.$$

Dacă valorile x_i au o repartiție normală, înseamnă că și variația erorilor z_i este normală, fiind centrată în raport cu m . Înseamnă că definirea fidelității aparatului se poate face pornind de la valorile observate x_i , pentru care se calculează dispersia s^2 .

b) *Cazul cînd adevărata valoare a mărimii ce se măsoară este variabilă.*
Dacă nu se utilizează decât un singur aparat de măsură, care nu măsoară decât o singură dată o anumită valoare m_i a mărimii ce se studiază se obține

$$x_i = m_i + z_i, \quad 1 < i < n.$$

În acest caz este imposibil să se separe dispersia erorilor de dispersia adevăratelor valori ale mărimii (variabile) ce se studiază. Între cele trei dispersii va exista relația

$$s_x^2 = s_m^2 + s_z^2.$$

Pentru rezolvarea unei asemenea probleme, fie se repetă măsurările, fie se utilizează mai multe aparate care fac măsurări simultan.

12.4.2. JUSTEȚEA

Justețea este caracteristica metrologică a unui aparat de măsură de a da indicații cât mai apropiate de cele ale adevăratei valori a mărimii pe care o măsoară. Justețea unui aparat de măsură se poate aprecia prin erorile sistematice ale indicațiilor sale. Dar cum aceste erori afectează valoarea mediei aritmetice \bar{x} a indicațiilor aparatului, înseamnă că justețea unui aparat nu se poate verifica decât prin comparație cu alte aparate.

a) *Compararea erorilor sistematice.* Dacă c este numărul aparatelor de măsură cu care se măsoară n mărimi, se obține pentru fiecare aparat câte un șir de n valori x_i . Se spune că justețea aparatelor este aceeași, dacă media aritmetică \bar{z} a abaterilor aleatorii corespunzătoare fiecăruia din cele c șiruri de date este aceeași. Această concluzie este valabilă sub rezerva verificării prealabile a egalității fidelității aparatelor.

b) *Etalonarea unui aparat de măsură.* Etalonarea unui aparat de măsură are o influență nemijlocită asupra justeței acestuia.

Curba de etalonare a unui aparat de măsură trebuie privită ca o funcție $\varphi(m)$ dintre adevăratele valori m ale mărimilor ce se măsoară și indicațiile x ale aparatului, funcție care este afectată de erorile aleatorii z , adică

$$x = \varphi(m) + z. \quad (12.20)$$

Pentru o mărime m_0 dată, există o zonă de incertitudine A_0B_0 ca urmare a împrăștierei indicațiilor x ale aparatului (fig. 12.3). Se presupune că repartiția indicațiilor aleatorii ale aparatului este normală și centrată pe valoarea x , ea avînd abaterea medie pătratică s . Dacă această repartiție se limitează la $\pm 3s$ (§ 12.3.3, c) atunci există probabilitatea de 95% ca indicația x_0 a aparatului să se afle în zona A_0B_0 .

În practică problema este inversă: pentru o indicație x_0 a aparatului, să se spună cât este m_0 . Dar lui x_0 îi corespunde un interval de încredere asociat IS avînd probabilitatea de 95% să îl conțină pe m_0 .

În [4] se arată că

$$m_s - m_I = 3,92 \frac{s}{\varphi(m_0)}.$$

Rezultă că este inutil ca diviziunile scării aparatului să fie mai mici decât cele corespunzătoare intervalului de încredere IS , orice interpolări în interiorul acestui interval fiind iluzorii.

12.4.3. SENSIBILITATEA

Sensibilitatea este caracteristica metrologică a unui aparat de măsură de a pune în evidență cele mai mici variații ale mărimii ce se măsoară. Adică, având două rezultate x_1 și x_2 a două măsurări, se pune întrebarea dacă valorile adevărate corespunzătoare sînt diferite.

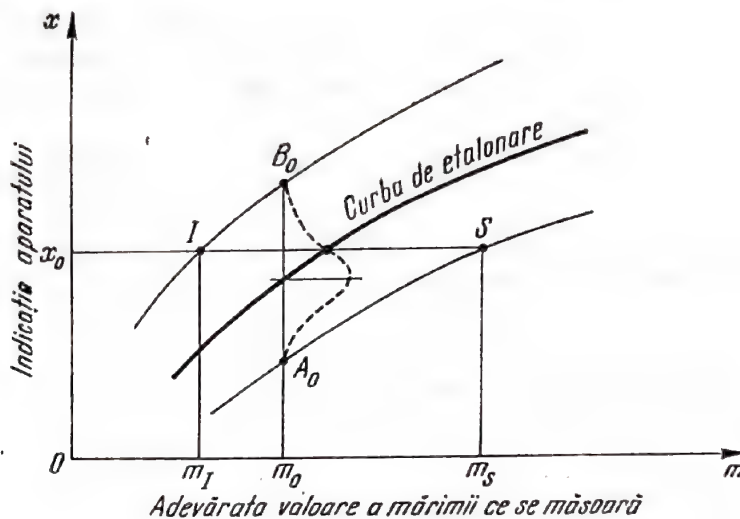


Fig. 12.3

Similar cu (12.20) se poate scrie

$$x_1 = \varphi(m_1) + z_1;$$

$$x_2 = \varphi(m_2) + z_2,$$

de unde, scăzînd a doua relație din prima, rezultă

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \varphi(m_1) - \varphi(m_2) + z_1 - z_2.$$

În [4] se arată că Δx minim care se traduce printr-o variație semnificativă a acului indicator al aparatului are valoarea

$$|\Delta x| = 5,5 \frac{s}{\varphi(m)}$$

în care s și $\varphi(m)$ au semnificațiile definite la paragraful 12.4.2.

12.5. PRELUCRAREA STATISTICĂ A REZULTATELOR MĂSURĂRILOR

Metodele de prelucrare statistico-matematică a datelor provenite din măsurări se bazează pe următoarele ipoteze [11]:

a) Datele experimentale sînt șiruri statistice de valori ale unor variabile aleatorii unidimensionale.

b) Șirurile de valori obținute în urma măsurărilor nu sînt funcție de timp, adică toate determinările experimentale s-au făcut în aceleași condiții, deși ele sînt decalate în timp.

c) Mijloacele de măsurare (aparatele) au funcționat corect, în condiții de precizie egale, determinările nefiind afectate de erori sistematice sau grosolane.

d) Datele supuse prelucrării aparțin unei legi de repartiție normală sau care să poată fi considerată, în mod justificat, ca aproape normală.

e) Rezultatele măsurărilor sînt autentice și reprezentative pentru fenomenul ce se cercetează.

Prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor constă din [6], [10], [11]:

12.5.1. CALCULUL PRINCIPALILOR PARAMETRI STATISTICI

Relațiile de calcul pentru determinarea valorilor principalilor parametri statistici s-au prezentat în § 12.3.4 (relațiile (12.9 — 12.19)). La calculul acestora se vor lua toate datele obținute prin măsurare, fără a elimina unele din ele numai pe considerentul că sînt prea împrăștiate față de restul valorilor din șirul de date.

Uneori, în scopul reducerii volumului calculelor, se rotunjesc valorile mărimilor măsurate, intervalul maxim admisibil de rotunjire fiind 0,6 din abaterea medie pătratică a șirului de valori.

Toți parametrii statici principali se calculează fie pe baza valorilor rotunjite, fie pe baza datelor brute.

În toate operațiile aritmetice care se efectuează asupra șirului de date, se recomandă a se reține la rezultate două cifre semnificative în plus față de numărul de cifre semnificative ale datelor șirului.

12.5.2. VERIFICAREA NORMALITĂȚII REPARTIȚIEI DATELOR

Prelucrarea statistică a rezultatelor măsurărilor își propune să facă estimări ale adevăratelor valori ale mărimilor măsurate și să formuleze unele concluzii privind precizia metodei de măsurare folosite și a erorilor de măsurare. Toate aceste concluzii se bazează pe ipoteza că datele supuse prelucrării au o repartiție normală sau aproape normală. Din aceste motive trebuie ca pentru fiecare experiment să se verifice concordanța repartiției datelor cu legea repartiției normale.

În acest scop trebuie mai întîi ca datele să fie grupate pe intervale de variație a valorilor, pentru a le condensa ordonat. Aceste intervale se numesc clase. De obicei, mărimea intervalelor care constituie clasele se ia aceeași pentru toate clasele.

Normativul [11] recomandă ca numărul claselor să fie între 13 și 20. Cînd numărul n al datelor este mai mic de 250, este suficientă împărțirea în 10 clase. Pentru un număr de date mai mic de 25, gruparea datelor în clase nu are decît o importanță redusă din punctul de vedere al unui supliment de informație.

Numărul k al claselor se poate determina cu relația

$$k = 1 + 3,322 \log n \quad (12.21)$$

căruia îi corespunde o amplitudine a intervalului unei clase

$$a = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \quad (12.22)$$

în care x_{\max} și x_{\min} sînt cea mai mare, respectiv ce mai mică dintre valorile șirului de date.

Numărul n de date aparținînd clasei i se numește frecvență absolută, iar raportul dintre frecvența absolută și numărul n total de date, se numește frecvență relativă f_i . Frecvența cumulată F este suma frecvențelor relative sau absolute corespunzătoare valorilor mai mici sau cel mult egale cu o valoare oarecare aparținînd șirului de date.

Verificarea normalității repartiției datelor se poate face prin mai multe metode, dintre care normativul [11] recomandă următoarele:

a) Prezentarea frecvențelor relative cumulate ale valorilor în rețeaua de probabilitate.

Pe o diagramă, numită rețea de probabilitate, avînd trasate un sistem special de coordonate, se reprezintă în abscisă limita superioară a claselor iar în ordonată frecvențele relative cumulate corespunzătoare. Dacă curba trasată prin puncte se apropie de o dreaptă, atunci distribu-

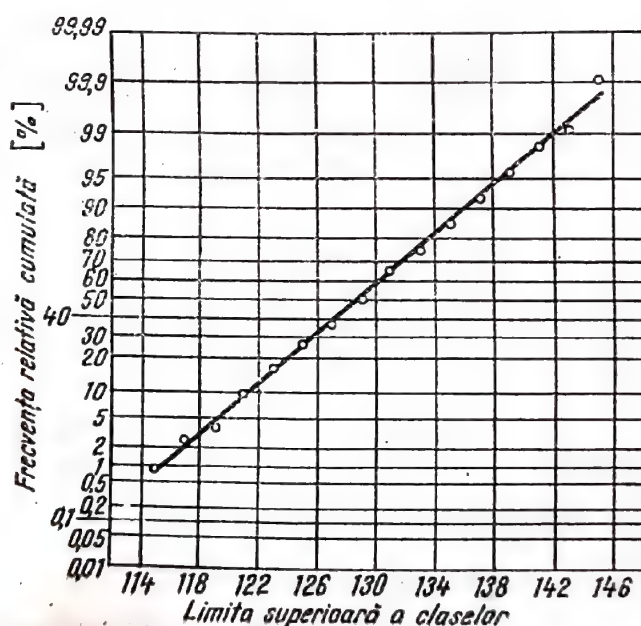


Fig. 12.4.

ția de frecvențe poate fi considerată ca provenind de la o lege de repartiție normală. În figura 12.4 se prezintă spre exemplificare o astfel de reprezentare, extrasă din lucrarea [3].

Metoda este rapidă și comodă, însă este aproximativă.

Cînd se constată că datele au abateri mari față de dreaptă, se poate căuta o transformare simplă a acestora, de exemplu $x^* = \ln x$, $x^* =$

$= \sqrt{x}$, etc., în urma căreia datele să aibă o repartiție normală. În aceste cazuri, tot ce se referă la mărimile x se va aplica pentru mărimile transformate x_0 , după care se face din nou trecerea la mărimile inițiale.

b) *Verificarea valorilor unora dintre parametrii statistici principali.* Metoda este mai ales calitativă și constă în următoarele verificări :

— se constată dacă repartiția de frecvență are un singur maxim. În acest scop se trasează o diagramă ca în figura 12.5, numită histo-

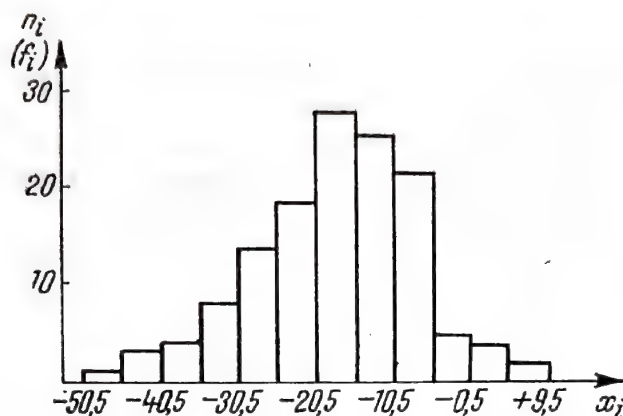


Fig. 12.5.

gramă [10], care are reprezentate în abscisă limitele claselor x_i , iar în ordonată frecvența absolută n_i sau frecvența relativă f_i . Dacă repartiția datelor este normală, histograma trebuie să prezinte un singur maxim ;

— se calculează valoarea mediei aritmetice cu relația (12.9), a medianei cu relația (12.10) și a modului cu relația (12.11). Dacă repartiția datelor este normală, trebuie ca valorile medianei și modului să nu difere semnificativ de cea a mediei aritmetice ;

— se calculează, cu relația (12.18), valoarea coeficientului de asimetrie, care în cazul unei repartiții normale a datelor trebuie să fie aproape zero.

Dacă aceste verificări nu duc la concluzii favorabile privind normalitatea repartiției datelor, este necesară o analiză mai amănunțită, cantitativă, a șirului de date.

c) *Testul χ^2 .* Cel mai important și mai des folosit [8] dintre testele de verificare a normalității unui șir de date experimentale este testul χ^2 . Acesta este un test cantitativ și constă în calcularea valorii

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (12.23)$$

în care :

n_i — este numărul de valori al clasei i ;

$N = \sum_{i=1}^k n_i$ — numărul total de valori (date) ;

k — numărul claselor ;

p_i — probabilitatea teoretică corespunzătoare frecvenței de apariție a valorii x_i , în cazul unei repartiții normale.

Valoarea χ^2 calculată cu relația (12.23) se compară cu o valoare χ^2 critică, determinată funcție de un parametru ν numit grad de libertate și pentru un nivel de încredere α . Dacă suma (12.23) depășește valoarea critică χ^2_{α} , atunci cu o certitudine având probabilitatea α se poate considera că funcția de repartiție a datelor experimentale diferă de cea normală. În caz contrar, nu sînt suficiente dovezi pentru o astfel de concluzie.

Se recomandă ca la aplicarea testului χ^2 să fie îndeplinite condițiile [11].

$$N \geq 50; n_i \geq 5; 10 \leq k \leq 20. \quad (12.24)$$

Dacă clasele extreme au mai puțin de cinci date fiecare, atunci aceste clase se contopesc cu cele alăturate lor și numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 3. Dacă una din clasele extreme are mai puțin de cinci date, atunci această clasă se contopește cu clasa alăturată și numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 2. Dacă toate clasele au mai mult de 5 date fiecare, atunci numărul gradelor de libertate este egal cu numărul claselor, minus 1.

Pentru calculul efectiv al sumei (12.23) se procedează după cum urmează [6]:

- se calculează media aritmetică \bar{x} și abaterea medie pătratică s a șirului de date, utilizînd relațiile (12.9) respectiv (12.13);
- se calculează pentru fiecare clasă i , valoarea

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \quad (12.25)$$

în care x_i este limita superioară a clasei i .

Observație. Se consideră totdeauna că șirul de date are limitele $-\infty, +\infty$. Deci limita inferioară a primei clase este $-\infty$, iar limita superioară a ultimei clase este $+\infty$.

- se calculează probabilitățile teoretice p_i cu relația

$$p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}) \quad (12.26)$$

pentru care se va avea în vedere că

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt \quad (12.27)$$

este funcția de probabilitate integrală și că $\Phi(+\infty) = 0,5$, $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

Valorile funcției $\Phi(t)$ se pot obține prin integrare numerică pe calculator, sau se pot lua din tabelul 12.1.

- se calculează suma (12.23);
- se caută în tabelul 12.2 valoarea χ^2 critică, corespunzătoare numărului gradelor de libertate ν , stabilit așa cum s-a arătat mai sus, și unui nivel de încredere α , convenabil ales;

Tabelul 12.1

$$\text{Valorile funcției } \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad [6]$$

t	$\Phi(t)$									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936

Tabelul 12.1 (continuare)

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
2,5	0,49379	3,2	0,49931	3,9	0,499952	4,5	0,4999966
2,6	0,49534	3,3	0,49952	4,0	0,499968	4,6	0,4999979
2,7	0,49653	3,4	0,49966	4,1	0,499979	4,7	0,4999987
2,8	0,49774	3,5	0,499767	4,2	0,499987	4,8	0,4999992
2,9	0,49813	3,6	0,499841	4,3	0,499991	4,9	0,4999995
3,0	0,49865	3,7	0,499892	4,4	0,499995	5,0	0,4999997
3,1	0,49903	3,8	0,499927				

Tabelul admite o interpolare liniară cu o eroare de până la 10^{-4}

— se compară valoarea χ^2 calculată cu relația (12.23), cu valoarea χ^2 critică și se formulează o concluzie privind acceptarea sau respingerea ipotezei de normalitate a repartiției datelor, așa cum s-a arătat mai sus.

În legătură cu aplicarea testului χ^2 , în lucrarea [6] se fac următoarele observații :

— când nu există suficiente argumente pentru a respinge ipoteza normalității repartiției datelor, se *acceptă* această ipoteză ; o valoare mică a sumei (12.23) nu poate constitui o demonstrație a normalității ;

Tabelul 12.2

Valorile critice χ^2 pentru nivelul de încredere α și numărul de grade de libertate ν [6]

$\alpha \backslash \nu$	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
4	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	14,9	16,9	18,5
5	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	16,3	18,9	20,5
6	8,56	10,64	12,59	15,03	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,80	12,02	14,07	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,03	13,36	15,51	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,24	14,68	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,44	15,99	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,63	17,30	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,7	35,6	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,2	37,1	39,3
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,1	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,1	45,3

— cu cât numărul măsurărilor este mai mare, certitudinea concluziei formulate pe baza testului χ^2 crește;

— eficiența testului χ^2 crește dacă în fiecare din clasele de grupare a datelor se află aproximativ același număr de date.

12.5.3. ESTIMAȚII ALE ADEVĂRATEI VALORI ALE UNEI MĂRIMI MĂSURATE (6)

a) *Tipuri de estimări, proprietăți.* Estimarea adevăratei valori m a unei mărimi măsurate prin n determinări independente, ale căror rezultate au fost x_1, x_2, \dots, x_n (presupunind că nu au existat erori grosolane sau sistematice) constă în :

— determinarea unei funcții $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, numită estimăția punctuală sau estimăție a valorii m , care să dea o valoare suficient de apropiată de valoarea m ;

— determinarea unui interval $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ care cu o probabilitate dată α , să acopere adevărata valoare m . Această estimare se numește *estimăție de încredere*, probabilitatea α se numește *nivel de încredere*, intervalul $g - \varepsilon, g + \varepsilon$ — interval de încredere, iar ε — limită de încredere.

Estimația $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ asigură o aproximație suficient de bună a valorii adevărate m , când ea îndeplinește următoarele condiții :

— este *nedeplasată*, adică valoarea ei medie teoretică coincide cu valoarea m ;

— este *consistentă*, adică ea tinde către m când numărul n al măsurărilor crește;

— este *eficientă*, adică ea are cea mai mică împrăștiere dintre estimările nedeplasate ale valorii m obținute pe baza rezultatelor măsurărilor.

b) *Estimații punctuale.* Dacă cele n măsurări ale mărimii m au fost efectuate cu aceeași precizie și dacă rezultatele măsurărilor se supun unei legi normale de repartiție, estimația nedeplasată, consistentă și eficientă a mărimii măsurate este media aritmetică a rezultatelor măsurărilor, adică

$$m \approx \bar{x}, \quad (12.28)$$

în care \bar{x} se calculează cu relația (12.9).

c) *Estimații prin intervale de încredere.* Estimațiile de încredere pentru adevărata valoare m a mărimii măsurate prin măsurări de egală precizie, având o repartiție normală, este

$$|m - \bar{x}| < \varepsilon \quad (12.29)$$

unde

$$\varepsilon = \frac{s}{\sqrt{n}} t(\alpha, \nu), \quad (12.30)$$

în care :

- s este abaterea medie pătratică a rezultatelor măsurărilor ;
- n — numărul măsurărilor ;
- $t(\alpha, \nu)$ — factor provenind din repartiția Student ;
- α — nivel de încredere ;
- $\nu = n - 1$ — numărul gradelor de libertate.

Valoarea nivelului de încredere α se poate alege arbitrar, dar se recomandă ca aceasta să se stabilească folosind regula trei sigma (§ 12.3.3, c). În tabelul 12.3 se dau valorile lui α stabilite în acest mod, funcție de numărul n al măsurărilor.

Tabelul 12.3

Valorile nivelului de încredere α , funcție de numărul n al măsurărilor

n	α	n	α	n	α
5	0,960	12	0,988	25	0,994
6	0,970	14	0,990	30	0,995
7	0,976	16	0,991	50	0,996
8	0,980	18	0,992	150	0,997
9	0,983	20	0,993	∞	0,9973
10	0,985				

În tabelul 12.4 se dau valorile factorului $t(\alpha, \nu)$ pentru nivelul de încredere α și numărul gradelor de libertate ν .

În final, se poate spune că intervalul $\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon$ acoperă, cu un nivel de încredere α , valoarea m .

12.5.4. ESTIMAREA PRECIZIEI MĂSURĂRILOR

Se presupune că măsurările sînt independente, de egală precizie și că au o repartiție normală.

Indicatorul preciziei măsurărilor este abaterea medie pătratică sau dispersia șirului de date.

Tabelul 12.4

Valorile factorului $t = t(\alpha, \nu)$ [6]

$\alpha \backslash \nu$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Interpolarea este permisă numai pentru argumentul ν (cu o precizie de $7 \cdot 10^{-3}$). Pentru $\nu > 100$ se va utiliza relația (cu o precizie de 10^{-3})

$$t(\alpha, \nu) = t(\alpha, \infty) + \frac{100}{\nu} [t(\alpha, 100) - t(\alpha, \infty)].$$

a) *Estimarea punctuală a dispersiei.* În cazul măsurării unei mărimi m cunoscute (etalon), estimatie eficientă a dispersiei este media pătratelor abaterilor rezultatelor măsurărilor x_1, x_2, \dots, x_n de la valoarea m

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2. \quad (12.31)$$

Cind se măsoară o mărime necunoscută, estimatia nedeplasată și consistentă a dispersiei este dispersia șirului de date, calculată cu una din relațiile (12.14). Această estimatie este numai asimptotic eficientă.

b) *Intervale de estimatie pentru eroarea medie pătratică.* Estimatie cu ajutorul unui interval de încredere a abaterii medii pătratice se definește prin relația

$$\left| \frac{\sigma^* - s}{s} \right| < q \quad (12.32, a)$$

sau

$$s(1 - q) < \sigma^* < s(1 + q) \quad (12.32, b)$$

în care :

- σ^* este abaterea medie pătratică standard ;
 $q = q(\alpha, \nu)$ — factor, funcție de nivelul de încredere α și numărul gradelor de libertate ν .
 s — abaterea medie pătratică a șirului de date, calculată cu relația (12.13).

Dacă s-au făcut n măsurări, numărul gradelor de libertate este egal cu n în cazul măsurării unei mărimi cunoscute (etalon) și $\nu = n - 1$ în cazul măsurării unei mărimi necunoscute.

Relațiile (12.32) sînt valabile numai pentru $n > 17$. În acest caz, valorile lui $q(\alpha, \nu)$ sînt cele din tabelul 12.5.

Tabelul 12.5

Valorile factorului $q = q(\alpha, \nu)$ [6]

$\nu \backslash \alpha$	0,95	0,99	0,999	$\nu \backslash \alpha$	0,95	0,99	0,999
17	0,400	0,639	0,961	55	0,196	0,280	0,398
18	0,385	0,602	0,916	60	0,187	0,266	0,375
19	0,371	0,578	0,875	65	0,179	0,253	0,356
20	0,358	0,556	0,838	70	0,172	0,242	0,339
22	0,336	0,518	0,776	80	0,160	0,224	0,311
24	0,318	0,487	0,724	90	0,150	0,209	0,289
26	0,302	0,460	0,679	100	0,142	0,196	0,271
28	0,288	0,437	0,641	110	0,135	0,186	0,257
30	0,276	0,416	0,609	120	0,129	0,177	0,246
35	0,253	0,375	0,544	150	0,115	0,159	0,220
40	0,234	0,343	0,494	200	0,099	0,135	0,184
45	0,219	0,318	0,455	250	0,089	0,120	0,162
50	0,207	0,297	0,424	300	0,081	0,109	0,146

Interpolarea este permisă numai pentru argumentul ν . Pentru $\nu < 150$ eroarea de interpolare liniară nu depășește $2 \cdot 10^{-3}$.

Pentru $\nu > 150$ se vor utiliza relațiile (precizie 10^{-3}):

$$q(0,95, \nu) = \frac{1,40}{\sqrt{\nu}}; \quad q(0,99, \nu) = \frac{1,83 + \frac{16}{\nu}}{\sqrt{\nu}};$$

$$q(0,999, \nu) = \frac{2,33 + \frac{60}{\nu} - \frac{800}{\nu^2}}{\sqrt{\nu}}.$$

Și pentru această estimatie, similar cu ceea ce s-a arătat la paragraful 12.5.3, c, nivelul de încredere α se poate stabili funcție de numărul ν al

gradelor de libertate (care la rândul său este funcție de numărul măsurărilor, așa cum s-a arătat mai sus) și anume :

$$\alpha = 0,99 \text{ pentru } \nu > 47$$

$$\alpha = 0,992 \text{ pentru } \nu > 100$$

$$\alpha = 0,995 \text{ pentru } \nu > 200.$$

12.5.5. ELIMINAREA DATELOR AFECTATE DE ERORI GROSOLANE

La § 12.5.1 s-a menționat că un se pot elimina unele din valorile determinate experimental numai pe considerentul că sînt prea împrăștiate față de restul datelor șirului. Pentru eliminarea acelor valori care sînt susceptibile a fi afectate de erori grosolane se aplică teste de verificare, formulate de statistica matematică [6], [7], [8].

a) *Testul Irwin (denumit și testul λ)*. Dacă șirul de n date se ordonează în sens crescător sau descrescător, rezultatele susceptibile a fi afectate de erori grosolane sînt cele de la extremitățile șirului [7]. Pentru verificarea valorii suspecte x_n se calculează valoarea

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{s} \quad (12.33)$$

în care s este abaterea medie pătratică a șirului celor n date, determinată cu relația (12.13).

Comparînd valoarea lui λ cu valoarea critică λ_{critic} , din tabelul 12.6, determinarea x_n se elimină din șirul de date dacă $\lambda > \lambda_{\text{critic}}$; în caz contrar, nu sînt motive suficiente pentru aceasta. Nivelul de încredere al concluziei este α .

Dacă valoarea x_n a fost eliminată, se recalculează abaterea medie pătratică s pentru cele $n-1$ valori rămase și testul λ se aplică din nou, pînă cînd nu se mai elimină date ale șirului.

b) *Testul Chauvenet* [6], [8]. Fie x^* valoarea din șirul de date pentru care se face verificarea. Se calculează expresia

$$t = \frac{|x^* - \bar{x}|}{s} \quad (12.34)$$

în care \bar{x} este media aritmetică, iar s abaterea medie pătratică a șirului de date, din care s-a eliminat valoarea x^* . Comparînd valoarea t cu valoarea critică $t^*(n, \alpha)$ din tabelul 12.7, determinarea x^* se elimină dacă

$$t > t^*(n, \alpha)$$

concluzia avînd un nivel de încredere α .

Tabelul 12.6

Valorile critice pentru testul Irwin

$n \backslash \alpha$	0,95	0,99
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Tabelul 12.7

Valorile critice $t^*(n, \alpha)$ pentru eliminarea valorilor susceptibile de a fi afectate de erori grosolane [6]

$n \backslash \alpha$	0,95	0,98	0,99	0,999	$n \backslash \alpha$	0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43	20	2,145	2,602	2,923	3,979
6	2,78	3,64	4,36	7,41	25	2,105	2,541	2,852	3,819
7	2,62	3,36	3,96	6,37	30	2,079	2,503	2,802	3,719
8	2,51	3,18	3,71	5,73	35	2,061	2,476	2,768	3,652
9	2,43	3,05	3,54	5,31	40	2,048	2,456	2,742	3,602
10	2,37	2,96	3,41	5,01	45	2,038	2,441	2,722	3,565
11	2,33	2,89	3,31	4,79	50	2,030	2,429	2,707	3,532
12	2,29	2,83	3,23	4,62	60	2,018	2,411	2,683	3,492
13	2,26	2,78	3,17	4,48	70	2,009	2,399	2,667	3,462
14	2,24	2,74	3,12	4,37	80	2,003	2,389	2,655	3,439
15	2,22	2,71	3,08	4,28	90	1,998	2,382	2,646	3,423
16	2,20	2,68	3,04	4,20	100	1,994	2,377	2,639	3,409
17	2,18	2,66	3,01	4,13	∞	1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,17	2,64	2,98	4,07					

Interpolarea liniară după argumentul n poate da erori de pină la 10^{-2} .
Pentru $n > 100$ se poate folosi relația (precizie 10^{-3}).

$$t^*(n, \alpha) = t^*(\infty, \alpha) + \frac{t^*(100, \alpha) - t^*(\infty, \alpha)}{n} \times 100$$

12.5.6. NUMĂRUL NECESAR DE MĂSURĂRI [6]

Pentru atingerea unui interval de încredere avînd limita ε la măsurarea unei mărimi m , adică

$$|m - \bar{x}| < \varepsilon$$

se poate estima numărul necesar de măsurări, dacă se adoptă apriori o valoare pentru raportul $q = \varepsilon/s$, în care s este abaterea medie pătratică a datelor obținute prin măsurări. Pentru un nivel de încredere α și diverse valori q , numărul n necesar de măsurări se obține din tabelul 12.8.

Tabelul 12.8

Valorile raportului q , pentru determinarea numărului necesar de măsurări

$q \backslash \alpha$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

12.5.7. PROPAGAREA ERORILOR DE MĂSURARE

Adeseori se întâmplă ca o mărime să nu poată fi măsurată direct, ci să se determine prin calcul, cu ajutorul valorilor a două sau mai multe mărimi măsurate. De exemplu, acesta este cazul determinării tensiunilor principale și direcțiilor principale pentru o stare plană de solicitare. În astfel de situații se spune că mărimea respectivă a fost măsurată indirect.

Dacă mărimea u se determină prin măsurarea valorilor lui x, y, v, \dots , adică dacă

$$u = u(x, y, v, \dots) \quad (12.35)$$

este necesar să se poată face o estimare a preciziei de determinare a mărimii u cunoscând preciziile cu care s-au determinat mărimile x, y, v, \dots .

Pentru cazul când mărimile x, y, v, \dots sînt măsurate independent, dispersia s_u^2 a mărimii u este dată de relația [8]

$$s_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 s_v^2 + \dots \quad (12.36)$$

în care $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 \dots$ sînt pătratele derivatelor parțiale ale funcției $u(x, y, v, \dots)$ în raport cu variabilele x, y, v, \dots , iar $s_x^2, s_y^2, s_v^2, \dots$ sînt dispersiile rezultatelor măsurărilor mărimilor x, y, v, \dots .

Pentru diverse forme particulare ale funcției (12.35), se dau în tabelul 12.9 expresiile mediei aritmetice \bar{u} și abaterii medii pătratice s_u ale mărimii u funcție, de valorile corespunzătoare ale variabilelor x, y, v, \dots .

Tabelul 12.9

Expresiile mediei aritmetice \bar{u} și ale abaterii medii pătratice s_u pentru diverse forme ale funcției $u(x, y, v, \dots)$

$u(x, y, v, \dots)$	\bar{u}	s_u
$u = \pm x \pm y \pm v \pm \dots$	$\pm \bar{x} \pm \bar{y} \pm \bar{v} \pm \dots$	$\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_v^2 + \dots}$
$u = (x)^{\pm 1} \cdot (y)^{\pm 1} \cdot (v)^{\pm 1} \dots$	$(\bar{x})^{\pm 1} \cdot (\bar{y})^{\pm 1} \cdot (\bar{v})^{\pm 1} \dots$	$u \sqrt{\left(\frac{s_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{s_v}{\bar{v}}\right)^2 + \dots}$
$u = Kx^\xi$	$K\bar{x}^\xi$	$\xi \frac{\bar{u}}{\bar{x}} s_x$

12.5.8. DETERMINAREA CELOR MAI FAVORABILE CONDIȚII PENTRU MĂSURĂRI [8]

Relația (12.36) poate fi folosită pentru obținerea unor indicații prețioase privind cele mai bune condiții în care trebuie să se efectueze o măsurare.

Dacă este necesar să se determine mărimea u astfel încât abaterea medie pătratică s_u să nu depășească o anumită limită, presupunând că x, y, v, \dots se determină în condiții de egală precizie, atunci din relația (12.36) se pot determina valorile maxime admisibile ale lui s_x, s_y, s_v, \dots . Prin urmare se va putea preciza care dintre mărimile care se măsoară se vor putea determina cu o precizie mai mică, care trebuie măsurată cu o precizie mai mare și dacă metoda de măsurare și aparatura ce urmează să se utilizeze sînt sau nu adecvate scopului urmărit.

12.6. METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

12.6.1. FORMULAREA METODEI [6], [8], [10]

Metoda celor mai mici pătrate are numeroase aplicații în prelucrarea matematică a datelor experimentale. În cele ce urmează se fac referiri numai la cea mai importantă aplicație a acestei metode și anume determinarea celei mai bune funcții — de un anumit tip — pentru reprezentarea valorilor unor mărimi determinate experimental.

Dacă pentru cercetarea unui anumit fenomen s-a determinat experimental dependența variabilei y de variabila x prin efectuarea de măsurări asupra acestora, se pune adeseori problema găsirii unei reprezentări analitice care să exprime rezultatele experimentului, sub forma unei funcții $y = y(x)$.

Deoarece determinările valorilor mărimilor x și y au fost afectate de erori aleatorii, este imposibilă și lipsită de sens alegerea unei formule $y = y(x)$ care ar descrie toate cele N valori determinate experimental.

Un același ansamblu de date experimentale se poate descrie printr-o varietate oarecare de tipuri de funcții $y(x)$. *Metoda celor mai mici pătrate nu indică cea mai bună formă de funcție $y(x)$ pentru reprezentarea datelor experimentale.* Ea permite determinarea valorilor celor mai probabile ale coeficienților ce intră într-o funcție aleasă apriori pe baza unor considerente teoretice sau de altă natură privind fenomenul ce se studiază [8].

Dacă funcția $y(x)$ este aleasă sub forma

$$y = y(x; a_0, a_1, \dots, a_k) \quad (12.37)$$

în care parametrii a_0, a_1, \dots, a_k sînt niște constante, metoda celor mai mici pătrate permite obținerea unor estimații nedeplasate, consistente și eficiente ale acestora (§ 12.5.3, a) pe baza măsurărilor valorilor y_1, y_2, \dots, y_N ale funcției (12.37), dacă acestea sînt independente și dacă au o repartiție normală [6].

Dacă măsurările s-au efectuat în condiții de egală precizie, parametrii a_0, a_1, \dots, a_k se determină din condiția ca expresia

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i; a_0, a_1, \dots, a_k)]^2 \quad (12.38)$$

să fie minimă, ceea ce duce la sistemul liniar de ecuații

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \quad (12.39)$$

În expresia (12.38) sumarea se face pentru toate cele N perechi de valori y_i, x_i determinate experimental.

12.6.2. DETERMINAREA PARAMETRILOR FORMULELOR UZUALE

Se presupune că numai determinările valorilor y_i au fost afectate de erori (sau că erorile valorilor x_i sînt mult mai mici decît cele ale valorilor y_i).

În tabelul 12.10 se dau expresiile parametrilor a_0, a_1, \dots, a_k ai unor forme uzuale de funcții $y(x)$ [8]. Pentru toate cazurile sumele se fac de la $i = 1$ la $i = N$.

Tabelul 12.10

Expresiile parametrilor unor forme uzuale de funcții $y(x)$

$y=y(x; a_0, a_1, \dots, a_k)$	a_0, a_1, \dots, a_k
$y = a_1 x$	$a_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$
$y = a_0 + a_1 x$	$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$ $a_1 = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$
$y = a_1 x + a_2 x^2$	$a_1 = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 y_i \sum x_i^3}{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2}$ $a_2 = \frac{\sum x_i^2 y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i^3}{\sum x_i^2 \sum x_i^4 - (\sum x_i^3)^2}$

Observații :

1. Pentru determinarea parametrilor unei funcții $y(x)$ avînd forma unui polinom de grad mai mare decît doi, este mai comod pentru calcule să se utilizeze polinoamele ortogonale ale lui Cebîșev [6].

2. Determinarea parametrilor ce intră neliniar în funcția $y(x)$ se face de obicei prin efectuarea unei schimbări de variabile care să ducă la liniarizarea acesteia. Valorile obținute în acest mod sînt aproximative, deoarece se încalcă principiul celor mai mici pătrate.

Dacă pentru reprezentarea analitică a unui șir de valori x_i, y_i determinate experimental, s-au utilizat două forme diferite ale funcției (12.37), se pune întrebarea care dintre cele două funcții asigură o concordanță mai bună cu datele experimentale. Pentru aceasta se aplică criteriul de concordanță al lui Gauss, care constă în calcularea expresiei [8]

$$\Omega = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^* - y_i)^2}{N - k} \quad (12.40)$$

unde :

- y_i^* este valoarea măsurată de rang i ;
- y_i — valoarea calculată cu ajutorul funcției obținute prin metoda celor mai mici pătrate, corespunzătoare rangului i ;
- N — numărul perechilor de valori x_i, y_i^* măsurate ;
- k — numărul parametrilor a_0, a_1 , etc. ai funcției $y(x)$ utilizate.

Dintre două sau mai multe funcții $y(x)$ utilizate pentru reprezentarea valorilor măsurate, cea mai adecvată este cea pentru care expresia (12.40) are valoarea cea mai mică.

12.7. PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE ÎN CAZUL REPARTIȚIILOR MULTIDIMENSIONALE

12.7.1. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Variabilă aleatorie n — dimensională x este un sistem ordonat de n variabile aleatorii reale x_1, x_2, \dots, x_n . Dacă \vec{X} este un vector aleatoriu n — dimensional, atunci variabilele aleatorii reale x_1, x_2, \dots, x_n sînt componentele vectorului \vec{X} [9].

Metodele de prelucrare statistico-matematică a rezultatelor măsurărilor ce sînt considerate ca șiruri statistice de valori ale unei variabile aleatorii multidimensionale urmăresc obținerea informațiilor asupra [11] :

- interdependenței dintre diferiți parametri ;
- influenței pe care o are cunoașterea valorilor luate de unii parametri asupra valorilor celorlalți parametri.

În construcția de mașini apar astfel de situații cînd se studiază fenomene dinamice și în special vibrații.

Dacă în cadrul unui fenomen ce se studiază experimental știm că y este o funcție de x și de alte variabile necunoscute, se pune problema determinării dependenței lui y de x cu un nivel de încredere cît mai ridicat. În acest scop se aplică metode de analiză a corelației.

Noțiunea de corelație se utilizează cînd dependența reciprocă dintre diverși factori, atribute sau caracteristici ale unui fenomen este numai parțială.

Studiul influenței pe care o are cunoașterea valorii pe care a luat-o variabila y asupra valorilor variabilei x se face cu ajutorul regresiei.

12.7.2. CORELAȚIA

Dacă între variabilele x și y există o corelație și nu o legătură funcțională, nu se mai poate pune problema determinării „cele mai bune” valori a lui y care corespunde unei valori a lui x , ci se poate estima numai cea mai probabilă valoare a lui y în jurul căreia pot fi distribuite valorile determinate experimental. Cu cît valorile măsurate sînt mai apropiate de valoarea cea mai probabilă, cu atît relația dintre x și y este mai bine precizată, acest postulat stînd la baza evaluării cantitative a gradului de corelație [8].

Coeficientul corelației simple de sondaj, care indică intensitatea interdependențelor dintre variabilele aleatorii normale x , y , este definit prin relația [11]

$$R_{x,y} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}} \quad (12.41)$$

în care x_i , y_i sînt perechile de valori determinate experimental, iar n numărul acestor perechi.

Valorile limită ale lui $R_{x,y}$ sînt 0 și ± 1 . Cu cît valoarea coeficientului de corelație este mai apropiată de 1, cu atît legătura dintre cele două variabile x și y este mai puternică și invers; dacă valoarea $R_{x,y}$ se apropie de zero. Un coeficient de corelație negativ este, de fapt, un coeficient pozitiv pentru corelația inversă.

În cazul existenței mai multor variabile aleatorii, ca indicator al interdependenței dintre două variabile, în cazul cînd una sau mai multe dintre celelalte variabile sînt considerate constante, se utilizează coeficientul corelației parțiale de sondaj, definit prin relația [11]

$$R_{x_2 y, x_1} = \frac{R_{x_2, y} - R_{x_1, y} \cdot R_{x_1, x_2}}{\sqrt{(1 - R_{x_1, y}^2)(1 - R_{x_1, x_2}^2)}} \quad (12.42)$$

în care x_1 este variabila considerată constantă, iar R_{x_1, x_2} , $R_{x_1, y}$, $R_{x_2, y}$ sînt coeficienții corelațiilor simple de sondaj dintre variabilele x_1 , x_2 , y , luate două cîte două.

12.7.3. REGRESIA

Dacă s-au determinat experimental n perechi de valori x_i, y_i ale variabilelor aleatorii x și y , funcția de regresie a lui y în raport cu x este $y = y(x)$ și reprezintă media valorilor pe care le ia variabila y pentru o anumită valoare a lui x . Dacă

$$y = a_0 + a_1 x, \quad (12.43)$$

regresia este liniară. În acest caz

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x},$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (12.44)$$

în care \bar{x} și \bar{y} sînt mediile aritmetice de sondaj ale șirurilor de date x_i , respectiv y_i și se calculează cu relația (12.9).

12.8. EXEMPLE DE CALCUL. CONCLUZII

Pentru ilustrarea principalelor etape ale prelucrării datelor experimentale, se prezintă în continuare două exemple de calcul pentru măsurări efectuate cu traductoare tensometrice rezistive.

Exemplul 1. S-au efectuat măsurări pe distribuitorul unei centrale hidroelectrice solicitat cu presiune interioară, amplasarea punctelor de măsurare fiind cea din figura 12.6.

S-au utilizat cinci rozete dreptunghiulare cu cîte trei traductoare, cu baza 6 mm, tip 6/120 RE11, fabricație Hottinger Baldwin Messtechnik și o punte Vishay tip P-350 A, cu două cutii de comutare-echilibrare tip SB-2.

S-au făcut citiri la puntea tensometrică pentru două cicluri de încărcare-descărcare, definite prin presiunile

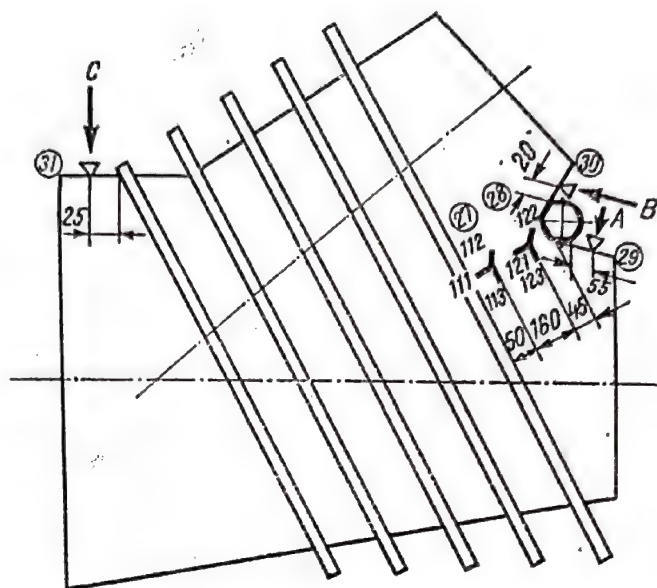
$$0 - 22,8 - 42,8 - 22,8 - 0 - 22,8 - 0 \text{ atm,}$$

citiri care sînt prezentate în tabelul 12.11.

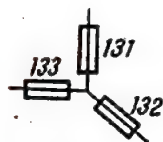
Pentru a putea lua în considerare efectele neliniare ale elementelor de etanșare nemetalice, ale jocurilor și frecărilor din reazemele distribuitorului și conductei forțate cu care acesta era asamblat, deși materialul a fost solicitat în stadiul elastic, s-a adoptat pentru funcția $\varepsilon(p)$, a dependenței deformațiilor specifice ε de presiunea interioară p , (care definește starea de solicitare a distribuitorului) un polinom de gradul doi, de forma

$$\varepsilon(p) = a_1 p + a_2 p^2, \quad (12.45)$$

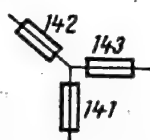
în care parametrii a_1 și a_2 se calculează cu relațiile de pe ultima linie a tabelului 12.10, înlocuind y cu ε , iar x cu p . În acest mod fiecărui tra-



Vedere din A
Punctul 29
de măsurare



Vedere din B
Punctul 30
de măsurare



Vedere din C
Punctul 31
de măsurare

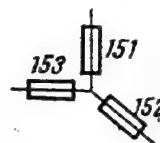


Fig. 12.6.

Tabelul 12.11

Punct de măsurare nr.	Traductor nr.	Citiri la puntea tensometrică $\mu\text{m/m}$						
		Presiunea atm.						
		0	22,8	42,8	22,8	0	22,8	0
27	111	255	436	590	449	251	435	247
	112	148	189	222	190	145	186	145
	113	234	154	92	154	236	157	235
28	121	144	203	253	204	145	202	145
	122	120	135	147	137	121	135	121
	123	75	44	11	36	68	39	68
29	131	141	182	219	184	141	182	140
	132	120	153	178	154	120	151	120
	133	91	106	117	110	93	107	93
30	141	161	222	273	222	160	221	161
	142	177	257	318	256	172	250	174
	143	171	250	310	247	164	246	162
31	151	193	284	365	290	188	248	189
	152	139	189	239	194	135	190	131
	153	117	123	131	125	117	125	117

ductor i se atașează o parabolă $\varepsilon(p)$, definită prin valorile parametrilor a_1, a_2 corespunzători.

Deoarece numărul de citiri pentru fiecare traductor este foarte mic, nu se pot îndeplini condițiile (12.24) pentru fiecare traductor în parte și prelucrarea datelor experimentale s-a făcut pentru toate traductoarele, concluziile ce se vor formula fiind aprecieri globale, cantitative și calitative, asupra măsurării în ansamblu.

În acest scop, s-au determinat pentru fiecare traductor abaterile relative ξ_i ale valorilor ε_i citite la presiunea p_i , față de valorile corespunzătoare de pe parabola (12.45), adică [1]

$$\xi_i = \left(\frac{\varepsilon_i}{a_1 p_i + a_2 p_i^2} - 1 \right) \times 100 \text{ [\%]}. \quad (12.46)$$

De asemenea s-au definit abaterile relative ξ_j^0 ale citirilor de zero (pentru $p = 0$)

$$\xi_j^0 = \frac{C_j^0 - C_{j+1}^0}{a_1 p_{\max j} + a_2 p_{\max j}^2} \times 100 \text{ [\%]}, \quad (12.47)$$

în care :

- C_j^0 și C_{j+1}^0 — citirile de zero pentru ciclul j de încărcare-descărcare ;
- $p_{\max j}$ — valoarea maximă a presiunii p , la care s-au făcut măsurări în decursul ciclului j ;
- a_1, a_2 — parametrii parabolei $\varepsilon(p)$, pentru traductorul considerat.

Definind un ciclu de încărcare-descărcare ca ansamblul treptelor de aplicare a sarcinilor (pentru care s-au făcut citiri la puntea tensometrică) între două stări de zero (de referință), atunci pentru fiecare citire la puntea tensometrică se determină două valori ale abaterii ξ_i : una față de citirea de zero inițială (abaterea ξ_i' la încărcare) și una față de citirea de zero finală (abaterea ξ_i'' la descărcare). Abaterile citirilor de zero ξ_j^0 , se determină câte una pentru fiecare ciclu, pentru fiecare traductor.

Citirile la puntea tensometrică pentru care au rezultat abateri ξ și ξ^0 în afara intervalului de $\pm 15 \%$ s-au considerat afectate de erori grosolane și au fost eliminate. Apoi s-au recalculat parametrii a_1 și a_2 ai parabolilor $\varepsilon(p)$ și abaterile ξ_i, ξ_j^0 față de noua parabolă. Calculul s-a repetat pînă cînd pentru toate citirile rămase și pentru toate traductoarele abaterile s-au încadrat în limitele $\pm 15 \%$.

În acest proces s-au eliminat 10 abateri din totalul celor 150 inițiale, astfel încît prelucrarea s-a făcut pentru cele 140 valori ale abaterilor ξ_i, ξ_j^0 rămase.

Valorile obținute pentru parametrii a_1, a_2 ai parabolilor atașate celor 15 traductoare sînt date în tabelul 12.12.

În acest fel, pentru fiecare traductor, se pot calcula deformațiile specifice ε pentru valorile dorite ale lui p . Apoi se pot determina în fiecare

Tabelul 12.12

Traductor nr.	a_1	a_2	Traductor nr.	a_1	a_2
111	8,70072	-0,01932	133	0,74200	-0,00369
112	1,96240	-0,00463	141	2,74458	-0,00271
113	-3,71552	0,00875	142	3,71785	-0,00853
121	2,58519	-0,00117	143	3,86965	-0,01262
122	0,70205	-0,00194	151	4,12796	-0,00119
123	-1,22781	-0,00434	152	2,47675	-0,00219
131	1,84889	-0,00062	153	0,37798	-0,00119
132	1,52122	-0,00388			

punct de măsurare deformațiile specifice principale, direcțiile principale ale solicitării, tensiunile principale și eventual tensiunile echivalente, după teoria de rezistență considerată ca cea mai adecvată.

Verificarea normalității repartiției abaterilor s-a făcut prin aplicarea testului χ^2 (§ 12.5.2, c).

În acest scop datele s-au grupat în 10 clase de amplitudini egale. Deoarece clasele extreme aveau mai puțin de 5 date s-au contopit astfel încât în final, au rezultat 7 clase conținând următoarele numere de date 9, 6, 27, 48, 29, 14, 7. Pentru testul χ^2 s-a obținut valoarea $\chi^2 = 11,5981$, care comparată cu valoarea critică, egală cu 14,9, din tabelul 12.2, pentru $v = 4$ grade de libertate și un nivel de încredere $\alpha = 0,995$, rezultă că repartiția este normală.

S-au calculat apoi valorile următorilor parametri ai șirului abaterilor ξ și s-au obținut valorile (§ 12.3.4 și relațiile (12.9) — (12.19)) :

— media aritmetică

$$\bar{x} = 0,04384 \% ;$$

— valoarea centrală

$$x_c = 0,88169 \% ;$$

— abaterea medie pătratică

$$s = 3,70156 \%$$

— dispersia

$$s^2 = 13,70155 (\%)^2$$

— amplitudinea

$$\bar{R} = 24,903915 \%$$

— coeficientul de variație

$$C_v = 84,43339.$$

În aceste condiții, avînd în vedere cele arătate la § 12.5.3,b și la § 12.5.4, a, estimațiile punctuale ale adevăratei valori a abaterilor ξ și a dispersiei acestora vor fi $\bar{x} = 0,04384 \%$, respectiv $s^2 = 13,70155 (\%)^2$.

Exemplul 2. Pentru măsurarea sarcinilor pe roțile unui excavator cu roată cu cupe ce se deplasa pe o cale de rulare formată din două șine, s-au realizat o serie de captoare de tipul prezentat în paragraful 3.5.4, pagina 176.

Un astfel de captor s-a obținut prin montarea a opt traductoare tensometrice rezistive tip RC 120, fabricație Mikrotehna—RSC, pe un cupon de șină de cale ferată tip 49.

În vederea etalonării, captorul a fost montat într-o presă hidraulică de 600 kN, tip MB 60, fabricație WPM — RDG și i s-au aplicat cinci cicluri de încărcare și anume :

— 3 cicluri de forma :

0 — 20 — 40 — 60 — 80 — 100 — 120 — 140 — 160 — 180 — 200 kN,

— 2 cicluri de forma :

0 — 50 — 100 — 150 — 200 — 250 kN.

Citirile la puntea tensometrică (tip MK, fabricație HBM) corespunzătoare celor 5 cicluri de încărcare au fost cele din tabelul 12.13.

Tabelul 12.13

Forța P_i kN	Citiri la puntea tensometrică ε_i $\mu\text{m/m}$		
20	134	131	129
40	282	281	282
60	432	432	432
80	581	582	583
100	732	733	732
120	886	883	884
140	1040	1040	1040
160	1199	1200	1203
180	1360	1362	1415
200	1522	1528	1525
50	354	351	
100	734	729	
150	1108	1122	
200	1497	1500	
250	1894	1905	

Avînd în vedere condițiile în care s-a făcut etalonarea, s-a apreciat că determinarea constantei captorului trebuie să se facă considerînd perechile de valori ε_i , P_i determinate experimental, ca o repartitie bidimensională a erorilor de măsurare. Aceasta înseamnă că atât citirile ε_i la puntea tensometrică cît și P_i la presa hidraulică au fost considerate ca fiind afectate de erori.

Înlocuind în relația (12.41) pe x_i cu P_i și pe y_i cu ε_i , s-a calculat coeficientul corelației simple de sondaj pentru cele 40 perechi de valori ε_i , P_i din tabelul 12.13. S-a obținut $R_{P,\varepsilon} = 0,9997$, valoare care este foarte aproape de 1, ceea ce indică o bună interdependență între variabilele aleatorii P , ε .

Funcția de regresie liniară a lui ε în raport cu P va fi în acest caz (analog cu relația (12.43))

$$\varepsilon = a_0 + a_1 P, \quad (12.48)$$

unde : a_2 și a_1 se calculează cu (12.44), în care s-au introdus mediile aritmetice de sondaj ale celor două șiruri de date ε_i , respectiv P_i și anume

$$\bar{\varepsilon} = 893,975 \mu\text{m/m} \text{ și } \bar{P} = 120 \text{ kN.}$$

S-a obținut, în final,

$$\varepsilon = -33,11068 + 7,72571P \text{ } \mu\text{m/m.} \quad (12.49)$$

Faptul că dreapta (12.49) nu trece prin origine pune în evidență o eroare sistematică P_0 la măsurarea forțelor P_i , ca urmare a frecărilor dintre pistonul și cilindrul preseii, precum și a greutății cuponului de șină din care a fost realizat captorul.

Dacă determinarea constantei captorului se face în ipoteza că numai citirile la puntea tensometrică au fost afectate de erori și se admite o dependență liniară, de forma

$$\varepsilon = kP,$$

în care (conform tabelului 12.10, prima linie)

$$k = \frac{\sum \varepsilon_i P_i}{\sum P_i^2},$$

rezultă $k = 7,51039 \text{ } \mu\text{m/m kN}$, valoare ce este cu 2,867 % mai mică decât cea a parametrului a_1 din relația (12.49) a regresiei lui ε în raport cu P .

BIBLIOGRAFIE

1. BLUMENFELD, M., BUGA, M., CONSTANTINESCU, I., VOICU, C., GHEORGHIU, H., *Considerații asupra prelucrării și interpretării rezultatelor măsurărilor tensometrice rezistive*, Buletinul Institutului politehnic București, tomul 37, nr. 1, 1975.
2. DEFIX, A., *Erreurs de mesurage* (R570), Paris, Dunod, 1960.
3. DIETER, G. E., *Metalurgie mecanică*, București, Editura tehnică, 1970.
4. MOTHES, J., *Mesure et statistique* (R560, R562), Paris, Dunod, 1960.
5. PLĂCINȚEANU, I., *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*, București, Editura tehnică, 1957.
6. RUMȘISKI, L. Z., *Prelucrarea matematică a datelor experimentale*, București, Editura tehnică, 1974.
7. TIRON, M., *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici pătrate*, București, Editura tehnică, 1972.
8. WORTHING, A. G., GEFFNER, J., *Prelucrarea datelor experimentale*, București, Editura tehnică, 1959.
9. * * * STAS 1839 — 72, *Teoria probabilităților — Terminologie și simboluri*.
10. * * * STAS 2631 — 72, *Statistică matematică — Terminologie și simboluri*.
11. * * * STAS 7122 — 72, *Statistică matematică — Prezentarea și prelucrarea datelor experimentale și de observație*.

INTRODUCERE ÎN ANALIZA TENSIUNILOR PRIN ELEMENTE FINITE

Dr. ing. I. PASCARIU

13.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Progresele tehnicii din ultimele trei decenii au revelat tot mai pregnant imposibilitatea de a obține soluții matematice riguroase în multe probleme ingineresti. În aceeași perioadă de timp, dezvoltarea impetuoasă a mașinilor electrice cu viteză mare de calcul a generat un interes crescând pentru utilizarea metodelor numerice la soluționarea problemelor complexe ale ingineriei. Drept urmare, multe dintre metodele numerice de „modă veche” ce se dezvoltaseră înainte de era calculatoarelor au fost „acomodate” rînd pe rînd, spre a fi folosite în noile mașini. În această categorie intră analiza numerică prin diferențe finite, metodele reziduale și metodele variaționale. Dar cu toate progresele vădite în utilizarea acestor tehnici de calcul numeric în calculatoarele electronice digitale, soluționarea problemelor în mecanica structurilor continua să întîmpine dificultăți de netrecut. Acestea apăreau în urmă utilizării materialelor neomogene, cu comportare neliniară, cît și din cauza neregularităților geometrice ale structurilor mecanice, complexității sarcinilor exterioare și condițiilor la limită.

Analiza prin elemente finite este un produs al erei calculatoarelor electronice digitale. Nu a existat înainte. S-a născut în această eră și a progresat uimitor de repede, ca și calculatoarele înseși. A început ca o metodă numerică de analiză a tensiunilor în mecanica corpurilor deformabile și, deși continuă să fie utilizată cel mai mult în acest domeniu, aria utilizărilor ei s-a lărgit considerabil și va continua, fără îndoială, să se extindă tot mai mult incluzînd, spre rezolvare, o mare varietate de probleme, altele decît cele din mecanica structurilor. Printre ramurile tehnicii în care analiza prin elemente finite a dobîndit deja o mare răspîndire sînt de exemplificat, în primul rînd, cele cu probleme la limită, ca fiind de cea mai mare dificultate, cum sînt: transmisia căldurii, dinamica percolărilor, hidrodinamica, hidraulica, mecanica rocilor și a solurilor, tehnica nucleară.

Capitolul de față se limitează la analiza tensiunilor prin elemente finite în mecanica structurilor, revelînd conceptele de bază ale acestei analize. Ele sînt prezentate în cea mai simplă formă posibilă, cu convingerea că de îndată ce conceptele de bază ale analizei prin elemente finite

sînt înțelese în termeni simpli, interesul pentru rezolvarea problemelor ingineresti specifice va stimula eforturile în direcția adîncirii cunoștințelor fundamentale și a soluționării celor mai complicate probleme. După anul 1960 au apărut cărți cît și un imens număr de alte publicații care discută variatele aspecte ale analizei tensiunilor prin elemente finite în mecanica structurilor. Citarea tuturor acestora ar putea constitui o carte cu multe sute de pagini.

Esența analizei tensiunilor prin elemente finite o constituie înlocuirea corpului deformabil, respectiv a continuumului real printr-un sistem structural articulat ale cărui subregiuni sînt numite elemente finite și care, de fapt, sînt părți componente ale aceluși corp. Se poate deci vorbi de o structură de elemente finite ce substituie structura reală. Astfel, grinda cu zăbrele poate fi privită ca un sistem structural alcătuit din elemente finite unidimensionale ce corespund barelor îmbinate prin articulații ce formează așa-numitele puncte nodale sau, simplu, nodurile elementelor. Elementele pot fi definite și în sisteme de coordonate bi și tridimensionale, cum sînt: triunghiul, patrulaterul, tetraedrul, prisma dreaptă, hexaedrul torul triunghiular, torul patrulater ș.a. Alegerea unui anumit element finit, pentru rezolvarea unei probleme specifice, depinde în mare măsură de competența și experiența inginerului. În general, profilul elementului trebuie să descrie cît mai bine posibil geometria întregului a cărui parte componentă este.

Un element este deci o regiune bine definită a corpului, dar nu numai atît. Este necesar ca proprietățile elementului să fie în mod adecvat formulate astfel încît acesta să aibă o funcționalitate dependentă de restricțiile impuse prin comportamentul întregului din care face parte. Formularea corectă a acestor proprietăți se face prin intermediul metodelor matriceale cunoscute din mecanica structurilor. Algebra matriceală și calculatoarele electronice digitale sînt cele două verigi de bază prin intermediul cărora analiza tensiunilor prin elemente finite a cunoscut impetuoasă dezvoltare în cadrul căreia inginerii și-au formulat simplu problemele, rezolvîndu-le repede și cu precizia dorită.

Formularea proprietăților elementelor finite, ca parte a unui întreg, constituie punctul de plecare în rezolvarea problemei și se bazează pe cunoașterea precisă a caracteristicilor geometrice și mecanice a fiecărui element în parte, cît și pe evaluarea, tot prin calcul separat pentru fiecare element, a forțelor nodale (forțe și cupluri). În componența forțelor nodale intră două tipuri de forțe și anume: forțe concentrate preluate de către noduri și transmise elementului, și forțe transmise în noduri de către elementul însuși. Acestea din urmă sînt cauzate de sarcinile distribuite de-a lungul elementului și de solicitările datorite temperaturii, inexactităților de montaj și altor cauze. Pe scurt, forțele nodale se exprimă fie direct prin componentele lor, fie indirect, prin intermediul deplasărilor nodale, (săgeți și rotații).

Admițînd o comportare elastică a elementului, relația de echilibru este de forma

$$\{r\}_e + \{r\}_p + \{r\}_T + \{r\}_{\sigma_0} = [k] \{\delta\}_e \quad (13.1)$$



în care $\{r\}_e$ reprezintă forțele aplicate în noduri, $\{r\}_p$ este matricea forțelor transmise de element în noduri și cauzate de sarcinile distribuite, $\{r\}_T$ reprezintă forțele în noduri cauzate de temperatură și inexactități de montaj, $\{r\}_{\sigma_0}$ este matricea componentelor forțelor nodale datorite tensiunilor remanente și altor cauze, $\{\delta\}_e$ formează vectorul deplasărilor nodale ale elementului, iar $[k]$ este matricea de rigiditate a elementului. Asamblarea tuturor elementelor finite are ca echivalent ecuația

$$\sum_{n=1}^m (\{r\}_{e,n} + \{r\}_{p,n} + \{r\}_{T,n} + \{r\}_{\sigma_0,n}) = \left(\sum_{n=1}^m [k]_n \right) \{\delta\}$$

încît, notînd membrul întîi cu $\{R\}$, se obține

$$\{R\} = [K] \{\delta\}. \quad (13.2)$$

Prin substituirile făcute, în mod tacit s-a presupus că matricele $[k]_n$, $\{r\}_{e,n}$, $\{r\}_{p,n}$, $\{r\}_{T,n}$ și $\{r\}_{\sigma_0,n}$ au fost extinse la dimensiunea structurii întregi, că în acest proces de extindere termenii au fost rearanjați în așa fel încît să corespundă cu termenii din matricea $\{\delta\}$ a deplasărilor nodale. Procedul de asamblare, respectiv de „extindere” de la dimensiunea elementului la dimensiunea structurii și apoi de „rearanjare” a matricelor respective nu este tipic analizei prin elemente finite și nici inedit. Procedul este de mult folosit în analiza circuitelor electrice interconectate, sau în analiza rețelelor complexe de conducte ce transportă fluide tehnologice.

Numărul deplasărilor nodale din $\{\delta\}$ corespunde cu numărul gradelor de libertate al întregului sistem structural; la rîndul său, acest număr este egal cu suma gradelor de libertate ale tuturor punctelor nodale ale sistemului. Dacă proprietățile elementelor sînt adecvat formulate în matricea $[K]$, deplasările nodale $\{\delta\}$ vor aproxima suficient de bine pe cele ale structurii originale. Determinînd valorile deplasărilor din relația

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{R\}$$

în continuare se pot obține atît deformațiile cît și tensiunile, cu ajutorul relațiilor din elasticitate (v. cap. 1).

În expunerea anterior făcută, au fost revelate trei concepte de bază ale analizei tensiunilor prin elemente finite și anume: deplasările nodale, forțele nodale și matricea de rigiditate a elementului. Nu este însă acesta unicul mod de a pune și rezolva o problemă cînd aceasta se rezolvă prin elemente finite. În general, problema poate fi rezolvată printr-una din următoarele trei căi. Prima cale o formează metoda deplasărilor, despre care s-a vorbit în parte și în care deplasările nodale sînt necunoscutele problemei. A doua cale este alegerea tensiunilor ca necunoscute, în care caz se vorbește de metoda de echilibru. În cea de a treia opțiune, este vorba de o metodă mixtă în care se aleg ca necunoscute atît unele deplasări

nodale cât și unele tensiuni. În acest capitol va fi expusă doar metoda deplasărilor, fiind cea mai preferată în rezolvarea problemelor practice.

Cel mai mult, analiza prin elemente finite este folosită în cazul sarcinilor statice. De fapt, cu excepția oboselii materialelor prin solicitări variabile în timp, orice altă problemă din mecanica corpurilor deformabile este soluționabilă prin analiza cu elemente finite, dintre care se citează: învelișuri de orice fel, structuri cu concentratori de tensiuni, baraje, elemente solicitate la flambaj, piese solicitate dinamic (inclusiv analiza solicitărilor seismice), structuri cu comportare neliniară a materialului (în domeniul plastic și în condiții de fluaj).

Pentru a rezolva astfel de probleme, inginerul trebuie să le cunoască formularea teoretică din manualele clasice. El trebuie, de asemenea, să aibă cunoștințe generale de statică, dinamică și rezistența materialelor, de algebră matriceală, analiză numerică și calcul variațional. El trebuie să fie versat în elaborarea programelor de calculator în limbajul FORTRAN, în utilizarea subrutinelor și fișierelor pe disc, precum și să aibă abilitatea de a folosi eficient și optim capacitatea de memorizare disponibilă a mașinilor moderne de calcul.

În practică, un program de calculator bine construit are un rol esențial în analiza prin elemente finite a unei structuri, când spre exemplu se pregătește construirea prototipului acesteia sau se lucrează la optimizarea proiectării structurii respective. Pentru program, inginerul s-ar putea adresa unui bun analist din domeniul calculatoarelor, sau să lucreze în strînsă colaborare cu acesta. Este de reținut însă că o înțelegere confuză, din partea oricărui dintre colaboratori, a sistemului fizic privind „tehnicitățile” asociate cu specialitatea celuilalt, nu poate „convinge” și nici „forța” vreo mașină de calcul să dea răspunsuri corecte, oricît de perfecționată ar fi această mașină.

Pe de altă parte, aspectul fizic, intuiția, îndemînarea pentru programare scutesc pe inginer de multe și obositoare ore de calcule matematice, furnizîndu-i-se în schimb timp suplimentar pentru activitatea tehnică de creație. Or, tocmai aceasta este principala însușire caracteristică a analizelor prin elemente finite care a făcut ca această cale de rezolvare a celor mai dificile probleme să se bucure de o răspîndire crescîndă în lumea inginerilor. Mînuirea ușoară a conceptelor de bază, acceptarea sensului fizic în formularea caracteristicilor și proprietăților unui element finit, procedeul elementar de suprapunere a unor astfel de formulări, simplitatea operațiilor din algebra matriceală și adaptabilitatea acestora pentru lucru la calculatoarele digitale, toate, separat sau la un loc, pot fi înțelese fără fundamentări matematice de mare dificultate, acceptarea lor fiind plauzibilă sub aspect fizic. Se reamintește că în rezistența materialelor, de asemenea, studentul, inginerul acceptă unele concepte de bază și felurite interpretări ce justifică dezvoltările ulterioare, fără a recurge totdeauna la demonstrații matematice exacte. Dacă le dorește, el le află oricînd prin studii ulterioare pe care le întreprinde pe cont propriu. Un procedeu analog va fi folosit în cele ce urmează.

13.2. ELEMENTE DE ALGEBRĂ MATRICEALĂ UTILE ANALIZEI PRIN ELEMENTE FINITE

Sînt necesare cîteva definiții și un număr limitat de cunoștințe privind operațiile matriceale care, în esență, pleacă de la relațiile ce formulează sistemul general de ecuații liniare

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Sub formă matriceală, sistemul de ecuații precedent poate fi scris concentrat astfel

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

sau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

în care $[A]$ este matricea coeficienților, $\{x\}$ reprezintă matricea necunoscutelor, iar $\{b\}$ constituie matricea constantelor. Matricele de forma unei coloane de numere, ca matricele $\{x\}$ și $\{b\}$ se numesc vectori coloană, sau matrice coloană. Există și matrice în care elementele sînt aranjate orizontal, pe o singură linie

$$\{c\} = \{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n\}$$

ele fiind numite vectori liniari sau matrice liniare. Așadar, o matrice este un șir de numere, numite elemente, aranjate într-un tablou de formă dreptunghiulară avînd m linii și n coloane, elementele putînd fi nule, diferite de zero sau sub formă polinomială. Cînd $m = n$, se obține o matrice pătratică de ordinul n , ce este de un tip aparte, unic în felul său, putînd avea o reprezentare numerică numită determinant.

Tot ca definiție se include aici și aceea a matricei transpuse matricei $[A]$: se obține schimbînd liniile în coloane și coloanele în linii. Transpusa unei matrice $[A]$ este notată cu $[A]^T$; încît, dacă

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

atunci

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

În continuare se menționează operațiile matriceale ce sînt adesea întîlnite în practica analizelor cu elemente finite.

Adunarea (scăderea). Două matrice se pot aduna, sau scădea, dacă sînt compatibile, adică au dimensiuni de același ordin. Exemplu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

care, sub formă concentrată, se poate scrie

$$[A] + [B] = [C].$$

Scăderea se efectuează potrivit aceluiași reguli.

Înmulțirea. Două matrice se pot înmulți dacă sînt conforme, adică numărul coloanelor din prima matrice este egal cu numărul liniilor din a doua matrice, ceea ce este echivalent cu

$$[A]_{m \times n} [B]_{p \times r} = [C]_{m \times r}$$

cu $m = p$, iar $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n=p} a_{ik} b_{kj}$. Exemplu :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 10 + 6 & 1 + 18 + 9 \\ 20 + 30 + 14 & 5 + 54 + 21 \\ 36 + 50 + 22 & 9 + 90 + 33 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 16 & 20 \\ 27 & 33 \end{bmatrix}.$$

A rezultat că o matrice se înmulțește, sau se împarte cu un număr k , înmulțind, respectiv împărțind toate elementele acesteia prin k .

Transpusa unui produs. Această operație se efectuează potrivit cu relația care se exemplifică prin următoarea aplicație numerică :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 10 + 6 & 20 + 30 + 14 & 36 + 50 + 22 \\ 1 + 18 + 9 & 5 + 54 + 21 & 9 + 90 + 33 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 5 & 16 & 27 \\ 7 & 20 & 33 \end{bmatrix}.$$

Sumă de produse. În analiza prin elemente finite se întâlnește adesea expresia lucrului mecanic al forțelor exterioare sub forma sumei de produse dintre forțe și deplasări, după cum urmează

$$W = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$$

în care

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}.$$

Noțiunea de matrice transpusă este aici foarte utilă, putîndu-se scrie

$$W = \{F_1 \ F_2 \dots F_n\} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \{F\}^T \{\delta\} = \{\delta\}^T \{F\}.$$

Matrice asociată sau reciprocă. Matricea asociată sau reciprocă $[A^*]$ a matricei $[A]$ este matricea transpusă a matricei complementelor algebrice ale lui $[A]$. Ca aplicație numerică, fie matricea

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

căreia i se caută reciproca.

În primul rînd se precizează că $[A]$ trebuie să fie o matrice pătratică. Procedînd conform definiției, în prima etapă se obține

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 3 & -11 & 12 \\ 7 & -13 & 9 \\ -1 & 10 & -4 \end{bmatrix}^T$$

în care elementele matricei, respectiv complementele algebrice ale lui $[A]$, sînt minorii determinantului $|A|$ înmulțiți cu $(-1)^{i+j}$. În final, rezultă

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -11 & -13 & 10 \\ 12 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Prin evaluarea produsului matriceal

$$[A][A^*] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -11 & -13 & 10 \\ 12 & 9 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$$

se obține o matrice diagonală în care toate elementele de pe diagonala principală sînt egale cu valoarea determinantului

$$|A| = -(-2)(-1)(3) - (4)(2) + (-1)(3) + (3)(4)(3) = 19.$$

Aceasta este o proprietate generală a produsului unei matrice cu matricea asociată acesteia.

Inversa unei matrice. Sespune că $[A]^{-1}$ este matricea inversă a matricei pătratice de ordinul n , dacă

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

unde

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

este matricea unitate de ordinul n , definită ca o matrice diagonală avînd toate elementele de pe diagonala principală egale cu unitatea.

Matricea inversă se obține folosind relația

$$[A]^{-1} = \frac{[A^*]}{|A|}$$

dar există și alte metode pentru calculul acesteia, ca metoda Gauss-Jordan, metoda Choleski ș.a.

Dacă se consideră din nou matricea

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

atunci inversa acesteia este

$$[A]^{-1} = \frac{[A^*]}{|A|} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -11 & -13 & 10 \\ 12 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Pentru verificare, se obține

$$[A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -11 & -13 & 10 \\ 12 & 9 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13.3. BAZELE TEORETICE ALE ANALIZEI TENSIUNILOR PRIN ELEMENTE FINITE

În faza de inițiere, pentru a avea o înțelegere completă și solidă a analizei prin elemente finite, cea mai potrivită cale pare a fi startul de la o aplicație numerică simplă, căreia urmează să i se efectueze calculele cu mîna sau rigla de calcul și totodată să se asocieze acestui procedeu o formulare teoretică adecvată. În problema ce urmează, structura analizată este divizată în triunghiuri care formează elementele finite ale acesteia. În fig. 13.1 este arătată o structură plană, divizată în triunghiuri, fiecare nod avînd două grade de libertate (deplasări nodale), astfel încît fiecare element finit triunghiular are șase grade de libertate.

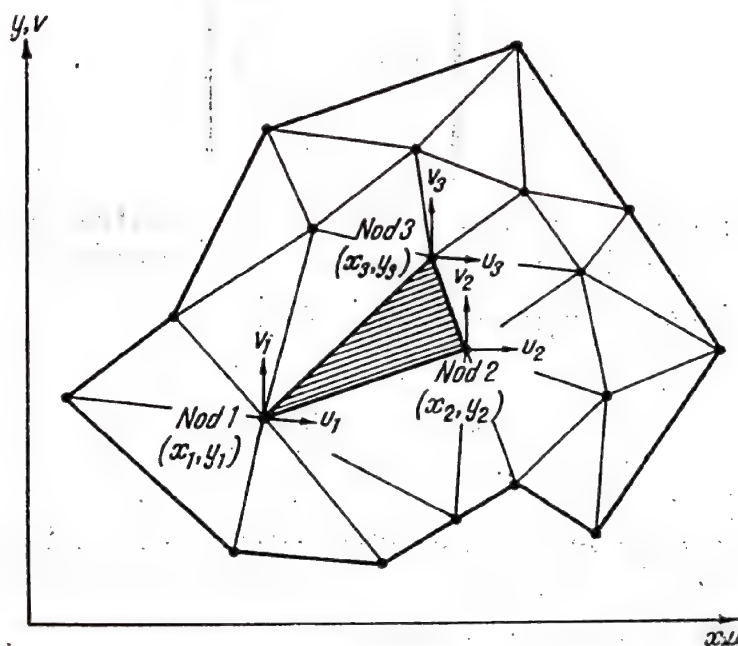


Fig. 13.1.

Matricea deplasărilor $\{\delta\}$ este alcătuită din necunoscutele problemei

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

în care cu litera u sînt notate deplasările în direcția x , iar cu v sînt exprimate deplasările în direcția y . În funcție de aceste deplasări nodale trebuie exprimat cîmpul $\{f\}$ al deplasărilor oricărui punct aparținînd elementului finit. Pentru aceasta, dintre alternativele posibile, următoarea formulare liniară este dintre cele mai convenabile

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} \quad (13.3)$$

în care a -urile sînt valori constante, iar $[N]$ reprezintă o matrice ce definește natura cîmpului deplasărilor. Atît a -urile cît și matricea $[N]$ urmează să fie explicit exprimate. Valorile constantelor a_1, a_2, \dots, a_6 sînt calculate folosind coordonatele și deplasările nodale, respectiv prin rezolvarea următorului sistem de ecuații cu șase necunoscute

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1$$

$$u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2$$

$$u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3$$

$$v_1 = a_4 + a_5 x_1 + a_6 y_1$$

$$v_2 = a_4 + a_5 x_2 + a_6 y_2$$

$$v_3 = a_4 + a_5 x_3 + a_6 y_3$$

ce este obținut prin aplicarea relațiilor (13.3). Sub formă matriceală, expresiile deplasărilor nodale devin

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

încît, notînd cu $[A]$ matricea

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

expresiile deplasărilor nodale sînt

$$\{u_e\} = [A] \{a_u\}$$

$$\{v_e\} = [A] \{a_v\}.$$

Prin inversare se obține

$$\{a_u\} = [A]^{-1} \{u_e\} \quad (13.4)$$

$$\{a_v\} = [A]^{-1} \{v_e\}$$

în care

$$[A]^{-1} = \frac{[A^*]}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

unde $|A|$, respectiv valoarea determinantului matricei $[A]$, este de două ori valoarea ariei suprafeței triunghiului. Dacă nodurile 1, 2, 3 sînt numerotate în sensul acelor de ceasornic, valoarea determinantului $|A|$ devine negativă.

Introducerea expresiilor (13.4) în (13.3) și rearanjarea termenilor produce fie a -urile, fie matricea $[N]$, după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{|A|} [D] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad (13.6)$$

respectiv

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{|A|} [D] \quad (13.7)$$

în care

$$[D] = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Funcțiile $[N]$, pentru diferitele tipuri de elemente și formulări ale proprietăților acestora, au rol cheie în analiza tensiunilor prin elemente finite. Acestea se numesc funcții de modelare, definind fie modelul ales

pentru câmpul deplasărilor, fie geometria elementului adoptat, fie atit câmpul deplasărilor cit și geometria elementului în cazul opțiunii pentru așa-numitele elemente finite izoparametrice.

În cazul problemei bidimensionale, deformațiile specifice sint date de relațiile cunoscute din elasticitate

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

care, ținînd seama de expresiile (13.3), produc

$$\varepsilon_x = a_2, \quad \varepsilon_y = a_6, \quad \gamma_{xy} = a_3 + a_5.$$

Se poate observa că deformațiile specifice sint independente de valorile constantelor a_1 și a_3 , cit și de coordonatele locului în care se calculează ceea ce justifică denumirea dată uneori acestui tip de element finit, aceea de „element cu deformații constante”.

Ținînd seama de expresiile (13.3), ultimele relații pot fi scrise astfel

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \quad (13.8)$$

în care

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{|A|} [D]$$

sau

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (13.9)$$

unde cu A s-a notat aria triunghiului.

Matricea $[B]$, denumită matrice de deformății-deplasări, are rol cheie în evaluarea matricei de rigiditate a elementului.

În prealabil, se observă că tensiunile se pot exprima de asemenea în funcție de $[B]$ astfel

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \{\varepsilon\} = [E] [B] \{\delta\} \quad (13.10)$$

unde $[E]$ reprezintă matricea de elasticitate

$$[E] = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

în care E este modulul de elasticitate al materialului, iar μ este coeficientul lui Poisson.

Valorile deplasărilor nodale $\{\delta\}$, care intră în expresiile deformațiilor specifice (13.8) și respectiv în ale tensiunilor (13.10), se calculează cu relația (13.2), respectiv din relația

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{R\}.$$

Întrucât matricea de rigiditate structurală $[K]$ reprezintă o suprapunere a matricelor de rigiditate $[k]$ a elementelor, cele ce urmează se referă la matricea $[k]$ și respectiv la forțele din nodurile elementului $\{r\}_e$. Expresia primei matrice se obține pornind de la principiul conservării energiei, considerînd că elementului i se asociază deplasări nodale virtuale $d\{\delta\}_e$. În acest caz, lucrul mecanic al forțelor nodale corespunzătoare deplasărilor virtuale este dat de

$$(d\{\delta\}_e)^T \{r\}_e$$

iar lucrul mecanic dat de reacțiunile interioare, reprezentate prin tensiuni pe unitatea de volum, este

$$(d\{\varepsilon\})^T \{\sigma\} \quad (13.12)$$

în care s-a considerat că elementului i se aplică doar sarcini concentrate în noduri și că nu există sarcini distribuite, deformații inițiale sau tensiuni remanente. Ținînd seama de (13.8) și (13.10), expresia (13.12) se transformă în

$$([B] d\{\delta\}_e)^T [E] [B] \{\delta\}_e.$$

Pentru volumul întreg al elementului, lucrul mecanic al reacțiunilor interioare devine

$$\int_V (d\{\delta\}_e)^T [B]^T [E] [B] \{\delta\}_e dV. \quad (13.13)$$

Egalînd lucrul mecanic al forțelor nodale cu lucrul mecanic al reacțiunilor interioare dat de (13.13), se obține

$$(d\{\delta\}_e)^T \{r\}_e = (d\{\delta\}_e)^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{\delta\}_e \quad (13.14)$$

sau

$$\{r\}_e = [k] \{\delta\}_e$$

în care

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV. \quad (13.15)$$

În (13.15) se poate lua $dV = h \, dx \, dy$, dacă grosimea elementului h este constantă. Dacă h variază de-a lungul elementului, se poate obține o expresie de interpolare a grosimii variabile în funcție de grosimile h_1, h_2, h_3 ale elementului în noduri, folosind o expresie analogă aceleia din (13.3), adică

$$h = [N] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix}$$

în care $[N]$ are forma simplificată

$$[N] = [1 \ x \ y] \frac{1}{|A|} [A^*].$$

Pentru generalizarea relației (13.14), se consideră că pe element acționează sarcini distribuite p , ale căror valori în noduri sînt date de

$$\{p\} = \{p_1 \ p_2 \ p_3\}$$

și că elementul este supus unor deformații inițiale

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha T \ \alpha T \ 0\}$$

în care α este coeficientul de dilatare termică liniară. Incluzînd și eventuale tensiuni remanente inițiale $\{\sigma_0\}$, expresia generală a tensiunilor din relația (13.12) are forma

$$\{\sigma\} = [E] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

incît expresia (13.13) devine

$$(\delta \{\delta_e\})^T \left(\left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{\delta\}_e - \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV + \right. \\ \left. + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV \right).$$

Introducînd rezultatul precedent, în locul membrului doi din (13.14), se obține

$$\{r\}_e + \int_V [N]^T \{p\} dV + \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV = [k] \{\delta\}_e,$$

în care, potrivit cu relația (13.1), se poate recunoaște ușor că

$$\{r\}_p = \int_V [N]^T \{p\} dV.$$

$$\{r\}_\varepsilon = \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV$$

$$\{r\}_{\sigma_0} = - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV.$$

13.4. ETAPE ALE CALCULULUI TENSIUNILOR PRIN ELEMENTE FINITE

Aplicația numerică ce se tratează în continuare ilustrează modul de folosire, în practică, a formulărilor teoretice din paragraful precedent.

În linii mari, analiza prin elemente finite comportă următoarele etape :

- 1°. Divizarea (discretizarea) în elemente finite a structurii reale.
- 2°. Definirea proprietăților mecanice și a condițiilor la limită pentru elementele finite.
- 3°. Generarea matricelor de rigiditate a elementelor.
- 4°. Asamblarea matricelor de rigiditate a elementelor.
- 5°. Rezolvarea ecuațiilor structurale.
- 6°. Calculul tensiunilor.

Fie o placă metalică avînd modul de rezemare, sarcina F și dimensiunile arătate în fig. 13.2. Modul de elasticitate al materialului este $E = 1,82 \cdot 10^6$ daN/cm², iar coeficientul lui Poisson este $\mu = 0,3$. Să se calculeze tensiunile σ_x , σ_y , τ_{xy} .

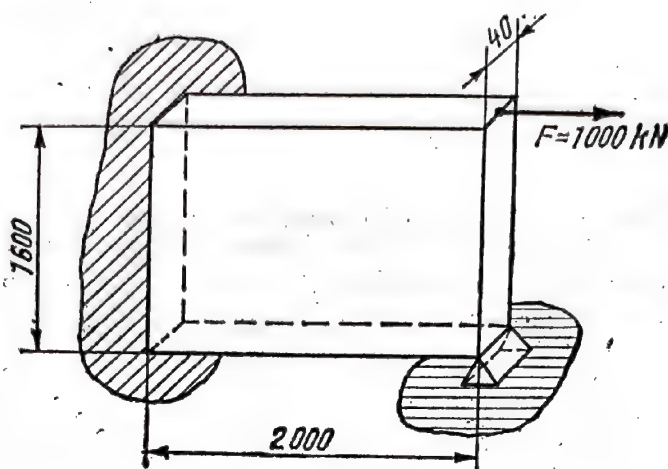


Fig. 13.2.

13.4.1. DIVIZAREA ÎN ELEMENTE FINITE A STRUCTURII REALE

În fig. 13.3 sînt arătate : divizarea în elemente finite triunghiulare a structurii reale, etichetarea elementelor și a nodurilor respective, determinarea coordonatelor nodurilor.

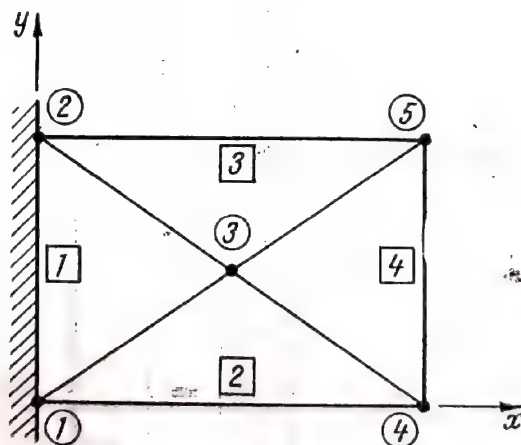


Fig. 13.3.

În tabelul 13.1 este indicată ordinea de succesiune a nodurilor în fiecare element finit, în sens antiorar, fiind însă indiferent nodul de la care începe ordonarea acestora.

Tabelul 13.1

Ordinea de succesiune a nodurilor elementelor

Nr. element.	Nodurile		
	Nod 1	Nod 2	Nod 3
Elementul 1	1	3	2
Elementul 2	1	4	3
Elementul 3	3	5	2
Elementul 4	4	5	3

Tabelul 13.2

Coordonatele nodurilor

Nr. nodurilor	Coordonate	
	x [cm]	y [cm]
1	0	0
2	0	160
3	100	80
4	200	0
5	200	160

13.4.2. DEFINIREA PROPRIETĂȚILOR MECANICE ȘI A CONDIȚIILOR LA LIMITĂ PENTRU ELEMENTELE FINITE

Avînd modulul de elasticitate și coeficientul lui Poisson, se poate alcătui matricea de elasticitate, după cum urmează

$$[E] = \frac{1,82 \times 10^6}{1 - 0,3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,3}{2} \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Matricea deplasărilor nodale este

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}.$$

Matricea componentelor forțelor nodale are forma

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

neexistînd sarcini distribuite, efecte termice, inexactități de montaj, tensiuni remanente.

13.4.3. GENERAREA MATRICELOR DE RIGIDITATE A ELEMENTELOR

Matricea $[k]$ de rigiditate este dată de expresia

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV = [B]^T [E] [B] hA$$

în care h este grosimea, iar A este aria elementului.

Pentru formarea matricei $[B]$ se folosește relația (13.9).

Elementul 1

$$[B] = \frac{1}{2 \frac{1}{2} 160 \times 100} \begin{bmatrix} 80-160 & 0 & 160-0 & 0 & 0-80 & 0 \\ 0 & 0-100 & 0 & 0 & 0 & 100-0 \\ 0-100 & 80-160 & 0 & 160-0 & 100-0 & 0-80 \end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B] = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -5 & -4 & 0 & 8 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$[k]_1 = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -4 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ -4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -5 & -4 & 0 & 8 & 5 & -4 \end{bmatrix} 4 \frac{1}{2} 160 \times 100$$

sau

$$[k_1] = \frac{1}{2} 10^5 \begin{bmatrix} 49,5 & 26 & -64 & -28 & 14,5 & -26 \\ & k_{11} & & k_{13} & & k_{12} \\ 26 & & 16,2 & -24 & -22,4 & -2 \\ & & & & & & -16,2 \\ -64 & & -24 & 128 & 0 & -64 & 24 \\ & k_{31} & & k_{33} & & k_{32} & \\ -28 & & -22,4 & 0 & 44,8 & 28 & 22,4 \\ & & & & & & \\ 14,5 & & -2 & -64 & 28 & 49,5 & 2 \\ & k_{21} & & k_{23} & & k_{22} & \\ 2 & & 6,2 & 24 & -22,4 & -26 & -6,2 \end{bmatrix}$$

Elementul 2

$$[B] = \frac{1}{2 \frac{1}{2} 200 \times 80} \begin{bmatrix} 0 & -80 & 0 & 80 & -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -200 & 0 & 0 & -100 & 0 & 200 & -0 \\ 100 & -200 & 0 & -80 & 0 & -100 & 80 & -0 & 200 & -0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B] = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 10 \\ -5 & -4 & -5 & 4 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$[k]_2 = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -4 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & -5 & 4 & 10 & 0 \end{bmatrix} 4 \frac{1}{4} 200 \times 80$$

sau

$$[k]_2 = \frac{1}{2} 10^5 \begin{bmatrix} 49,5 & 15,2 & -14,5 & -2 & -35 & -24 \\ & k_{11} & & k_{14} & & k_{13} \\ 26 & & 61,2 & 2 & 38,8 & -28 & -100 \\ & & & & & & \\ -14,5 & 12,8 & 49,5 & -26 & -35 & 24 \\ & k_{41} & & k_{44} & & k_{43} \\ -2 & 38,8 & -26 & 61,2 & 28 & -100 \\ & & & & & \\ -35 & -28 & -35 & 28 & 70 & 0 \\ & k_{31} & & k_{34} & & k_{33} \\ -24 & -100 & 24 & -100 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Elementul 3

$$[B] = \frac{1}{2 \frac{1}{2} 200 \times 80} \begin{bmatrix} 160-160 & 0 & 160-80 & 0 & 80-160 & 0 \\ 0 & 0-200 & 0 & 100-0 & 0 & 200-100 \\ 0-200 & 160-160 & 100-0 & 160-80 & 200-100 & 80-160 \end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B] = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$[k]_3 = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{800} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix} 4 \frac{1}{2} 200 \times 80$$

sau

$$[k]_3 = \frac{1}{2} 10^5 \begin{bmatrix} 70 & 0 & -35 & 28 & 35 & -28 \\ & k_{33} & & k_{35} & & k_{32} \\ 0 & 200 & -24 & -50 & 24 & -100 \\ \hline -35 & & -24 & 49,5 & 26 & -14,5 & -2 \\ & k_{53} & & k_{55} & & k_{52} \\ -28 & & -100 & 26 & 36,2 & 2 & 38,8 \\ \hline -35 & & 24 & 14,5 & 2 & 49,5 & -26 \\ & k_{23} & & k_{25} & & k_{22} \\ 28 & & -100 & -2 & 13,8 & -26 & 61,2 \end{bmatrix}$$

Elementul 4

$$[B] = \frac{1}{2 \frac{1}{2} 160 \times 100} \begin{bmatrix} 160-80 & 0 & 80-0 & 0 & 0-160 & 0 \\ 0 & 100-200 & 0 & 200-100 & 0 & 200-200 \\ 100-200 & 160-80 & 200-100 & 80-0 & 200-200 & 0-160 \end{bmatrix}$$

care se reduce la

$$[B] = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 5 & 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$[k]_4 = \frac{1}{800} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & -0 & -8 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{800} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 5 & 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} 4 \frac{1}{2} 160 \times 100$$

sau

$$[k]_4 = \frac{1}{2} 10^5 \begin{bmatrix} 49,5 & -26 & 14,5 & -2 & -64 & 28 \\ & k_{44} & & k_{45} & & k_{43} \\ -26 & & 61,2 & 2 & -38,8 & 24 \\ & & & & & -22,4 \\ \hline 14,5 & & 2 & 49,5 & 26 & -64 \\ & k_{54} & & k_{55} & & k_{53} \\ -2 & & -38,8 & 26 & 61,2 & -24 \\ & & & & & -22,4 \\ \hline -64 & & 24 & -64 & -24 & 128 \\ & k_{34} & & k_{35} & & k_{33} \\ 28 & & -22,4 & -28 & -22,4 & 0 \\ & & & & & 44,8 \end{bmatrix}$$

13.4.4. ASAMBLAREA MATRICELOR DE RIGIDITATE A ELEMENTELOR

Matricea totală de rigiditate structurală are dimensiunile 10×10 , cifra 10 reprezentând numărul gradelor de libertate al structurii întregi, în timp ce matricele elementelor au dimensiunile 6×6 , cifra 6 fiind numărul gradelor de libertate corespunzătoare unui element. Pentru asamblare, trebuie ca matricea fiecărui element să fie mai întâi extinsă la dimensiunea 10×10 și totodată rearanjată pentru a corespunde matricei deplasărilor din ecuația matriceală generală. Pentru exemplificare, considerînd elementul 3, ecuațiile de echilibru ale acestuia sînt

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{35} & k_{32} \\ k_{53} & k_{55} & k_{52} \\ k_{23} & k_{25} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

în care elementele k_{ij} sînt matrice cu dimensiunile 2×2 . În vederea asamblării, ultima relație matriceală se poate extinde și rearanja astfel

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix}$$

De fapt, extinderea matricelor elementelor și rearanjarea acestora sînt operații virtuale. Propriu-zis, aceste operații nu se efectuează, elementele matriceale fiind plasate la „locurile” lor în matricea generală $[K]$, de îndată ce aceste elemente sînt constituite. Structura matricei $[K]$ poate fi examinată în ecuația ce urmează

$$\begin{bmatrix}
 (k_{11})_1 + (k_{11})_2 & (k_{12})_1 & (k_{13})_1 + (k_{13})_2 & (k_{14})_2 & 0 \\
 (k_{21})_1 & (k_{22})_1 + (k_{22})_3 & (k_{23})_1 + (k_{23})_3 & 0 & (k_{25})_3 \\
 (k_{31})_1 + (k_{31})_2 & (k_{32})_1 + (k_{32})_3 & (k_{33})_1 + (k_{33})_2 + (k_{33})_3 + (k_{33})_4 & (k_{34})_2 + (k_{34})_4 & (k_{35})_3 + (k_{35})_4 \\
 (k_{41})_2 & 0 & (k_{43})_2 + (k_{43})_4 & (k_{44})_2 + (k_{44})_4 & (k_{45})_4 \\
 0 & (k_{52})_3 & (k_{53})_3 + (k_{53})_4 & (k_{54})_4 & (k_{55})_3 + (k_{55})_4
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \end{Bmatrix}$$

in care, spre exemplu, $(k_{23})_1$ reprezintă matricea k_{23} cu dimensiunile 2×2 din elementul 1. Numeric, matricea $[K]$ are structura următoare

$$[K] = \begin{bmatrix}
 99 & 41,2 & 14,5 & -26 & -99 & -52 & -14,5 & -2 & 0 & 0 \\
 52 & 77,4 & -2 & -16,2 & -52 & -122,4 & 2 & 38,8 & 0 & 0 \\
 14,5 & -2 & 99 & -24 & -99 & 52 & 0 & 0 & 14,5 & 2 \\
 2 & 6,2 & -52 & 55 & 52 & -122,4 & 0 & 0 & -2 & 13,8 \\
 -99 & -52 & -29 & -4 & 396 & 0 & -99 & 52 & -99 & 4 \\
 -52 & -122,4 & 52 & -77,6 & 0 & 489,6 & 52 & -122,4 & -52 & -72,4 \\
 -14,5 & 12,8 & 0 & 0 & -99 & 52 & 99 & -52 & 14,5 & -2 \\
 -2 & 38,8 & 0 & 0 & 52 & -122,4 & -52 & 122,4 & 2 & -38,8 \\
 0 & 0 & -14,5 & -2 & -99 & -52 & 14,5 & 2 & 99 & 52 \\
 0 & 0 & 2 & 38,8 & -52 & -122,4 & -2 & -38,8 & 52 & 97,4
 \end{bmatrix}$$

$= \frac{1}{2} 10^5$

13.4.5. REZOLVAREA ECUAȚILOR STRUCTURALE

Date fiind condițiile la limită, rezultă că din sistemul celor zece ecuații structurale rămân doar patru ecuații corespunzătoare celor patru deplasări diferite de zero

$$\frac{1}{2} 10^5 \begin{bmatrix} 396 & 0 & -99 & 4 \\ 0 & 489,6 & -52 & -72,4 \\ -99 & -52 & 99 & 52 \\ -52 & -122,4 & 52 & 97,4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Se poate astfel remarca faptul că 84 % din elementele matricei $[K]$ au rămas nefolosite. Acest procent, uneori fiind chiar 95 %, reprezentînd un efort de calcul în aparență irosit, constituie un aspect caracteristic al analizelor de tensiuni prin elemente finite, în general.

Din ultima ecuație matriceală rezultă

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \frac{2}{10^5} \begin{bmatrix} 396 & 0 & -99 & 4 \\ 0 & 489,6 & -52 & -72,4 \\ -99 & -52 & 99 & 52 \\ -52 & -122,4 & 52 & 97,4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Efectuînd calculele pentru inversarea matricei $[K]$, se obține

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = 0,158 \times 10^{-7} \begin{bmatrix} 3,876 & -0,166 & 3,920 & -2,331 \\ 0,361 & 2,061 & 0,936 & 1,037 \\ 2,716 & -4,562 & 15,477 & -8,825 \\ 0,489 & 2,796 & -5,041 & 13,325 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sau

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = 0,00158 \begin{Bmatrix} 3,920 \\ 0,936 \\ 15,477 \\ -5,041 \end{Bmatrix},$$

în care deplasările nodale sînt rezultate în centimetri.

Pentru calculul tensiunilor, folosind relația (13.10), se obține

Elementul 1

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -5 & -4 & 0 & 8 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

în care

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = 0,00158 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,920 \\ 0,936 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rezultă

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{10^6}{800} \cdot 0,00158 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 31,360 \\ 0 \\ 7,488 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 124 \\ 37 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

rezultatele fiind date în daN/cm².

Elementul 2

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \frac{1}{800} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 10 \\ -5 & -4 & -5 & 4 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

în care

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 0,00158 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,920 \\ 0,936 \end{Bmatrix}$$

Se obține

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{10^6}{800} 0,00158 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 9,36 \\ 39,20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 37 \\ 54 \end{Bmatrix}$$

Elementul 3

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \frac{1}{800} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ -10 & 0 & 5 & 4 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

in care

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = 0,00158 \begin{Bmatrix} 3,920 \\ 0,936 \\ 15,477 \\ -5,041 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se obține

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{10^6}{800} 0,00158 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 61,90 \\ -34,56 \\ 18,02 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 203 \\ -63 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

Elementul 4

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \frac{1}{800} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 5 & 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

unde

$$\begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 0,00158 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15,477 \\ -5,041 \\ 3,920 \\ 0,936 \end{Bmatrix}$$

Se obține

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{10^6}{800} 0,00158 \begin{bmatrix} 2 & 0,6 & 0 \\ 0,6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 30,55 \\ -25,20 \\ 49,73 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 91 \\ -63 \\ 64 \end{Bmatrix}$$

Pentru a obține o precizie superioară a rezultatelor, elementele finite trebuie să fie mai numeroase și cu dimensiuni mai mici, în care caz este nevoie de o mașină electronică de calcul, chiar și pentru structura ce a fost examinată aici. Totodată, există elemente finite mai bune decât cele de tip triunghiular, a căror folosire duce la rezultate ce sînt, uneori, mult mai precise. Acestea sînt examinate în § 13.5. Deocamdată scopul propus a fost atins, utilizarea triunghiului fiind avantajoasă cînd calculele se efectuează cu mîna, ca și în parcurgerea mai comodă a etapelor de soluționare a unei analize prin elemente finite, respectiv în faza de pregătire a înțelegerii problemelor mai complexe. Și astăzi acest element este adesea folosit, datorită tocmai simplității cît și largii utilizări a acestuia în perioada de început. Elaborarea programelor intrate în biblioteca multor mașini de calcul electronic poartă amprenta acestei orientări timpurii.

13.5. ELEMENTE FINITE IZOPARAMETRICE

Este vorba de familia de elemente finite pentru care se folosesc aceleași funcții de modelare (interpolare) atît pentru definirea cîmpului deplasărilor cît și a formei elementului, ambele fiind importante în alcătuirea matricelor de rigiditate, așa cum s-a putut remarca în aplicația numerică precedentă.

13.5.1. SISTEMUL „NATURAL” SAU „INTRINSEC” DE COORDONATE

În fig. 13.4 se poate sesiza diferența între un sistem global de coordonate xy , unul local $\bar{x}\bar{y}$ și un sistem natural sau intrinsec de coordonate $\xi\eta$. În ultimul, care este de asemenea un sistem local, coordonatele punctelor sînt date prin numere adimensionale care însă nu depășesc valoarea ± 1 .

Dacă elementul este tridimensional, laturile hexaedrului sînt definite de $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ și $\zeta = \pm 1$. Sistemul $\xi \eta \zeta$ este definit de geometria elementului și nicidecum de orientarea sistemului global de coordonate. De aceea, nu este necesar ca axele $\xi\eta\zeta$ să fie ortogonale. Laturile elementului sînt linii drepte, putînd avea și forme arbitrare, ca în cazul unui patrulater distorsionat dintr-un dreptunghi.

Pentru exemplificare, fie dreptunghiul clasic ca bază a elementelor de tip patrulater, arătat în fig. 13.5. Laturile acestui element finit sînt definite de $\xi = \pm 1$ și $\eta = \pm 1$, iar orice alt punct al elementului are coordonatele

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \text{ cu } d\xi = \frac{1}{a} dx$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b}, \text{ cu } d\eta = \frac{1}{b} dy.$$

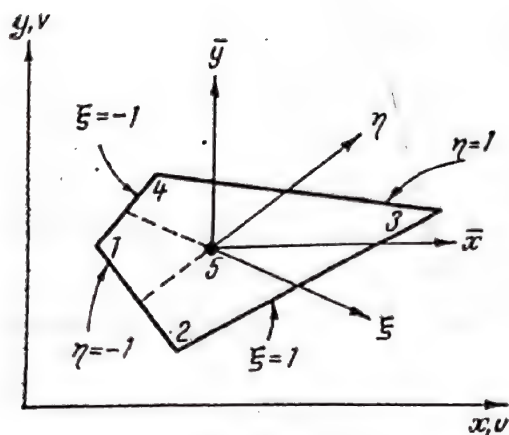


Fig. 13.4.

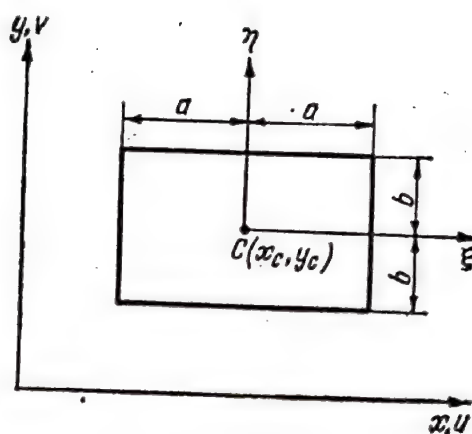


Fig. 13.5.

13.5.2. MODELE DE INTERPOLARE PENTRU DEPLASĂRI

Natura câmpului deplasărilor este reprezentată prin forma funcției de modelare $[N]$ și este de observat că există cel puțin două dezavantaje în modul în care această funcție, dată de relația (13.7), definește câmpul deplasărilor în formularea din relația (13.3). În primul rând se pierde semnificația fizică. În al doilea rând, evaluarea funcției $[N]$ pentru fiecare element în parte înseamnă inversarea tot de atâtea ori a matricei $[A]$, ceea ce presupune un efort mare de calcul necesar numai pentru o astfel de operațiune, dat fiind că structurile reale de analizat pot avea multe sute sau chiar mii de elemente. Formularea izoparametrică a funcțiilor de interpolare înlătură astfel de inconveniente. Potrivit acestei formulări, $[N]$ este o funcție de interpolare, uneori numită și funcție de formă sau funcție de modelare, care are valoarea unu într-unul din noduri și valoarea zero în toate celelalte noduri. Din însăși definiția funcției rezultă că în noduri deplasările trebuie să fie egale cu unu, ceea ce poate ajuta înțelegerea

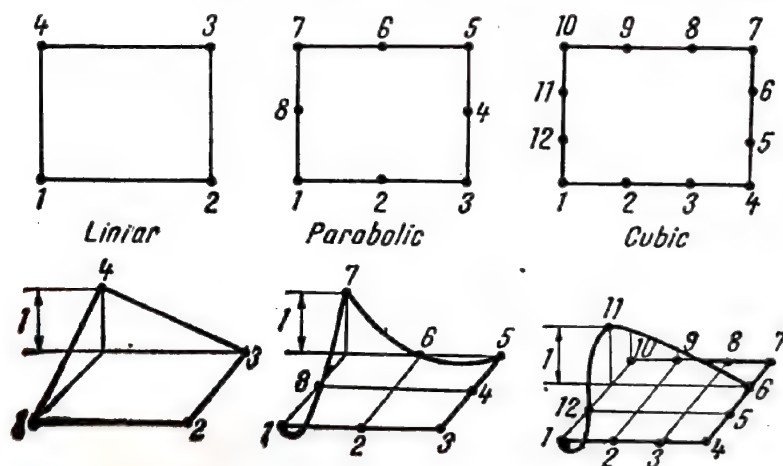


Fig. 13.6.

sensului fizic al idealizării câmpului de deplasări. Cele mai uzuale funcții de modelare sînt cele liniare și parabolice; de asemenea, există funcții de modelare cubice și cuartice. Cîteva exemple ale modelelor de interpolare sînt arătate în fig. 13.6.

13.5.3. FUNCȚII DE MODELARE

Pentru a satisface condițiile impuse de însăși definiția funcției izo-parametrice de modelare $[N]$, respectiv pentru a asigura continuitatea acestora de-a lungul laturilor elementului, formularea funcției trebuie realizată prin intuiție și ingeniozitate. În cele ce urmează, sînt prezentate unele funcții liniare și parabolice ale elementului de tip patrulater.

Pentru cele patru colțuri ale elementului liniar funcția de modelare este

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

unde

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i)$$

în care pentru $i = 1, 2, 3, 4$ valorile consecutive ale coordonatelor nodurilor sînt

$$\xi_i = -1, 1, 1, -1,$$

$$\eta_i = -1, -1, 1, 1.$$

Rezultă

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

în care ξ și η sînt coordonatele oricărui punct de-a lungul elementului. Pentru exemplificare, dacă $i = 1$, ceea ce corespunde nodului 1 în fig. 13.4, se obține $N_1 = 1$ și $N_2 = N_3 = N_4 = 0$.

Cu ajutorul funcțiilor de modelare se pot scrie relații atât pentru deplasări

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (13.16)$$

cât și pentru coordonatele unui punct oarecare

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (13.17)$$

sau sub forma

$$u = \sum_1^4 N_i u_i, \quad v = \sum_1^4 N_i v_i$$

$$x = \sum_1^4 N_i x_i, \quad y = \sum_1^4 N_i y_i$$

Elementul liniar de tip patrulater astfel definit este cunoscut sub denumirea de Q4, spre a-l deosebi de elementele patrulatere Q5 și Q6. Elementul Q5 are în plus două grade de libertate, nenodale, pentru care o nouă funcție de modelare este necesară

$$N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

corespunzând centrului elementului din fig. 13.4. Această funcție are valoarea unu în centru, dar se anulează de-a lungul celor patru laturi ale elementului. Cîmpul deplasărilor are în acest caz expresiile

$$u = \sum_1^4 N_i u_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)u_5$$

$$v = \sum_1^4 N_i v_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)v_5$$

(13.18)

neavind efect asupra compatibilității dintre elemente. Mărimile u_5 și v_5 nu sînt deplasări ale vreunui imaginar „nod” central, ci trebuie privite ca elemente componente ale deplasărilor elementului, u_c și v_c , în punctul cu $\xi = \eta = 0$, respectiv

$$u_c = \frac{1}{4} (u_1 + u_2 + u_4 + u_3) + u_5$$

$$v_c = \frac{1}{4} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + v_5.$$

În problemele de încovoiere pură s-a dovedit eficientă folosirea elementului Q6, în care gradele de libertate suplimentare au forma

$$u = \alpha_1(1 - \xi^2) + \alpha_2(1 - \eta^2)$$

$$v = \beta_1(1 - \xi^2) + \beta_2(1 - \eta^2)$$

unde α_1 , α_2 și β_1 , β_2 sînt valori constante. În acest caz cîmpul deplasărilor este descris de

$$u = \sum_1^4 N_i u_i + (1 - \xi^2)u_5 + (1 - \eta^2)u_6$$

$$v = \sum_1^4 N_i v_i + (1 - \xi^2)v_5 + (1 - \eta^2)v_6$$

ceea ce face ca elementul Q6 să aibă 12 grade de libertate, față de Q5 care are numai 10 grade de libertate.

În cazul elementului parabolic, de tip patrulater, trebuie introduse trei funcții de modelare și anume

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad \text{pentru } i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{pentru } i = 2, 6, \quad (13.19)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_i) \quad \text{pentru } i = 4, 8.$$

Totodată, elementul parabolic poate avea grade de libertate interne, nenodale, de felul celor descrise anterior.

În probleme tridimensionale, funcțiile de modelare echivalente pot fi ușor deduse. Astfel, în cazul prisme drepte arătate în fig. 13.7, se poate opta pentru o funcție de modelare liniară, cu 8 noduri, sau parabolică, cu 20 noduri, sau pentru o funcție cubică avînd 32 noduri.

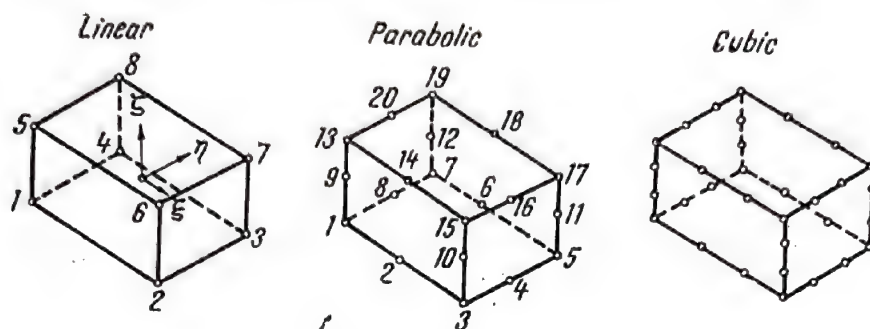


Fig. 13.7.

Pentru funcția liniară există formularea

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i)$$

în care, pentru $i = 1, 2, \dots, 8$, valorile consecutive ale coordonatelor nodurilor sînt

$$\xi_i = -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1$$

$$\eta_i = -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1$$

$$\zeta_i = -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1.$$

Cînd se optează pentru grade de libertate suplimentare, nenodale, relațiile echivalente cu (13.18) sînt

$$u = \sum_1^8 N_i u_i + (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) u_9$$

$$v = \sum_1^8 N_i v_i + (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) v_9$$

$$w = \sum_1^8 N_i w_i + (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) w_9$$

elementul avind 27 grade de libertate. Prin analogie cu elementul plan Q6, se poate deduce că în cazul elementului tridimensional câmpul deplasărilor are 33 grade de libertate, fiind dat de relațiile

$$u = \sum_1^8 N_i u_i + (1 - \xi^2)u_9 + (1 - \eta^2)u_{10} + (1 - \varsigma^2)u_{11}$$

$$v = \sum_1^8 N_i v_i + (1 - \xi^2)v_9 + (1 - \eta^2)v_{10} + (1 - \varsigma^2)v_{11}$$

$$w = \sum_1^8 N_i w_i + (1 - \xi^2)w_9 + (1 - \eta^2)w_{10} + (1 - \varsigma^2)w_{11}.$$

Pentru funcția tridimensională parabolică, în cazul nodurilor de colț există relația

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \varsigma \varsigma_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \varsigma \varsigma_i - 2)$$

iar pentru nodurile de la mijlocul laturilor se dau următoarele trei funcții de interpolare

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \varsigma \varsigma_i) \quad \text{pentru } i = 2, 6, 14, 18$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_i) (1 + \varsigma \varsigma_i) \quad \text{pentru } i = 4, 8, 16, 20$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \varsigma^2) (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{pentru } i = 9, 10, 11, 12.$$

13.5.4. TRANSFORMĂRI ALE CONCEPTELOR DE BAZĂ ÎN DIFERITE SISTEME DE COORDONATE

În continuare, se arată modul în care proprietățile elementelor finite descrise în § 13.3 sînt transpuse în coordonate intrinseci în cazul elementelor bidimensionale liniare, nefiind nici o dificultate pentru extinderea rezultatelor la cele tridimensionale.

Se pleacă de la

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{aligned} \quad (13.20)$$

și de la

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \end{aligned} \quad (13.21)$$

în care

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i).$$

Se poate scrie că

$$N_{i,\xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta \eta_i)$$

$$N_{i,\eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi \xi_i)$$

în care virgula din mebrul întâi simbolizează derivata parțială în raport cu variabila ce urmează după virgulă.

Plecînd de la relațiile (13.21), derivatele parțiale ale deplasărilor în cele două sisteme de coordonate $\xi\eta$ și xy sînt date, potrivit regulilor cunoscute, de

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad (13.22)$$

și de

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (13.23)$$

în care, potrivit cu (13.20), $[J]$ este o matrice jacobiană cu 2×2 elemente avînd forma

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}. \quad (13.24)$$

Notînd cu $[J^*]$ inversa matricei $[J]$, respectiv

$$[J^*] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{12}^* & J_{22}^* \end{bmatrix}$$

apare posibil ca relațiile (13.22) și (13.23) să fie concentrate într-o ecuație matriceală de forma

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (13.25)$$

în care, ținând seama de relațiile (13.21), se poate face substituirea

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \phantom{N_{i,\xi}} \\ \phantom{N_{i,\eta}} \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \phantom{N_{i,\xi}} \\ \phantom{N_{i,\eta}} \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \phantom{N_{i,\xi}} \\ \phantom{N_{i,\eta}} \end{bmatrix}_{i=4} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (13.26)$$

Cu ajutorul relației (13.25), în care se introduce relația (13.26) și folosind cunoscutele relații din elasticitate

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

scrise matriceal, rezultă

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \phantom{N_{i,\xi}} \\ \phantom{N_{i,\eta}} \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \phantom{N_{i,\xi}} \\ \phantom{N_{i,\eta}} \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \phantom{N_{i,\xi}} \\ \phantom{N_{i,\eta}} \end{bmatrix}_{i=4} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

sau

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u^I \\ v_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

unde $[B]$ este o matrice 3×8 , respectiv

$$[B] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{t,\xi} & 0 \\ N_{t,\eta} & 0 \\ 0 & N_{t,\xi} \\ 0 & N_{t,\eta} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=4}.$$

3×8 3×4 4×8

În final, se obține

$$[B] = \begin{bmatrix} (J_{11}^* N_{t,\xi} + J_{12}^* N_{t,\eta}) & 0 \\ 0 & (J_{21}^* N_{t,\xi} + J_{22}^* N_{t,\eta}) \\ (J_{21}^* N_{t,\xi} + J_{22}^* N_{t,\eta}) & (J_{11}^* N_{t,\xi} + J_{12}^* N_{t,\eta}) \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=4}.$$

(13.27)

Având stabilită expresia matricei $[B]$ se poate trece la evaluarea matricei de rigiditate $[k]$ din (13.15). Întâi, se observă că

$$dV = dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta$$

încît

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] |J| d\xi d\eta d\zeta. \quad (13.28)$$

În timp ce limitele de integrare sînt foarte simple, expresia de integrat este complexă din cauză că expresiile pentru $[B]$, $[J^*]$ și pentru determinantul $|J|$ sînt funcții de ξ și η . Integrarea nu se poate efectua exact în toate cazurile, încît se recurge la tehnicile aproximative de calcul numeric, dintre care se menționează doar metoda de integrare numerică denumită cuadratura lui Gauss.

13.5.5. CUADRATURA LUI GAUSS

Cea mai simplă cale pentru evaluarea numerică a integralei

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$

este de a evalua funcția $f(\xi)$ în $\xi = 0$, respectiv în punctul de la mijlocul intervalului de integrare, și a o înmulți cu lungimea intervalului, care este 2, așa cum se vede ușor urmărind fig. 13.8.

Rezultă

$$I = 2 f(0)$$

în care factorul 2 se numește pondere și este de observat că abscisa a fost aleasă într-un mod judicios, aparent banal.

Pentru a îmbunătăți precizia integrării numerice, se poate opta pentru două sau mai multe abscise. Din nou, opțiunea este făcută în modul cel mai judicios posibil, mărimea absciselor nefiind întâmplătoare. Corespunzător acestor abscise trebuie să fie determinate prin calcul ponderile respective care înmulțesc valorile numerice ale funcțiilor în punctele

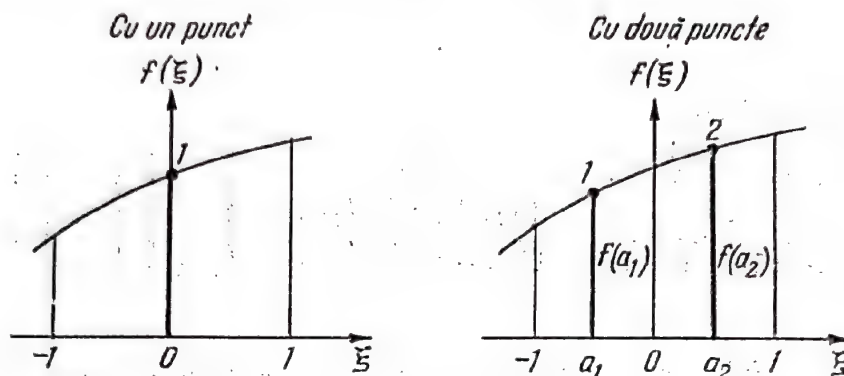


Fig.13.8.

având abscisele alese. S-a determinat că în cazul a două puncte de abscise $a_{1,2} = \mp 1/\sqrt{3}$, ponderile respective sînt egale cu unu, încît

$$I = (1)f(a_1) + (1)f(a_2)$$

iar pentru trei puncte, avînd abscisele

$$a_{1,3} = \mp \sqrt{3/5} \text{ și } a_2 = 0$$

ponderile au valorile 5/9 și respectiv 8/9, încît

$$I = \frac{5}{9}f(a_1) + \frac{8}{9}f(a_2) + \frac{5}{9}f(a_3).$$

Se poate alege orice număr de puncte, pentru care, dacă acesta este mai mare de trei, efortul de calcul ce revine unui mare număr de elemente finite devine un serios impediment.

Generalizînd, se poate scrie că

$$I = \sum_i H_i f(a_i)$$

unde H_i este ponderea asociată funcției calculate în punctul de abscisă $\xi_i = a_i$.

Pentru probleme bidimensionale există relația

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j H_i H_j f(a_i, b_i)$$

iar pentru cele tridimensionale relația este

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k H_i H_j H_k f(a_i, b_i, c_i).$$

Pentru exemplificare, fie elementul finit bidimensional arătat în fig. 13.9 avînd patru puncte Gauss, respectiv cîte două pe fiecare direcție. Abscisele acestor puncte și ponderile corespunzătoare au valorile

$$a_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b_{1,2} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$H_i = 1, \quad H_j = 1$$

încît

$$I = (1)(1) f(a_1, b_1) + (1)(1) f(a_2, b_1) + (1)(1) f(a_2, b_2) + (1)(1) f(a_1, b_2)$$

fără a fi însă absolut necesar să se folosească același număr de puncte Gauss de-a lungul fiecărei direcții de coordonate.

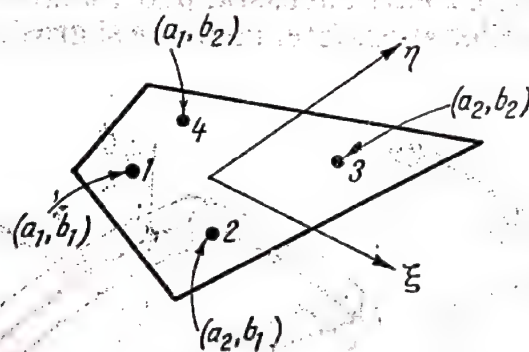
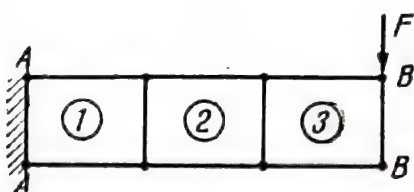


Fig. 13.9.

În fig. 13.10 este arătată o grindă consolă, discretizată în trei elemente finite de tip patrulater, eventual fiecare element putînd fi la rîndul său divizat în elemente finite de tip triunghiular. Din simpla examinare a rezultatelor, se constată un salt impresionant a preciziei, în %, cînd se trece de la elemente triunghiulare la elemente de tip patrulater.



Tipul de element Mărimea calculată	Elemente tip patrulater			Elemente tip triunghiular	
V_{max} (în B)	100	99	65	53	26
σ_{max} (în A)	100	99	56	51	19

Fig. 13.10.

13.6. APLICAREA ELEMENTELOR FINITE ÎN CAZUL ÎNCOVOIERII PLĂCILOR PLANE. PROGRAM DE CALCULATOR

În cele ce urmează se va examina în mod succint încovoierea plăcilor plane, din punctul de vedere al analizei prin elemente finite, fără a insista asupra justificărilor matematice, cunoscute din teoria plăcilor.

13.6.1. FORMULAREA IZOPARAMETRICĂ A ELEMENTULUI FINIT SOLICITAT LA ÎNCOVOIERE

Sub aspect fizic, plăcile plane există în spațiul tridimensional, dar analiza lor poate fi concepută ca o problemă bidimensională dacă grosimea h a plăcii nu este prea mare. Pentru aceasta, placa poate fi geometric definită prin coordonatele nodurilor suprafeței mediane și grosimea h . Elementul fi-

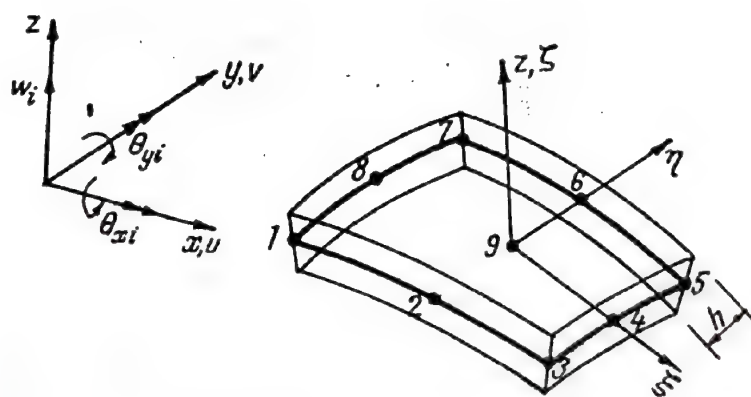


Fig. 13.11.

nit adoptat, arătat în fig. 13.11, este plan și are 8 noduri, în fiecare nod avînd cîte trei grade de libertate și anume : deplasarea w în sensul axei z paralelă cu axa intrinsecă ζ și rotirile θ_x și θ_y ale liniilor nodale de pe direcția

grosimii plăcii. Ca urmare, deplasările u și v în direcțiile x și y sînt funcție de θ_x și θ_y în așa fel încît să producă deplasări nule ale suprafeței mediane, dar diferite de zero în puncte aflate la distanța z față de suprafața mediană. O astfel de formulare, tipică pentru încovoiere, se poate exprima prin relații de forma (13.16), adică

$$u = z(N_1 \theta_{y1} + N_2 \theta_{y2} + \dots + N_8 \theta_{y8})$$

$$v = -z(N_1 \theta_{x1} + N_2 \theta_{x2} + \dots + N_8 \theta_{x8})$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \dots + N_8 w_8.$$

În total sînt 24 grade de libertate pe fiecare element, alese ca necunoscute ale problemei, eventual 27 grade de libertate dacă se suplimentează cu trei necunoscute nenodale centrale, respectiv

$$\{\delta\} = \{w_1 \theta_{y1} \theta_{x1} w_2 \theta_{y2} \theta_{x2} w_3 \dots \theta_{x9}\}.$$

Relațiile anterioare pentru deplasări se pot scrie sub forma unei matrice 3×27 , astfel

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & zN_1 & 0 & 0 & zN_2 & 0 & \dots & 0 & zN_9 & 0 \\ 0 & 0 & -zN_1 & 0 & 0 & -zN_2 & \dots & 0 & 0 & -zN_9 \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ \theta_{x9} \end{Bmatrix}$$

sau, mai concentrat, după cum urmează

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} 0 & zN_i & 0 \\ 0 & 0 & -zN_i \\ N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xi} \end{Bmatrix} \quad (13.29)$$

în care N_i sînt funcțiile de modelare date în (13.19). Din nou se procedează potrivit regulilor generale de derivare, obținîndu-se

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \end{Bmatrix}$$

în care s-a luat $z_{,\xi} = z_{,\eta} = x_{,\zeta} = y_{,\zeta} = 0$, iar $z_{,\zeta} = 1$ întrucît $z = \zeta$.

Se notează matricea jacobiană cu

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & 0 \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

în care, ținând seama de o exprimare a coordonatelor x și y în forma (13.20), se obține

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \cdots & N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \cdots & N_{8,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \end{Bmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{Bmatrix} w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix}.$$

Sub formă matriceală, derivatele parțiale ale deplasărilor u , v și w devin

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J^* & 0 & 0 \\ 0 & J^* & 0 \\ 0 & 0 & J^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} \quad (13.31)$$

în care

$$[J^*] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & \frac{-J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & 0 \\ \frac{-J_{21}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & \frac{J_{11}}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Din (13.29) se obține

$$\begin{Bmatrix} u_{, \xi} \\ u_{, \eta} \\ u_{, \zeta} \\ v_{, \xi} \\ v_{, \eta} \\ v_{, \zeta} \\ w_{, \xi} \\ w_{, \eta} \\ w_{, \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} 0 & zN_{i, \xi} & 0 \\ 0 & zN_{i, \eta} & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & -zN_{i, \xi} \\ 0 & 0 & -zN_{i, \eta} \\ 0 & 0 & -N_i \\ N_{i, \xi} & 0 & 0 \\ N_{i, \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xi} \end{Bmatrix}. \quad (13.32)$$

Pe de altă parte, din elasticitate se cunosc relațiile

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{, x} \\ u_{, y} \\ u_{, z} \\ v_{, x} \\ v_{, y} \\ v_{, z} \\ w_{, x} \\ w_{, y} \\ w_{, z} \end{Bmatrix}. \quad (13.33)$$

Fie

$$a_i = J_{11}^* N_{i, \xi} + J_{12}^* N_{i, \eta}$$

$$b_i = J_{21}^* N_{i, \xi} + J_{22}^* N_{i, \eta}$$

Introducând pe (13.32) în (13.31), iar rezultatul substituindu-l în (13.33), se obține

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\} \quad (13.34)$$

în care

$$[B] = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} 0 & za_i & 0 \\ 0 & 0 & -zb_i \\ 0 & zb_i & -za_i \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.35)$$

Relațiile pentru tensiuni sînt date de

$$\{\sigma\} = [E] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}),$$

sau, sub formă explicită

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & \nu_x E_y & 0 & 0 & 0 \\ \nu_y E_x & E_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13.36)$$

în care $\nu_y E_x = \nu_x E_y$ pentru materiale ortotrope, axele x și y fiind direcții principale de ortotropie. Pentru materiale izotrope se ia

$$E_x = E_y = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

În ceea ce privește efectul termic, dacă T_0 este temperatura la suprafața superioară a plăcii, se poate opta pentru următoarea funcție, în care temperatura variază în direcția grosimii plăcii

$$T = 2 \frac{T_0}{h} z.$$

În rest, α_x și α_y sînt coeficienți de dilatare termică.

13.6.2. INTEGRAREA EXPLICITĂ PE DIRECȚIA GROSIMII PLĂCII

Pentru calculul deformațiilor cu relația (13.34) cît și a tensiunilor cu (13.36) trebuie cunoscute deplasările nodale $\{\delta\}$. Acestea se obțin din relația (13.2)

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{R\}$$

dacă se cunosc matricele $\{R\}$ și $[K]$, respectiv $[k]$ -urile. Pentru formarea matricelor $[k]$ se folosește relația (13.15), respectiv

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dx dy dz$$

în care matricea $[B]$ este formulată în (13.35).

În vederea integrării în raport cu variabila z , este convenabil a pune matricea $[B]$ sub forma unei sume, după cum urmează

$$[B] = [B_1] + z[B_2]$$

în care prima matrice este independentă de z , iar $z[B_2]$ este o matrice liniară în z . Explicit, se scrie

$$[B] = \sum_{i=1}^9 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & -b_i \\ 0 & b_i & -a_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

Ținând seama de acest ultim rezultat, matricea $[k]$ devine

$$\begin{aligned} [k] &= \int_V [B_1 + zB_2]^T [E] [B_1 + zB_2] dx dy dz = \\ &= \int_S [B_1]^T [E] [B_1] dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \int_S [B_1]^T [E] [B_2] dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz + \\ &+ \int_S [B_2]^T [E] [B_1] dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz + \int_S [B_2]^T [E] [B_2] dx dy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz. \end{aligned}$$

Întrucât

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = h, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0 \quad \text{și} \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12},$$

rezultă

$$[k] = h \int_S [B_1]^T [E] [B_1] dx dy + \frac{h^3}{12} \int_S [B_2]^T [E] [B_2] dx dy.$$

Din cauza distribuției zero-urilor în $[B_1]$, $[B_2]$ și $[E]$, se poate scrie

$$[k] = \int_S [B_1 + B_2]^T [D] [B_1 + B_2] dx dy = \int_S [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dx dy.$$

unde

$$[\bar{B}] = [B_1 + B_2] = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & -b_i \\ 0 & b_i & -a_i \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (13.37)$$

este o matrice cu dimensiunea 5×27 , iar

$$[D] = \begin{bmatrix} E_x \frac{h^3}{12} & \mu_x E_y \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_y E_x \frac{h^3}{12} & E_y \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Gh^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx}h \end{bmatrix} \quad (13.38)$$

în care $D_{44} = G_{yz}h$ și $D_{55} = G_{zx}h$ sînt rigidități la forfecare, D_{33} este rigiditatea la răsucire, iar D_{11} , D_{12} , D_{21} și D_{22} sînt rigidități la încovoiere, analoge rigidității $E h^3/12(1-\mu^2)$ pentru materiale omogene și izotrope.

Final, se obține

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] |J| d\xi d\eta. \quad (13.39)$$

Pentru formarea matricei $\{R\}$, trebuie evaluate contribuțiile sarcinilor distribuite p și a deformațiilor inițiale ε_0 .

Reluînd relațiile pentru calculul forțelor nodale cauzate de sarcinile p și respectiv de deformațiile ε_0 , date la sfîrșitul par. 13.3, se obține

$$\{r\}_p = \int_s [N]^T \{p\} h dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{p\} h |J| d\xi d\eta$$

$$\{r\}_T = \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV = \int_s [\bar{B}]^T [D] \{\bar{\varepsilon}_0\} dx dy.$$

Ultima relație devine

$$\{r\}_T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{B}] [D] \{\bar{\varepsilon}_0\} |J| d\xi d\eta \quad (13.40)$$

în care

$$\{\bar{\varepsilon}_0\} = \frac{2T_0}{h} \{\alpha_x \alpha_y 0 0 0\}.$$

13.6.3. CALCULUL CURBURILOR, MOMENTELOR ȘI FORTELOR TĂIETOARE

Din elasticitate se știe că

$$\varepsilon_x = -z w_{,xx}$$

$$\varepsilon_y = -z w_{,yy}$$

$$\gamma_{xy} = -2z w_{,xy}$$

din care, dacă se substituie valorile deformațiilor $\{\varepsilon\}$ cu cele din (13.34) se obțin formule pentru curburi

$$w_{,xx} = - \sum_{i=1}^9 a_i \theta_{yi}$$

$$w_{,yy} = \sum_{i=1}^9 b_i \theta_{xi} \quad (13.41)$$

$$w_{,xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 (-b_i \theta_{yi} + a_i \theta_{xi}).$$

Pentru momente, se pleacă de la

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (13.42)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

iar pentru forțele tăietoare transversale se folosesc relațiile

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (13.43)$$

Substituind pe (13.36) în (13.42) și (13.43), rezultă

$$M_x = - \left[D_{11} \left(w_{,xx} + 2 \frac{\alpha_x}{h} T \right) + D_{12} \left(w_{,yy} + 2 \frac{\alpha_y}{h} T \right) \right]$$

$$M_y = - \left[D_{21} \left(w_{,xx} + 2 \frac{\alpha_x}{h} T \right) + D_{22} \left(w_{,yy} + 2 \frac{\alpha_y}{h} T \right) \right]$$

$$M_{xy} = - 2 D_{33} w_{,xy}$$

$$Q_x = D_{44} \gamma_{xz}$$

$$Q_y = D_{55} \gamma_{yz}.$$

13.6.4. PROGRAM DE CALCULATOR

Pentru a ilustra aplicarea teoriei la o problemă concretă, este aleasă, în cele ce urmează, problema încovoierii plăcilor plane. Programul de calculator ce o rezolvă a fost elaborat de inginerii Vladimir Șerban și Dan Gîrbea, în cadrul unui curs de specializare în domeniul analizei tensiunilor și deformațiilor prin elemente finite. Organizat de conducerea Ministerului Transporturilor și Telecomunicațiilor, cursul a inclus prelegeri și aplicații la calculator privind tehnica programării, analiza numerică, algebra matriceală, analiza tensiunilor și deformațiilor prin elemente finite și s-a încheiat printr-un proiect constînd în analizarea la calculator a răspunsului plăcilor plane solicitate la încovoiere.

4 Programul de calcul, listat în anexa acestui capitol (anexa 13.1) asigură analiza prin elemente finite a unor tipuri variate de plăci, subțiri sau groase (grosime variabilă), rezemate oricum, putînd avea forme geometrice oarecare, sarcinile (forțe și cupluri) putînd fi aplicate oriunde pe placă. Este de asemenea prevăzută și prezența solicitărilor termice sau rezultînd din inexactități de montaj, plăcile putînd fi din materiale izotrope sau ortotrope. În cadrul aceleiași testări la calculator, programul permite rezolvarea succesivă a multor plăci de felul celor enumerate,

dar în anexă a fost dat, pentru exemplificare, doar cazul indicat în fig. 13.12, respectiv acela al unei plăci pătrate subțiri, confecționată dintr-un material

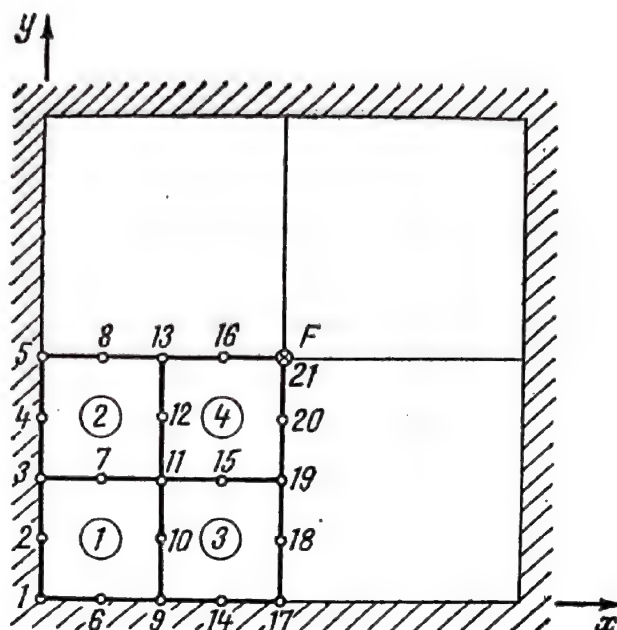


Fig. 13.12.

cu proprietăți izotrope, încastrată pe contur și fiind solicitată de o sarcină concentrată aplicată în centrul plăcii.

13.7. PROBLEME ALE VALORILOR PROPRII (FLAMBAJ ȘI VIBRAȚII)

13.7.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

În probleme de flambaj sau de vibrații sînt de rezolvat sisteme de ecuații de forma

$$[A] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (13.44)$$

în care $[A]$ este o matrice pătrată, $\{X\}$ este matricea coloană a vectorilor proprii, iar λ este un scalar al așa-numitelor valori proprii. Ecuația matriceală (13.44), reprezentînd o problemă a valorilor proprii, poate fi scrisă astfel

$$(A - \lambda I) X = 0 \quad (13.45)$$

în care I este o matrice unitate de același ordin ca și matricea A . Explicit, ecuația (13.45) se scrie

$$\begin{bmatrix} (A_{11} - \lambda) & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & (A_{22} - \lambda) & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} - \lambda & \dots & (A_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = 0$$

care are soluția banală $\{X_1 X_2 \dots X_n\} = 0$. Pentru a avea o soluție nebanală, trebuie ca

$$|A - \lambda I| = 0,$$

determinant care, dezvoltat sub formă polinomială în λ și egalat cu zero, produce așa-numita ecuație caracteristică a matricei. Rădăcinile acestei ecuații reprezintă valorile proprii care dau soluția nebanală a sistemului original al ecuațiilor. În general, bibliotecile mașinilor de calcul au programe care determină atât valorile cât și vectorii proprii prin simpla introducere, ca date de intrare în calculator, a elementelor determinantului

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cînd se calculează răspunsul dinamic al unei structuri, ecuația vibrațiilor armonice libere fără amortizare este

$$(K - \omega^2 [M]) \{D\} = 0 \quad (13.46)$$

În această ecuație, $[K]$ este matricea de rigiditate structurală, cunoscută, $[M]$ este matricea de masă a structurii, ω este pulsația modurilor de vibrație, respectiv șirul valorilor proprii, iar $\{D\}$, respectiv vectorii proprii, constituie amplitudinile deplasărilor corespunzătoare gradelor de libertate. Atît $[K]$ cît și $[M]$ sînt independente de ω .

În cazul flambajului, problema valorilor proprii este reprezentată prin ecuația

$$([K] + \lambda [K_\sigma]) \{\delta D\} = 0 \quad (13.47)$$

în care semnul plus devine minus în probleme cu eforturi de compresiune. În relația (13.47), $[K_\sigma]$ se numește matricea de rigiditate geometrică sau matricea de rigiditate a tensiunilor inițiale, iar $\{\delta D\}$ reprezintă matricea deplasărilor virtuale. Suma $([K] + \lambda [K_\sigma])$ este matricea rigidității totale a structurii.

Prin transformări matriceale adecvate, atît ecuația (13.46) cît și (13.47) pot fi aduse la forma standard a problemei valorilor proprii reprezentată de ecuația (13.45). În esență, matricele $[K]$, $[M]$ și $[K_\sigma]$ constituie „materia primă” a problemelor de valori proprii; în acest capitol, a fost arătat doar modul de alcătuire a matricei clasice de rigiditate structurală.

13.7.2. APLICAȚIE NUMERICĂ

Se dă matricea

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

se cere să se calculeze valorile proprii și vectorii proprii.

Se poate scrie

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 3 & 0 \\ 2 & (-1 - \lambda) & 3 \\ 0 & 3 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

încît

$$-(1 - \lambda)(1 + \lambda)(1 - \lambda) - 9(1 - \lambda) - 3 \times 2(1 - \lambda) = 0.$$

Rezultă valorile proprii

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 4.$$

Pentru $\lambda = 1$, ecuația $AX = \lambda X$ are forma explicită

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{bmatrix}$$

din care se obține

$$X_{11} + 3X_{21} = X_{11}, \text{ cu } X_{21} = 0.$$

$$2X_{11} - X_{21} + 3X_{31} = X_{21}, \text{ cu } X_{31} = -\frac{2}{3}X_{11}$$

încît vectorii proprii sînt

$$\begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Pentru $\lambda = -4$ se obține

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix} = -4 \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix}$$

din care rezultă

$$X_{12} + 3X_{22} = -4X_{12}, \text{ cu } X_{22} = -\frac{5}{3}X_{12}$$

$$2X_{12} - X_{22} + 3X_{32} = -4X_{22}, \text{ cu } X_{32} = X_{12}.$$

Vectorii proprii sînt

$$\begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix} = \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Pentru $\lambda = 4$ se obține

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{Bmatrix} = 4 \begin{Bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{Bmatrix}$$

din care rezultă

$$X_{13} + 3X_{23} = 4X_{13}, \text{ cu } X_{23} = X_{13}$$

$$2X_{13} - X_{23} + 3X_{33} = 4X_{23}, \text{ cu } X_{33} = X_{13}.$$

Vectorii proprii sînt

$$\begin{Bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{Bmatrix} = \alpha_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

PROGRAMUL PENTRU ANALIZĂ PRIN ELEMENTE FINITE A TENSIUNILOR ȘI DEPLASĂRILOR ÎN PLĂCILE PLANE

FORTRAN IV (VERLO37) SOURCE LISTING

06/29/76 PAGE 0001

PROGRAM ELFINT

```

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
PROGRAM ELABORAT DE ING. VLADIMIR SERBAN SI ING. DAN GARBEA, M.T.TC.
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G, D-Z)
DIMENSION HTITLE(40)
COMMON /B1/IBCON(25,3)
COMMON /B2/ID(4,8)
COMMON /B3/X(25),Y(25)
COMMON /B4/H(25),ALFA(25),BETA(25)
COMMON /B5/THICK(25)
COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
COMMON /B7/XL(10),YL(10)
COMMON /B8/B(5,30)
COMMON /B9/D(5,5)
COMMON /B10/U(5,5)
COMMON /B11/P(10)
COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
COMMON /B13/AX,AY
COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,NBAND
COMMON /B15/SE(30,30)
COMMON /B16/RE(30)
COMMON /B17/S(75,50)
COMMON /B18/R(75)
COMMON /B19/RR(75)
COMMON /B20/SM(4,3,27)
COMMON /B21/RM(4,3)
COMMON /B22/XI,ETA,THK,TEMP,PSIZ,DETJAC
PRINT 100
PRINT 105
PRINT 100
READ(97,110)NPROBL
DO 15 IPROBL=1,NPROBL
READ(97,115)HTITLE
PRINT 120,IPROBL
PRINT 125,HTITLE
READ(97,130)NUMNOD,NUMEL,NDOF,NNODEL
PRINT 135,NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF
READ(97,140)DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY,AX,AY
PRINT 145
PRINT 150
PRINT 155
PRINT 160
PRINT 165
PRINT 170
PRINT 175,DX,DY,DXY,GNUX,SX,SY,AX,AY
CALL INPUT
CALL FORMK

```



```

51 PRINT 195
52 PRINT 180, NEQ, MBAND
53 CALL SOLVE
54 PRINT 185
55 L=0
56 DO 5 I=1, NUMNOD
57 DO 5 J=1, NDOF
58 L=L+1
59 IJ=IBCON(I,J)
60 IF(IJ.EQ.0)RR(L)=0.
61 IF(IJ.GT.0)RR(L)=R(IJ)
62 5 CONTINUE
63 DO 10 N=1, NUMNOD
64 M=NDOF*N
65 10 PRINT 190, N, X(N), Y(N), RR(M-2), RR(M-1), RR(M)
66 CALL MOMENT
67 15 CONTINUE
68 100 FORMAT(11X, 109(1H*), //)
69 105 FORMAT(11X, 'I N C O V O I E R E A P L A C I L O R P L A N E , R
70 1 E Z O L V A T A P R I N E L E M E N T E F I N I T E , //)
71 110 FORMAT(12)
72 115 FORMAT(20A4)
73 120 FORMAT(////, 26X, 'P R O B L E M A ', 12/26X, 19(1H*))
74 125 FORMAT(26X, 20A4/26X, 20A4)
75 130 FORMAT(415)
76 135 FORMAT(20X, 'PLACA AREI, 12, 1 ELEMENTE SI ', 12, 1 NODURI, ' UN ELEMENT
77 1 AREI, 12, 1 NODURI, ' UN NOD AREI, 12, 1 GRADE DE LIBERTATEI)
78 140 FORMAT(8F10.0)
79 145 FORMAT(/, 56X, 'PROPRIETATI MECANICEI/56X, 20(1H*), //)
80 150 FORMAT(/, 7X, 'RIGIDITATI LA INCMOIERE RIGID. LA TORS. COEFICIE
81 INTUL RIGIDITATI LA PORFECARE COEF. DE DILATARE LINIARI)
82 155 FORMAT(7X, 27(1H*), 2X, 19(1H*), 16X, 27(1H*), 4X, 26(1H*))
83 160 FORMAT(12X, 'DX', 13X, 'DY', 12X, 'DXY', 11X, 'LUI', 13X, 'SX', 13X, 'SY', 11
84 1X, 'ALFA X', 9X, 'ALFA Y')
85 165 FORMAT(/, 9X, '(DAN*CM)', 7X, '(DAN*CM)', 7X, '(DAN*CM)', 7X, 'POISSON ',
86 16X, '(DAN/CM)', 7X, '(DAN/CM)', 7X, '(GRAD FAHRENHEIT LA -1)')
87 170 FORMAT(7X, 117(1H*))
88 175 FORMAT(7X, 8(D12.6, 3X), //)
89 180 FORMAT(/, 17X, 'DIMENSIUNILE MATRICII DE RIGIDITATE A PLACII SINTI
90 1 NEQ=1, 13, 1 LINII, 1 MBAND=1, 13, 1 COLOANEI/70X, 7(1H*), 9X, 9(1H*))
91 185 FORMAT(/, 51X, 'DEPLASABILE IN NODURILE PLACII/51X, 30(1H*)//25X, 1N
92 10DI, 7X, 1X, 13X, 1Y, 10X, 1SAGEATA ROTIREA IN ROTIREA INI/59
93 2X, 1IN DIR, Z JURUL AXEI Y JURUL AXEI X//34X, 1(CM), 10X, 1(CM)
94 3, 9X, 1(CM), 16X, 1(RADIANI)/25X, 75(1H*), //)
95 190 FORMAT(25X, 13, 2(3X, D10.4), 3(3X, D12.5))
96 195 FORMAT(/, 58X, 'R E Z U L T A T E I/58X, 17(1H*), //)
97 STOP
98 END

```

```

1      SUBROUTINE INPUT
2      IMPLICIT REAL*8(A-G,D-Z)
3      COMMON /B1/IBCON(25,3)
4      COMMON /B2/ID(4,8)
5      COMMON /B3/X(25),Y(25)
6      COMMON /B4/W(25),ALFA(25),BETA(25)
7      COMMON /B5/THICK(25)
8      COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
9      COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,INNODEL,NDQF,NEQ,MBAND
10     DO 5 N=1,NUMNOD
11     READ(97,100)N,(IBCON(N,I),I=1,NDQF),X(N),Y(N),W(N),ALFA(N),BETA(N)
12     1,THICK(N),PSI(N),TEMP(N)
13     5 CONTINUE
14     DO 10 M=1,NUMEL
15     10 READ(97,105)M,(ID(M,I),I=1,INNODEL)
16     PRINT 110
17     PRINT 115
18     PRINT 120
19     PRINT 125
20     PRINT 130
21     DO 15 N=1,NUMNOD
22     PRINT 135,N,X(N),Y(N),THICK(N),PSI(N),TEMP(N),(IBCON(N,I),I=1,NDQF)
23     1,ALFA(N),BETA(N)
24     15 CONTINUE
25     PRINT 140
26     PRINT 145
27     PRINT 150
28     DO 20 M=1,NUMEL
29     20 PRINT 155,M,(ID(M,I),I=1,INNODEL)
30     100 FORMAT(I4,3I2,5F10.0,3F5.0)
31     105 FORMAT(I0I5)
32     110 FORMAT(60X,1DATE,NODALE1/60X,11(1H.),/)
33     115 FORMAT(/,15X,1NOD,7X,1X,12X,1Y,8X,1GRDS,1,3X,1PRES,1,4X,1TEMP,
34     1CONDIT111,4X,1FORA,1,2(5X,8HMENTUL))
35     120 FORMAT(74X,1LA,1IN DIRECTIA IN LUNGUL,1IN LUNGUL1)
36     125 FORMAT(72X,1LIMITA,7X,1ZI,9X,1AXEI YI,7X,1AXEI XI//24X,1(CM)1,7X,
37     1(CM)1,6X,1(CM) (DAN/CM2) (GRAD F)1,12X,1(DAN) (DAN*CM/CM) (D
38     2AN*CM/CM)1)
39     130 FORMAT(15X,101(1H.),/)
40     135 FORMAT(16X,12,3X,2(D10,4,3X),2(F5,2,3X),F6,1,3X,3(11,1X),2X,3(D10,
41     13,3X))
42     140 FORMAT(/,44X,1NODURILE PLACII -EXPLORATE IN SENS ANTIOPAR,1/44X,43
43     1(1H.),/)
44     145 FORMAT(/,52X,1NR,1NUMERELE,1NODURILOR/50X,1ELEMENT,1,2,
45     13,4,5,6,7,8))
46     150 FORMAT(50X,32(1H.),/)
47     155 FORMAT(52X,12,4X,8(1X,12))
48     RETURN
49     END

```



```

1  SUBROUTINE FORMK
2  IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
3  DIMENSION GW(2),KK(50)
4  COMMON /B1/IBCON(25,3)
5  COMMON /B2/ID(4,8)
6  COMMON /B3/X(25),Y(25)
7  COMMON /B4/W(25),ALFA(25),BETA(25)
8  COMMON /B5/THICK(25)
9  COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
10 COMMON /B7/XL(10),YL(10)
11 COMMON /B8/B(5,30)
12 COMMON /B9/D(5,5)
13 COMMON /B10/U(5,5)
14 COMMON /B11/P(10)
15 COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
16 COMMON /B13/AX,AY
17 COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
18 COMMON /B15/SE(30,30)
19 COMMON /B16/RE(30)
20 COMMON /B17/S(75,50)
21 COMMON /B18/R(75)
22 COMMON /B20/SM(4,3,27)
23 COMMON /B21/RM(4,3)
24 COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
25 DATA GW/1.,1./
26 NEC=0
27 DO 10 N=1,NUMNOD
28 DO 10 I=1,NDOF
29 IF (IBCON(N,I),GT,0)GO TO 3
30 NEC=NEC+1
31 IBCON(N,I)=NEC
32 GO TO 10
33 5 IBCON(N,I)=0
34 10 CONTINUE
35 LMAX=NNODEL*NDOF
36 MBAND=0
37 DO 25 M=1,NUMEL
38 L=0
39 DO 15 I=1,NNODEL
40 II=ID(M,I)
41 DO 15 J=1,NDOF
42 L=L+1
43 15 KK(L)=IBCON(II,J)
44 MAX=0
45 MIN=10000
46 DO 20 I=1,LMAX
47 IF(KK(I),EQ,0)GO TO 20
48 IF(KK(I),GT,MAX)MAX=KK(I)
49 IF(KK(I),LT,MIN)MIN=KK(I)
50 20 CONTINUE

```

```

51      NDIF=MAX-MIN+1
52      IF(NDIF.GT.NBAND)NBAND=NDIF
53      .25 CONTINUE
54      DO 30 I=1,75
55      R(I)=0.
56      DO 30 J=1,50
57      .30 S(I,J)=0.
58      DO 130 M=1,NUMEL
59      XC=0.
60      YC=0.
61      DO 35 I=1,NNODEL
62      J=ID(M,I)
63      XC=XC+X(J)
64      .35 YC=YC+Y(J)
65      XC=XC/DFLOAT(NNODEL)
66      YC=YC/DFLOAT(NNODEL)
67      DO 40 I=1,NNODEL
68      J=ID(M,I)
69      XL(I)=X(J)-XC
70      .40 YL(I)=Y(J)-YC
71      IMAX=(NNODEL+1)*NDOF
72      JMAX=IMAX+1
73      DO 45 I=1,IMAX
74      RE(I)=0.
75      DO 45 J=1,JMAX
76      .45 SE(I,J)=0.
77      MACAZI=1
78      XI=0.
79      ETA=0.
80      DO 95 II=1,2
81      DO 95 JJ=1,2
82      CALL SHAPE(II,JJ,M,MACAZI)
83      IF(II.EQ.1.AND.JJ.EQ.1)GO TO 53
84      DO 50 I=1,NNODEL
85      J=ID(M,I)
86      IF(THICK(I).EQ.THICK(J))GO TO 50
87      GO TO 55
88      .50 CONTINUE
89      GO TO 60
90      .55 MACAZ=0
91      CALL ELAST(MACAZ)
92      DO 70 K=1,5
93      DO 70 L=1,JMAX
94      DUM1=0.
95      DO 65 I=K,5
96      .65 DUM1=DUM1+U(K,I)*B(I,L)
97      .70 B(K,L)=DUM1
98      DUM1=GW(II)*GW(JJ)*DETJAC
99      IF(PSI2.EQ.0.)GO TO 80
100     DO 75 NLIN=1,IMAX,3

```



```

101      L=NLIN/3+1
102      75 SE(NLIN,JMAX)*SE(NLIN,JMAX)+P(L)*PSIZ*DUM1.
103      80 DO 90 NLIN=1,IMAX
104      DO 90 NCOL,NLIN,JMAX
105      DUM2=0.
106      DO 85 L=1,5
107      85 DUM2=DUM2+B(L,NLIN)*B(L,NCOL)
108      90 SE(NLIN,NCOL)*SE(NLIN,NCOL)+DUM2*DUM1
109      95 CONTINUE
110      DO 100 I=2,IMAX
111      DO 100 J=1,I
112      100 SE(I,J)*SE(J,I)
113      DO 110 K=1,NDCF
114      J=IMAX-K
115      I=JMAX-K
116      DO 110 L=1,J
117      DUM1=SE(L,I)/SE(I,I)
118      DO 105 II=1,J
119      105 SE(L,II)=SE(L,II)-SE(I,II)*DUM1
120      110 SE(L,JMAX)*SE(L,JMAX)-SE(I,JMAX)*DUM1
121      II=NNODEL*NDOF
122      DO 115 I=1,II
123      115 RE(I)*SE(I,JMAX)
124      DO 125 I=1,NDCF
125      K=IMAX-NDOF+I
126      DO 120 J=1,IMAX
127      120 SM(M,I)*SE(K,J)
128      125 RM(M,I)*SE(K,JMAX)
129      CALL ASEMBL(M)
130      130 CONTINUE
131      RETURN
132      END

```

```

1  SUBROUTINE SHAPE(II,JJ,M,MACAZI)
2  IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
3  REAL*8 JAC(3,3)
4  DIMENSION AA(2),XII(8),ETAI(10),PXI(10),PYI(10)
5  DIMENSION BB(2)
6  COMMON /B2/ID(4,8)
7  COMMON /B5/THICK(25)
8  COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
9  COMMON /B7/XL(10),YL(10)
10 COMMON /B8/B(3,30)
11 COMMON /B11/P(10)
12 COMMON /B13/AX,AY
13 COMMON /B14/NUMEL,NUMNUD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
14 COMMON /B22/XI,ETA,THIR,TEMPR,PSIZ,DETJAC
15 DATA BB/-0.577350269189625765,0.577350269189625765/
16 DATA ETAI/-1.,-1.,-1.,0.,1.,1.,1.,0.,-1.,-1./
17 EQUIVALENCE (XII(1),ETAI(3))
18 AA(II)=BB(II)
19 AA(JJ)=BB(JJ)
20 IF(MACAZI.NE.0)GO TO 5
21 AA(II)=XI
22 AA(JJ)=ETA
23 5 AAII=1.-AA(II)**2
24  AAJJ=1.-AA(JJ)**2
25  DO 25 I=1,NNODEL
26    DUM1=1.+XII(I)*AA(II)
27    DUM2=1.+ETAI(I)*AA(JJ)
28    DUM3=XII(I)*AA(II)+ETAI(I)*AA(JJ)+1.
29    GO TO(10,15,10,20,10,19,10,20),I
30 10 P(I)=DUM1*DUM2*DUM3/4.
31    PXI(I)=(DUM1+DUM3)*XII(I)*DUM2/4.
32    PYI(I)=(DUM2+DUM3)*ETAI(I)*DUM1/4.
33    GO TO 25
34 15 P(I)=AAII*DUM2/2.
35    PXI(I)=-DUM2*AA(II)
36    PYI(I)=AAII*ETAI(I)/2.
37    GO TO 25
38 20 P(I)=AAJJ*DUM1/2.
39    PXI(I)=AAJJ*XII(I)/2.
40    PYI(I)=-DUM1*AA(JJ)
41 25 CONTINUE
42    P(9)=AAII*AAJJ
43    PXI(9)=-2.*AA(II)*AAJJ
44    PYI(9)=-2.*AA(JJ)*AAII
45    DO 30 I=1,3
46    DO 30 J=1,3
47 30 JAC(I,J)=0.
48    DO 25 I=1,NNODEL
49    JAC(1,1)=JAC(1,1)+PXI(I)*XL(I)
50    JAC(1,2)=JAC(1,2)+PXI(I)*YL(I)

```



```

51 JAC(2,1)=JAC(2,1)+PYI(1)*XL(1)
52 35 JAC(2,2)=JAC(2,2)+PYI(1)*YL(1)
53 JAC(3,3)=1.
54 DETJAC=JAC(1,1)*JAC(2,2)-JAC(1,2)*JAC(2,1)
55 DUM1=JAC(1,1)/DETJAC
56 JAC(1,1)=JAC(2,2)/DETJAC
57 JAC(1,2)=-JAC(1,2)/DETJAC
58 JAC(2,1)=-JAC(2,1)/DETJAC
59 JAC(2,2)=DUM1
60 NNCD=NNODEL+1
61 DO 40 L=1,NNCD
62 J=3*L
63 I=J-1
64 IJ=I-1
65 B(1,IJ)=0.
66 B(1,I)=JAC(1,1)*PXI(L)+JAC(1,2)*PYI(L)
67 B(1,J)=0.
68 B(2,IJ)=0.
69 B(2,I)=0.
70 B(2,J)=-JAC(2,1)*PXI(L)-JAC(2,2)*PYI(L)
71 B(3,IJ)=0.
72 B(3,I)=-B(2,J)
73 B(3,J)=-B(1,I)
74 B(4,IJ)=B(3,I)
75 B(4,I)=0.
76 B(4,J)=-P(L)
77 B(5,IJ)=B(1,I)
78 B(5,I)=P(L)
79 40 B(5,J)=0.
80 THIK=0.
81 TEMPR=0.
82 PSIZ=0.
83 DO 45 I=1,NNODEL
84 J=ID(M,I)
85 THIK=THIK+P(I)*THICK(J)
86 TEMPR=TEMPR+P(I)*TEMP(J)
87 45 PSIZ=PSIZ+P(I)*PSI(J)
88 K=NNOD*NNODF+1
89 TT=2.*TEMPR/THIK
90 B(1,K)=AX*TT
91 B(2,K)=AY*TT
92 B(3,K)=0.
93 B(4,K)=0.
94 B(5,K)=0.
95 RETURN
96 END

```

```

1  SUBROUTINE ELAST(MACAZ)
2  IMPLICIT REAL*8(A-G,D=4)
3  COMMON /B3/THICK(25)
4  COMMON /B9/D(3,5)
5  COMMON /B10/U(5,5)
6  COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
7  COMMON /B22/XI,ETA,THIK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
8  DO 5 I=1,5
9  DO 5 J=1,5
10  D(I,J)=0.
11  D(1,1)=DX
12  D(1,2)=GNUX*DY
13  D(2,1)=D(1,2)
14  D(2,2)=DY
15  D(3,3)=DXY
16  D(4,4)=SX
17  D(5,5)=SY
18  DUM1=THIK/THICK(1)
19  DUM2=DUM1**3
20  D(1,1)=D(1,1)*DUM2
21  D(1,2)=D(1,2)*DUM2
22  D(2,1)=D(1,2)
23  D(2,2)=D(2,2)*DUM2
24  D(3,3)=D(3,3)*DUM2
25  D(4,4)=D(4,4)*DUM1
26  D(5,5)=D(5,5)*DUM1
27  IF(MACAZ.EQ.1)RETURN
28  DO 10 I=1,5
29  DO 10 J=1,5
30  U(I,J)=0.
31  U(1,1)=DSQRT(D(1,1))
32  U(1,2)=D(1,2)/U(1,1)
33  U(2,2)=DSQRT(D(2,2)-U(1,2)**2)
34  U(2,3)=DSQRT(D(3,3))
35  U(4,4)=DSQRT(D(4,4))
36  U(5,5)=DSQRT(D(5,5))
37  RETURN
38  END

```



```
1 SUBROUTINE ASEMBL(H)
2 IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
3 DIMENSION KK(30)
4 COMMON /B1/IBCON(25,3)
5 COMMON /B2/ID(4,8)
6 COMMON /B4/W(25),ALFA(25),BETA(25)
7 COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEC,NDOF,NEQ,MBAND
8 COMMON /B15/SE(30,30)
9 COMMON /B16/RE(30)
10 COMMON /B17/S(75,50)
11 COMMON /B18/R(75)
12 I=C
13 K1=NNODEC*NDOF
14 DO 20 K=1,NNODEC
15 NNCD=ID(M,K)
16 DO 20 L=1,NDOF
17 I=I+1
18 KK(I)=IBCON(NNCD,L)
19 GO TO (5,10,15),L
20 5 RE(I)=RE(I)+W(NNCD)
21 GO TO 20
22 10 RE(I)=RE(I)+ALFA(NNCD)
23 GO TO 20
24 15 RE(I)=RE(I)+BETA(NNCD)
25 20 CONTINUE
26 DO 25 I=1,K1
27 IF(KK(I).EQ.0)GO TO 25
28 II=KK(I)
29 R(II)=R(II)+RE(I)
30 DO 25 J=1,K1
31 IF(KK(J).LT.II)GO TO 25
32 JJ=KK(J)-II+1
33 S(II,JJ)=S(II,JJ)+SE(I,J)
34 25 CONTINUE
35 RETURN
36 ENC
```

```

1  SUBROUTINE SOLVE
2  IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
3  COMMON /B14/NUMEL,NUMID,INODEL,NDOF,NEQ,MBAND
4  COMMON /B17/S(75,50)
5  COMMON /B18/R(75)
6  DO 15 N=1,NEQ
7  DO 10 L=2,MBAND
8  IF(S(N,L).EQ.0.)GO TO 10
9  I=N+L-1
10 DUM=S(N,L)/S(N,1)
11 J=C
12 DO 5 K=L,MBAND
13 J=J+1
14 5 S(I,J)=S(I,J)-DUM*S(N,K)
15 S(N,L)=DUM
16 10 CONTINUE
17 15 CONTINUE
18 DO 25 N=1,NEQ
19 DO 20 L=2,MBAND
20 IF(S(N,L).EQ.0.)GO TO 20
21 I=N+L-1
22 R(I)=R(I)-S(N,L)*R(N)
23 20 CONTINUE
24 25 R(N)=R(N)/S(N,1)
25 DO 35 M=2,NEQ
26 N=NEQ+1-M
27 DO 30 L=2,MBAND
28 IF(S(N,L).EQ.0.)GO TO 30
29 K=N+L-1
30 R(N)=R(N)-S(N,L)*R(K)
31 30 CONTINUE
32 35 CONTINUE
33 RETURN
34 END

```



```

1  SUBROUTINE MOPENT
2  IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
3  DIMENSION DISP(30),CURV(5),XII(8),ETA1(10)
4  DIMENSION CMX(25),CMY(25),CMXY(25),CMHAX(25),CMHIN(25),CMXYM(25)
5  DIMENSION GRACE(25)
6  COMMON /B1/IBCON(25,3)
7  COMMON /B2/ID(4,8)
8  COMMON /B3/X(25),Y(25)
9  COMMON /B5/THICK(25)
10 COMMON /B6/PSI(25),TEMP(25)
11 COMMON /B7/XL(10),YL(10)
12 COMMON /B8/B(5,30)
13 COMMON /B9/D(5,5)
14 COMMON /B10/U(5,5)
15 COMMON /B11/P(10)
16 COMMON /B12/DX,DY,GNUX,DXY,SX,SY
17 COMMON /B13/AX,AY
18 COMMON /B14/NUMEL,NUMNOD,NNODEL,NDOF,NEQ,MBAND
19 COMMON /B19/RR(75)
20 COMMON /B20/SM(4,3,27)
21 COMMON /B21/RM(4,3)
22 COMMON /B22/XI,ETA,THK,TEMPR,PSIZ,DETJAC
23 DATA PI,G/3.14159265,57.2957795/
24 DATA ETA1/=1.,1.,1.,0.,1.,1.,1.,0.,1.,1./
25 EQUIVALENCE (XII(1),ETA1(3))
26 PRINT 100
27 PRINT 105
28 PRINT 110
29 PRINT 115
30 DO 65 M=1,NUMEL
31 DO 5 I=1,NNODEL
32 II=3*I
33 JJ=3*ID(M,I)
34 DISP(II-2)=RR(JJ-2)
35 DISP(II-1)=RR(JJ-1)
36 5 DISP(II)=RR(JJ)
37 A1=SM(M,1,25)
38 A2=SM(M,1,26)
39 A3=SM(M,1,27)
40 B1=SM(M,2,25)
41 B2=SM(M,2,26)
42 B3=SM(M,2,27)
43 C1=SM(M,3,25)
44 C2=SM(M,3,26)
45 C3=SM(M,3,27)
46 DISP(25)=0.
47 DISP(26)=0.
48 DISP(27)=0.
49 JMAX=NNODEL*NDOF
50 DUM1=0.

```

```

51 DUM2=0.
52 DUM3=0.
53 DO 25 I=1,NDOF
54 DO 25 J=1,JMAX
55 GO TO (10,15,20),I
10 DUM1=DUM1+SM(M,I,J)*DISP(J)
57 GO TO 25
15 DUM2=DUM2+SM(M,I,J)*DISP(J)
59 GO TO 25
20 DUM3=DUM3+SM(M,I,J)*DISP(J)
61 25 CONTINUE
62 R1=RM(M,1)=DUM1
63 R2=RM(M,2)=DUM2
64 R3=RM(M,3)=DUM3
65 DUM=A1*B2*C3+A2*B3*C1+A3*B1*C2-A3*B2*C1-A1*B3*C2-A2*B1*C3
66 IF(DUM)30,35,30
30 DISP(25)=(R1*B2*C3+A2*B3*R3+A3*R2*C2-A3*B2*R3-R1*B3*C2-A2*R2*C3)/D
68 IUM
69 DISP(26)=(A1*R2*C3+R1*B3*C1+A3*B1*R3-A3*R2*C1-A1*B3*R3-R1*B1*C3)/D
70 IUM
71 DISP(27)=(A1*B2*R3+A2*B2*C1+R1*B1*C2-R1*B2*C1-A1*R2*C2-A2*B1*R3)/D
72 IUM
73 35 XC=0.
74 YC=0.
75 DO 40 I=1,NNODEL
76 J=ID(M,I)
77 XC=XC+X(J)
78 YC=YC+Y(J)
40 XC=XC/DFLOAT(NNODEL)
79 YC=YC/DFLOAT(NNODEL)
80 DO 45 I=1,NNODEL
81 J=ID(M,I)
82 XL(I)=X(J)-XC
83 YL(I)=Y(J)-YC
45 IMAX=(NNODEL+1)*NDOF+1
85 JMAX=JMAX+1
86 I1=1
87 JJ=2
88 MACAZ1=0
89 MACAZ=1
90 DO 60 III=1,NNODEL
91 XI=XII(III)
92 ETA=ETAI(III)
93 CALL SHAPE(II,JJ,M,MACAZ1)
94 DO 50 I=1,NDOF
95 50 CURV(I)=0.
96 DO 55 I=1,NDOF
97 CURV(I)=CURV(I)+B(I,IMAX)
98 DO 55 J=1,JMAX
99 55 CURV(I)=CURV(I)+B(I,J)*DISP(J)
100

```


A FORTRAN IV (VERLO37) SOURCE LISTING: MOMENT SUBROUTINE

06/29/76

PAGE 0014

```

101 CALL ELAST(MACAZ)
102 J=ID(M,III)
103 BMX=D(1,1)*CURV(1)+D(1,2)*CURV(2)
104 BMY=D(2,2)*CURV(2)+D(2,1)*CURV(1)
105 TMXY=D(3,3)*CURV(3)
106 CMX(J)=BMX
107 CMY(J)=BMY
108 CMXY(J)=TMXY
109 DUM=DSQRT((BMX-BMY)**2+4.*(TMXY**2))
110 BMFAX=0.5*(BMX+BMY+DUM)
111 BMFIN=0.5*(BMX+BMY-DUM)
112 TMXYM=0.5*(BMFAX-BMFIN)
113 CMFAX(J)=BMFAX
114 CMFIN(J)=BMFIN
115 CMXYM(J)=TMXYM
116 S1=2.*TMXY
117 CD=BMY-BMX
118 A=CATAN2(S1,CD)
119 IF(A.LT.0.)A=2.*PI+A
120 ANGLE=G*A/2.
121 GRADE(J)=ANGLE
122 60 CONTINUE
123 65 CONTINUE
124 DO 70 I=1,NUMNOD
125 70 PRINT 120,I,X(I),Y(I),CMX(I),CMY(I),CMXY(I),CMFAX(I),CMFIN(I),CMXYM
126 1M(I),GRADE(I)
127 PRINT 125
128 100 FORMAT(//,47X,'VALORILE MOMENTELOR IN NOOURILE PLACII//47X,38(1H=)
129 1,/)
130 105 FORMAT(4X,'NOD',6X,'X',11X,'Y',12X,'MX',12X,'MY',11X,'MXY',11X,'M
131 1MAX',10X,'MFIN',9X,'MXYMAX',8X,'MNGHI')
132 110 FORMAT(/,12X,'(CM)',8X,'(CM)',3X,6(3X,11H(DAN*CM/CM)),5X,'(GRADE)'
133 1)
134 115 FORMAT(4X,125(1H=)'/)
135 120 FORMAT(4X,13,2(2X,D10.3),7(2X,D12.5))
136 125 FORMAT(1H)
137 RETURN
138 END

```

 INCOVDIEREA PLACILOR PLANE, REZOLVATA PRIN ELEMENTE FINITE

PROBLEMA

 PLACA PATRATA SUBTIRE, IZOTROPICA, INCASTRATA PE CONTUR, INCARCATA CU O SARCINA
 CONCENTRATA IN CENTRUL PLACII
 PLACA ARE 4 ELEMENTE SI 21 NODURI, UN ELEMENT ARE 8 NODURI, UN NUD ARE 3 GRADE DE LIBERTATE

PROPRIETATI MECANICE

RIGIDITATI LA INCOVDIERE		RIGID. LA TORS, COEFICIENTUL		RIGIDITATI LA FORFECARE		COEF. DE DILATARE LINIARA	
DX	DY	DXY	LUI	SX	SY	ALFA X	ALFA Y
(DAN*CM)	(DAN*CM)	(DAN*CM)	POISSON	(DAN/CM)	(DAN/CM)	(GRAD FAHRENHEIT LA -1)	
0,649038E 03	0,649038E 03	0,227813E 03	0,300000E 00	0,121500E 06	0,121500E 06	0,700000E-05	0,700000E-05

DATE NODALE

NOD	X	Y	GRDS. - PRES.	TEMP.	CONDITII LA LIMITA	FORTA IN DIRECTIA Z	MOMENTUL IN LUNGUL AXEI Y	MOMENTUL IN LUNGUL AXEI X
	(CM)	(CM)	(CM)	(DAN/CM2)	(GRAD F)	(DAN)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)
1	0,0000E 00	0,0000E 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
2	0,0000E 00	0,5000E 01	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
3	0,0000E 00	0,1000E 02	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
4	0,0000E 00	0,1500E 02	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
5	0,0000E 00	0,2000E 02	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
6	0,5000E 01	0,0000E 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
7	0,5000E 01	0,1000E 02	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000E 00	0,0000E 00
8	0,5000E 01	0,2000E 02	0,15	0,00	0,0	0 0 1	0,0000E 00	0,0000E 00
9	0,1000E 02	0,0000E 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
10	0,1000E 02	0,5000E 01	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000E 00	0,0000E 00
11	0,1000E 02	0,1000E 02	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000E 00	0,0000E 00
12	0,1000E 02	0,1500E 02	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000E 00	0,0000E 00
13	0,1000E 02	0,2000E 02	0,15	0,00	0,0	0 0 1	0,0000E 00	0,0000E 00
14	0,1500E 02	0,0000E 00	0,15	0,00	0,0	1 1 1	0,0000E 00	0,0000E 00
15	0,1500E 02	0,5000E 01	0,15	0,00	0,0	0 0 0	0,0000E 00	0,0000E 00

NODURILE PLACII -EXPLORATE IN SENS ANTIORAR

NR. ELEMENT	NUMERELE				NODURILOR			
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	6	9	10	11	7	3	2
2	3	7	11	12	13	8	5	4
3	7	14	17	18	19	15	11	10
4	11	15	19	20	21	16	13	12

REZULTATE *****

DIMENSIUNILE MATRIȚII DE RIGIDITATE A PLACII SINTI NEQ= 28 LINII MBAND= 20 COLOANE

DEPLASARILE IN NODURILE PLACII *****

NOD	Y		SAGEATA		ROTIREA IN		ROTIREA IN	
	IN DIR. Z		IN DIR. Z		JURUL AXEI Y		JURUL AXEI X	
	(CM)	(CM)	(CM)		(RADIANI)			
1	0.00000 00	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
2	0.00000 00	0.00000 01	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
3	0.00000 00	0.10000 02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
4	0.00000 00	0.15000 02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
5	0.00000 00	0.20000 02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
6	0.50000 01	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
7	0.50000 01	0.10000 02	0.464740-03	-0.170690-03	0.675070-04	0.675070-04	0.000000 00	0.000000 00
8	0.50000 01	0.20000 02	0.258730-03	-0.342620-03	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
9	0.10000 02	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
10	0.10000 02	0.50000 01	0.464740-03	-0.675070-04	0.170690-03	0.170690-03	0.000000 00	0.000000 00
11	0.10000 02	0.10000 02	0.155370-02	-0.249200-03	0.249200-03	0.249200-03	0.000000 00	0.000000 00
12	0.10000 02	0.15000 02	0.259600-02	-0.401830-03	0.401830-03	0.401830-03	0.000000 00	0.000000 00
13	0.10000 02	0.20000 02	0.301620-02	-0.438720-03	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
14	0.15000 02	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
15	0.15000 02	0.10000 02	0.259600-02	-0.157010-03	0.401830-03	0.401830-03	0.000000 00	0.000000 00
16	0.15000 02	0.20000 02	0.552820-02	-0.479480-03	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
17	0.20000 02	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
18	0.20000 02	0.50000 01	0.258730-03	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
19	0.20000 02	0.10000 02	0.301620-02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
20	0.20000 02	0.15000 02	0.552820-02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
21	0.20000 02	0.20000 02	0.694630-02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00

VALORILE MOMENTELOR IN NODURILE PLACII *****

	(CM)	(CM)	(CM)	(RADIAN)	
1	0.00000 00	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
2	0.00000 00	0.50000 01	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
3	0.00000 00	0.10000 02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
4	0.00000 00	0.15000 02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
5	0.00000 00	0.20000 02	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
6	0.50000 01	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
7	0.50000 01	0.10000 02	0.464740-03	-0.170690-03	0.675070-04
8	0.50000 01	0.20000 02	0.258730-03	-0.342620-03	0.000000 00
9	0.10000 02	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
10	0.10000 02	0.50000 01	0.464740-03	-0.675070-04	0.170690-03
11	0.10000 02	0.10000 02	0.155370-02	-0.249200-03	0.249200-03
12	0.10000 02	0.15000 02	0.257600-02	-0.401930-03	0.157010-03
13	0.10000 02	0.20000 02	0.301620-02	-0.438720-03	0.000000 00
14	0.15000 02	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
15	0.15000 02	0.10000 02	0.259600-02	-0.157010-03	0.401930-03
16	0.15000 02	0.20000 02	0.552820-02	-0.479480-03	0.000000 00
17	0.20000 02	0.00000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
18	0.20000 02	0.50000 01	0.258730-03	0.000000 00	0.342620-03
19	0.20000 02	0.10000 02	0.301620-02	0.000000 00	0.438720-03
20	0.20000 02	0.15000 02	0.552820-02	0.000000 00	0.479480-03
21	0.20000 02	0.20000 02	0.694630-02	0.000000 00	0.000000 00

VALORILE MOMENTELOR IN NODURILE PLACII

NOD	X	Y	MX	MY	MAX	MIN	MAX	MIN	UNGHII
	(CM)	(CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(DAN*CM/CM)	(GRADE)
1	0.0000 00	0.0000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00	0.000000 00
2	0.0000 00	0.5000 01	-0.934180-02	-0.280250-02	-0.928270-03	-0.267330-02	-0.947100-02	0.339880-02	0.172080 03
3	0.0000 00	0.1000 02	-0.281410-01	-0.844230-02	-0.474630-03	-0.843030-02	-0.281520-01	0.986070-02	0.178620 03
4	0.0000 00	0.1500 02	-0.489160-01	-0.146750-01	-0.164000-02	-0.145960-01	-0.489940-01	0.171970-01	0.177260 03
5	0.0000 00	0.2000 02	-0.604750-01	-0.181420-01	0.000000 00	-0.181420-01	-0.604750-01	0.211660-01	0.000000 00
6	0.5000 01	0.0000 00	-0.282250-02	-0.934180-02	-0.928270-03	-0.267330-02	-0.947100-02	0.339880-02	-0.979230 02
7	0.5000 01	0.1000 02	-0.166890-01	-0.657010-02	-0.125300-01	0.188270-02	-0.251420-01	0.135130-01	0.145900 03
8	0.5000 01	0.2000 02	-0.253300-01	0.193870-02	-0.980690-03	0.197370-02	-0.253650-01	0.136700-01	0.177940 03
9	0.1000 02	0.0000 00	-0.844230-02	-0.281410-01	-0.474630-03	-0.843030-02	-0.281520-01	0.986070-02	0.913790 02
10	0.1000 02	0.5000 01	-0.657010-02	-0.166890-01	-0.125300-01	0.188270-02	-0.251420-01	0.135130-01	0.124010 03
11	0.1000 02	0.1000 02	0.100880-01	0.100880-01	-0.191830-01	0.292720-01	-0.302510-02	0.191830-01	0.135000 03
12	0.1000 02	0.1500 02	-0.489970-02	0.132190-01	-0.135840-01	0.204660-01	-0.122450-01	0.163550-01	0.151920 03
13	0.1000 02	0.2000 02	-0.316820-01	0.128700-01	0.256730-03	0.128900-01	-0.317020-01	0.222960-01	0.122970 01
14	0.1500 02	0.0000 00	-0.146750-01	-0.489160-01	-0.164000-02	-0.145960-01	-0.489940-01	0.171970-01	0.927360 02
15	0.1500 02	0.1000 02	0.132190-01	-0.489970-02	-0.135840-01	0.204660-01	-0.122450-01	0.163550-01	0.118080 03
16	0.1500 02	0.2000 02	0.470780-01	0.705540-01	-0.542620-02	0.717470-01	0.458840-01	0.129310-01	0.167600 03
17	0.2000 02	0.0000 00	-0.181420-01	-0.604750-01	0.000000 00	-0.181420-01	-0.604750-01	0.211660-01	0.900000 02
18	0.2000 02	0.5000 01	0.193870-02	-0.253300-01	-0.980690-03	0.197370-02	-0.253650-01	0.136700-01	0.920370 02
19	0.2000 02	0.1000 02	0.128700-01	0.316820-01	0.256730-03	0.128900-01	-0.317020-01	0.222960-01	0.887700 02
20	0.2000 02	0.1500 02	0.705540-01	0.470780-01	-0.542620-02	0.717470-01	0.458840-01	0.129310-01	0.102400 03
21	0.2000 02	0.2000 02	0.124810 00	0.124810 00	0.000000 00	0.124810 00	0.124810 00	0.638380-13	0.000000 00

BIBLIOGRAFIE

1. AHMAD, S., IRONS, M.B. și ZIENKIEWICZ, C.O., *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), nr. 3, 1970.
2. AKIN, E. J., FENTON, L.D. și STODDART, T. C. W., *The Finite Element Method: A Bibliography of Its Theory and Applications*, University of Tennessee, 1972
3. BURADA CORNELIU, *Contribuții la determinarea solicitărilor în roata disc a vagonului de cale ferată*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic „Gh. Asachi” Iași, 1976
4. BLUMENFELD, M., *Calculul barelor cu calculatoare numerice*, Editura tehnică, 1975
5. BUHTIAROV, M. A., ZIKEVSKAIA, M. I. și FROLOV, D. G., *Culegere de probleme de programare*, Traducere din limba rusă, Editura tehnică, 1975
6. COOK, D. ROBERT, *Eigenvalue Problems with a „Mixed” Plate Element*, AIAAJ, nr. 5, 1969
7. COOK, D. ROBERT, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1974
8. COOK, D. ROBERT, *Improved Two-Dimensional Finite Element*, JSD, nr. ST9, 1974
9. COOK, D. ROBERT și LADKANY G. SAMAN, *Observations Regarding Assumed-Stress Hybrid Plate Elements*, IJNME, vol. 8, 1974
10. COOK, D. ROBERT, *Finite Element Buckling Analysis of Homogeneous and Sandwich Plates*, IJNME, vol. 9, 1975
11. COOK, D. ROBERT, *Avoidance of Parasitic Shear in Plane Element*, Journal of the Structural Division (JSD), nr. ST6, 1975.
12. CONTE, D. S., *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1965.
13. DESAI, S. C. și ABEL, F. J., *Introduction to the Finite Element Method: A Numerical Method for Engineering Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
14. DIMO, P., *Programarea în FORTRAN*, Editura didactică și pedagogică, 1971.
15. NICULESCU, ST., *Inițiere în FORTRAN*, Editura tehnică, 1972.
16. PASCARIU, I.I., *An Improved Theory for Studying Mechanically and Thermally Induced Vibrations of Cylindrical Shells with Transverse Shear Depending on Frequency*, Dissertation Abstracts International (U.S.A.), nr. 1, 1974.
17. PAWSEY, F. S. și CLOUGH, W. R., *Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements*, IJNME, nr. 4, 1971.
18. ROSE, J.D. și WILLOUGHBY, A.R., eds., *Sparse Matrices and Their Applications*, Plenum Press, 1972.
19. SCHLACK, L. A., Jr., KESSEL, G. P. și DONG, N. W., *Dynamic Response of Elastically Supported Circular Plates to a General Surface Load*, AIAA Journal, nr. 6, 1972.
20. TIMOSHENKO, S. și WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
21. URAL OKTAY, *Matrix Operations and Use of Computers in Structural Engineering*, International Textbook Company, 1971.
22. URAL OKTAY, *Finite element Method: Basic Concepts and Applications*, Intext Educational Publishers, 1973.
23. TEODORESCU, ST. și FLORENTIU, AL., *Algoritmul și optimizarea calculului de rezistență al aparatelor cilindrice de tip coceană*, Editura tehnică, 1972.
24. VĂDUVA ION și POPOVICIU NICOLAE, *Introducere în programarea automată*, Editura didactică și pedagogică, 1973.
25. ZIENKIEWICZ, C.O., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1971.
26. ZIENKIEWICZ, C. O., TAYLOR, L.R. și TOO, M. J., *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*, IJNME, nr. 2, 1971.
27. * * * FORTRAN IV: *Manual pentru programatori*, Ministerul Căilor Ferate, 1969.

ÎNCHEIERE

INDICAȚII PRIVIND ALEGEREA METODELOR ȘI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Din conținutul prezentei cărți rezultă că pentru determinarea, pe cale experimentală, a deformațiilor și tensiunilor există numeroase metode și tehnici de lucru, care sînt în continuă perfecționare și al căror număr crește de la an la an. Ca urmare, alegerea celei mai potrivite metode, pentru o anumită aplicație practică, devine o problemă din ce în ce mai complexă.

Inginerul sau cercetătorul trebuie să cunoască bine caracteristicile diferitelor metode și tehnici tensometrice, avantajele și dezavantajele pe care acestea le prezintă, precum și diferitele limitări ale acestora, pentru a putea alege pe cea mai potrivită.

1. PRINCIPALELE CARACTERISTICI ALE METODELOR ȘI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Caracteristicile metodelor tensometrice precum și ale diferitelor tehnici ale acestora sînt prezentate în cadrul lucrării, mai dezvoltat pentru primele șase metode (cap. 2—7) considerate drept metode fundamentale. În scopul mării operativității, la selectarea metodei și tehnicii celei mai adecvate scopului urmărit, se consideră util a fi subliniate succint, în paginile ce urmează, caracteristicile de bază ale acestora precum și principalele domenii de utilizare.

Extensometrele mecano-optice (cap. 2). Extensometrele mecano-optice sînt dispozitive utilizate pentru măsurarea deformațiilor. În majoritatea cazurilor sînt întrebuintate pentru trasarea curbelor caracteristice ale materialelor utilizate în construcții. În multe cazuri sînt utilizate și în

tensometrie așa cum rezultă din exemplele date în cuprinsul cărții (§ 2.6. și § 8.3).

Extensometrele mecanice (§ 2.1), au o sensibilitate la deformare ce variază între 10 și 100 $\mu\text{cm/cm}$ în funcție de sistemul de multiplicare și baza de măsurare, în timp de *extensometrele optice*, (§ 2.2) au o sensibilitate la deformare ce poate ajunge la 1 $\mu\text{cm/cm}$. Sensibilitate mai ridicată au *extensometrele pneumatice* (§ 2.3.).

Tensometrele cu coardă vibrantă (§ 2.4.) precum și *tensometrele acustice* (§ 2.5.), au, de regulă, baza de măsurare mare (până la 100 mm) și sînt indicate, în special, în cazul încercărilor de lungă durată. Ele sînt utilizate, cu succes, la studiul fluajului în cazul construcțiilor din beton.

Tensometria electrică (cap. 3). Tensometria electrică și, îndeosebi, cea rezistivă reprezintă la ora actuală una dintre cele mai utilizate metode de analiză experimentală a stării de tensiune. *Traductoarele rezistive* sînt folosite pe scară din ce în ce mai largă datorită dimensiunilor relativ mici, aplicării ușoare asupra structurii, costului relativ redus precum și posibilității de citire directă a deformăției. Prin folosirea rozetelor cu două, trei sau patru traductoare, în funcție de starea de tensiune, pot fi determinate direcțiile și tensiunile principale în cele mai diverse situații.

Cu *traductoarele rezistive* uzuale pot fi măsurate deformări specifice cuprinse între 1 și 20000 $\mu\text{cm/cm}$ iar cu traductoarele de mare alungire pot fi măsurate deformări plastice (de până la 100000 $\mu\text{cm/cm}$). Cu lanțurile de traductoare se pot determina gradientii din zonele cu concentrări mari de tensiune.

Cu traductoarele adaptate pentru solicitările variabile se pot măsura variații de deformare specifică de $\pm 1,5 \mu\text{cm/cm}$ repetate de 10^7 ori. Fiind lipsite, practic, de inerție traductoarele rezistive sînt apte pentru măsurarea deformărilor specifice produse prin solicitările prin șoc și de vibrații și permit măsurări într-un domeniu larg de temperatură ($-270^\circ\text{C} \dots 1000^\circ\text{C}$).

Prin utilizarea unei aparaturi adecvate se poate automatiza atît procesul de măsurare cît și de prelucrare a rezultatelor; de asemenea, este posibilă efectuarea măsurărilor de la distanță.

Traductoarele rezistive cu *semiconductoare*, avînd o sensibilitate mult mai mare, permit măsurarea unor deformări specifice foarte mici ($< 0,01 \mu\text{cm/cm}$) și necesită o aparatură mult mai simplă.

Traductoarele inductive sînt folosite pentru măsurarea deplasărilor într-un domeniu mai larg (1 $\mu\text{cm} \dots 100 \text{ mm}$) iar cele *capacitive* pentru deplasări mai mici. De asemenea, cu aceste traductoare se pot măsura viteze și accelerații.

Fotoelasticitatea (cap. 4). Fotoelasticitatea cuprinde un ansamblu de tehnici experimentale utilizate pentru analiza stării de tensiune și deformare din elemente și structuri, care se bazează pe relațiile ce se stabilesc între starea de tensiune dintr-un mediu transparent (model sau peliculă fotoelastică) și modul în care acest mediu transmite lumina polarizată.

Analiza fotoelastică este larg folosită în practică pentru problemele în care se cer informații privind starea de tensiune într-o zonă extinsă din model sau structură. Utilizând o mare diversitate de procedee, fotoelasticitatea permite o analiză cantitativă a zonelor puternic tensionate, determinând, în majoritatea cazurilor, cu suficientă precizie, valorile maxime ale tensiunilor (cazul concentratorilor) atât la exteriorul cât și în interiorul structurii, precum și a zonelor slab sollicitate în care materialul structurii este ineficient utilizat.

Starea de tensiune din elemente și structuri este investigată fie pe *modelele acestora* (plane sau spațiale), fie direct pe aceste elemente, când se folosesc *acoperiri fotoelastice*. Determinările cantitative se fac analizând cîmpul de franje alb-negru (sau colorate) ce se observă pe suprafața modelului sau lacului fotoelastic, când sînt traversate de lumină polarizată. Din prelucrarea datelor experimentale rezultă atât valorile tensiunilor principale cât și direcțiile acestora, în orice punct din zona investigată.

Analiza fotoelastică pe modele s-a extins astăzi și la investigarea *stării spațiale de tensiune*, atât în regim static cât și în regim dinamic, devenind o metodă experimentală completă capabilă să furnizeze o mare diversitate de date. Tehnica fotoelasticității prin reflexie, oferă posibilitatea determinării stării de tensiune, direct pe suprafața structurilor sollicitate atât în regim static cât și în regim dinamic. Această tehnică este tot mai mult folosită astăzi pentru determinarea tensiunilor remanente rezultate în urma unor procedee de fabricație (v. § 8.1.) într-o serie de elemente ale structurilor metalice.

Datele experimentale furnizate de diferitele tehnici fotoelastice trebuie prelucrate în vederea determinării stării de tensiune din zonele cercetate. Prelucrarea acestor date cu ajutorul mijloacelor moderne de calcul permite o analiză completă și rapidă a stării de tensiune pentru elemente cu geometrii și moduri de încărcare din cele mai complicate.

Metodele interferometrice (cap. 5) a) Metodele bazate pe fenomenul moiré.

În ultimii ani, utilizarea franjelor moiré în tensometrie a căpătat o largă utilizare datorită, în principal, următoarelor avantaje:

— Oferă posibilitatea de a se determina direct mărimea și distribuția deformațiilor specifice, din relații pur geometrice, fără intermediul vreunui fenomen fizic intermediar ca de exemplu : schimbări de rezistență electrică (în cazul tensometriei electrice rezistive) sau de birefringență (în cazul fotoelasticității).

— Studiul se poate face direct pe structură sau pe modele realizate din același material ca și prototipul.

— Oferă posibilitatea obținerii unui spectru general și continuu în timp a deformațiilor specifice — deci și a tensiunilor — în piesa supusă cercetării.

— Se poate studia comportarea materialelor la temperaturi ridicate, pînă în apropierea temperaturii de topire a acestora, utilizînd rețele imprimate prin gravare (§ 5.2). Ne venind în contact cu modelul încălzit nici un fel de corp străin nu exercită nici un fel de influență asupra distribuției căldurii în corpul modelului supus cercetării.

— Franjele obținute prin reflexie dau bune rezultate la studiul deformațiilor și a rezistenței plăcilor solicitate la încovoiere.

— Cu excepția tehnicii gravării, celelalte tehnici de reproducere a rețelei pe model, pe suprafața piesei supusă cercetării, nu introduc concentrați de tensiuni și nu este influențată rigiditatea acesteia ca în cazul altor metode tensometrice (cazul peliculelor fotoelastice, a extensometrelor mecano-optice etc. și în anumită măsură și în cazul traductoarelor rezistive).

— Starea de deformare a piesei cercetate se interpretează după fotografii care rămîn valabile pentru verificări ulterioare.

— Sensibilitatea metodei variază în limite mari, ca urmare metoda poate fi utilizată, alegînd rețele cu frecvența corespunzătoare și tehnica de lucru adecvată, atît la determinarea deformațiilor specifice mici (sub 10^{-4}) cît și la determinarea deformațiilor mari, corespunzătoare solicitărilor în domeniul plastic, cu o precizie satisfăcătoare și cu ajutorul unor mijloace relativ simple și la un preț de cost redus.

Se poate afirma că utilizarea franjelor moiré în tensometrie se extinde, în special, acolo unde se termină posibilitățile celorlalte metode tensometrice fundamentale și, în anumite cazuri, le completează pe acestea.

b) *Interferometria holografică* (§ 5.7.). Această tehnică tensometrică, recent pusă la punct, oferă posibilitatea de a se înregistra, pe aceeași fotografie, atît izocromatele cît și izoclinele oferind astfel posibilitatea de a se determina deformațiile, respectiv, tensiunile în orice punct al unui element plan supus unei solicitări mono sau biaxiale. În cazul solicită-

rilor triaxiale, holografia poate fi utilizată — în stadiul actual — numai în câteva cazuri particulare.

Cea mai mică deformare ce poate fi înregistrată prin interferometria holografică este de ordinul jumătății lungimii de undă a luminii utilizate și cea mai mare de ordinul zecilor de microni. Tehnica este indicată și pentru studierea evoluției în timp a stării de deformare precum și la studiul vibrațiilor elementelor elastice.

Metoda causticelor (cap. 6). Metodele experimentale cunoscute pînă în prezent dau informații insuficiente în cazul cîmpurilor singulare de tensiuni caracterizate prin concentratori puternici. Astfel de cîmpuri pot fi create în următoarele condiții :

a) Printr-o discontinuitate geometrică a cîmpului de tensiuni (fisuri, creștături, etc.);

b) Prin modul de încărcare (sarcini concentrate sau discontinui);

c) Printr-o discontinuitate geometrică a caracteristicilor elasto-mecanice ale materialului (materiale composite).

În cazul fotoelasticității, în zonele cu concentratori puternici de tensiune, rezultă o mare concentrare a izocromatelor din care cauză nu este posibilă evaluarea precisă a tensiunilor și, în plus, pînă în prezent, nu se cunoaște dacă indicele de refracție a materialului rămîne, în aceste zone, o funcție liniară de valorile tensiunilor principale. Prima observație rămîne valabilă și în cazul cînd analiza tensiunilor se face cu ajutorul franjelor moiré sau prin interferometria holografică. Rezultatele determinărilor sînt și mai puțin exacte — în cazul acestor cîmpuri de tensiuni — dacă se utilizează tensometria electrică (cap. 3) sau extensometrele mecano-optice (cap. 2).

Metoda causticelor, dezvoltată de prof. P.S. Theocaris (cap. 6) permite determinarea, cu mare precizie, a parametrilor cîmpurilor singulare de tensiuni în cazul stării plane de solicitare. Metoda este caracterizată — printre altele — printr-o mare simplitate care rezultă din însăși principiul ce stă la baza metodei, (v. § 6.2.).

Metoda lacurilor casante (cap. 7). Folosirea lacurilor casante în analiza experimentală a tensiunilor este recomandată, mai ales, cînd este necesară explorarea unor zone mai ample ale structurii sau piesei de studiat. Cu ajutorul acestei metode se determină într-un mod foarte simplu, zonele cu concentratori de tensiuni, zonele de maximă solicitare, precum și direcțiile principale ale tensiunilor.

În cazul utilizării acestei metode informațiile privind cîmpul de tensiuni sînt furnizate de două familii de curbe :

— izostatice și izoentatice.

Sînt cunoscute două tipuri de lacuri casante :

— lacuri pe bază de rășini utilizabile în domeniul de temperatură obișnuită, pentru determinarea atît a tensiunilor de întindere cît și a celor de compresiune, și,

— lacuri pe bază de ceramică utilizate numai pentru determinarea tensiunilor de întindere la temperaturi de pînă la 380°C.

Odată determinate direcțiile principale și distribuția tensiunilor, cu metoda lacurilor casante, valorile exacte ale tensiunilor în anumite puncte pot fi determinate folosind traductoare electrice rezistive, amplasate în locurile și după direcțiile indicate de lacurile casante.

Difracția cu raze X (§ 8.5.). Această metodă dă bune rezultate la determinarea tensiunilor remanente de suprafață fără deteriorarea structurii de cercetat. Ea este considerată ca fiind singura metodă cu care poate fi determinată starea totală de solicitare (tensiunile remanente + tensiunile produse de sarcinile ce acționează asupra structurii).

Metoda este limitată la piese de mărime relativ mică, pentru a putea fi poziționate în difractometru.

Metoda cu ultrasunete (§ 8.3.1.). Această metodă, relativ nouă, se bazează pe dependența între viteza de propagare a undelor ultrasonice transversale și valoarea tensiunii ce solicită materialul. Metoda poate fi utilizată la determinarea deformațiilor elastice, în materialele opace din punct de vedere optic.

Ea este indicată, îndeosebi, pentru măsurarea, pe cale nedistructivă, a tensiunilor remanente, cu o precizie satisfăcătoare.

Metoda electromagnetică (§ 8.3.2.). Metoda poate fi utilizată, bineînțeles, numai în cazul metalelor feromagnetice. Ea se bazează pe faptul că proprietățile magnetice ale acestor metale sînt sensibile la variația tensiunilor existente în masa metalului.

Metoda este folosită, în special, la determinarea tensiunilor remanente.

Analogia electrică (cap. 9). Metoda analogiilor electrice este indicată pentru determinarea stării de tensiune în unele cazuri în care metodele analitice de calcul devin complicate iar tehnicile experimentale obișnuite sînt mai puțin eficiente.

Această metodă se bazează pe analogia care există între cîmpul de tensiuni și cîmpul potențialului electric generat de anumite surse, într-un mediu conducător. Realizate ca sisteme electrice cu constante distribuite sau concentrate, analogiile electrice permit investigarea stării de tensiune în cazuri practice în care intervin geometrii complicate ale secțiunii elementului studiat iar cîmpul tensiunilor este descris de ecuații de tip Laplace sau Poisson (cazul plăcilor plane solicitate la încovoiere, al barelor torsionate cu

secțiune necirculară etc.). Metoda oferă posibilitatea vizualizării câmpului de tensiune din întreg domeniul studiat, permițând determinarea cu suficientă precizie a tensiunilor maxime în zonele puternic solicitate (cazul concentratorilor la bare torsionate).

Analogiile electrice sînt folosite și ca tehnică experimentală auxiliară într-o serie de cercetări de fotoelasticitate pentru determinarea valorilor individuale ale tensiunilor principale.

Prelucrarea datelor rezultate din determinările experimentale se poate face cu ușurință pe calculator, mărindu-se astfel, considerabil, operativitatea metodei.

O prezentare mai completă a caracteristicilor esențiale ale metodelor și tehnicilor tensometrice prezentate în cuprinsul lucrării este dată sintetic în anexa A.

2. INDICAȚII PRIVIND SELECTAREA METODELOR ȘI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Înainte de a stabili metoda și tehnica de lucru este necesar să se cunoască răspunsul la următoarele trei întrebări :

1. Ce tip sau tipuri de deformații urmează să fie măsurate (uniaxiale, biaxiale, triaxiale) ?
2. Cum este încărcarea : statică sau dinamică ?
3. La ce temperatură se face încercarea ?

Din anexa B rezultă că, ținînd seama de răspunsurile la aceste întrebări, pot fi utilizate mai multe tehnici. Pentru a selecta, din acestea, pe cea mai potrivită se utilizează anexa A în care se arată pentru fiecare tehnică tensometrică :

- gradul de sensibilitate, în $\mu\text{cm/cm}$ (col. 3) ;
- lungimea bazei de măsurare, în mm (col. 4) ;
- dacă indică direcția tensiunilor principale (col. 5) ;
- dacă explorează întregul câmp supus cercetării (col. 6) ;
- dacă indică gradientul deformațiilor (col. 7) ;
- dacă citirea rezultatelor se face direct sau de la distanță (col. 8 și 9) ;
- pe ce se face citirea rezultatelor (col. 10) ;
- dacă permite automatizarea înregistrării și prelucrării rezultatelor (col. 11 și 12) ;
- complexitatea echipamentului utilizat (col. 13) notată cu cifre de la 1 la 4 (complexitatea maximă 4) ;

- gradul de instruire a operatorului (col. 14) notat cu cifre de la 1 la 4 (instruire superioară 4);
- dacă încercarea se poate face numai în laborator (L) sau și în exterior (E) (col. 15);
- durata calculelor necesare pentru interpretarea rezultatelor (col. 16) notat cu cifre de la 1 (scurtă) la 4 (lungă);
- timpul necesar de la prima operație pînă la prima măsurare (col. 17);
- dacă măsurarea deformațiilor se poate face numai la suprafața piesei sau și în interiorul acesteia (col. 18 și 19);
- ce tensiuni pot fi determinate: numai cele produse de sarcinile exterioare, (col. 20), tensiunile remanente (col. 21), suma acestora (col. 22) simultan;

În coloana 23, observații, se atrage atenția asupra restricțiilor deosebite în cazul tehnicii de lucru respective sau a unor posibilități deosebite pe care aceasta le oferă.

Sigur, la alegerea metodei și tehnicii de lucru se va ține seamă de mijloacele de care se dispune precum și de gradul de instruire a personalului ce urmează să execute încercările și să interpreteze rezultatele.

Cînd se pune o problemă de analiză a tensiunilor, mai întîi trebuie căutată soluția matematică și numai dacă există certitudinea că pe această cale nu se poate ajunge la soluții satisfăcătoare, se recomandă utilizarea metodelor experimentale.

Căutarea mai întîi a soluțiilor matematice, se recomandă și datorită faptului că analizele experimentale sînt, de regulă, mai costisitoare. Dar cheltuielile suplimentare, legate de utilizarea uneia sau a mai multor tehnici tensometrice, sînt justificate de rezultatele mai realiste și mai semnificative ce se pot obține.

Avînd în vedere că majoritatea metodelor și tehnicilor experimentale măsoară numai deformațiile la suprafață, rezultatele obținute pe cale matematică, chiar dacă sînt aproximative, pot completa sau verifica, uneori, pe cele experimentale. Ca urmare, se recomandă așa cum afirmă prof. P. S. Theocaris în prefața lucrării, utilizarea drumului de mijloc, în cele mai multe cazuri de analiză a tensiunilor.

3. EXEMPLE DE APLICAȚII

a) *Stabilirea secțiunilor periculoase precum și valoarea tensiunilor principale maxime și direcția acestora la prototipul unei carcase de vagon de călători în condiții de exploatare.*

PRINCIPALELE CARACTERISTICI DE LUCRU ALE

Nr. crt.	Capitoul	Metodele și tehnicile tensometrice	Sensibilitatea (pragul de deformare) $\mu\text{cm/cm}$	Baza de măsurare mm	Dacă indică direcția tensiunilor principale	Dacă explorează întregul câmp	Dacă indică gradientul deformărilor (tensiunilor)	Cum se fac determinările		Indicațiile sunt prezentate:
								Observare directă	de la distanță	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	Extensometre mecanooptice								
		a) mecanice	10-100	2-20	nu	nu	nu	da	nu	pe scală
		b) optice	1-20	10-30	nu	nu	nu	da	nu	pe scală
		c) pneumatice	1-100	2-10	nu	nu	nu	da	nu	pe scală
2	3	d) cu coardă vibrantă	1-100	20-100	nu	nu	nu	da	da	pe scală
		Tensometria electrică								
		a) traductoare rezistive ²⁾								
		— simple	1-10	0,2-200	nu	nu	nu	da	da	pe scală sau numeric
		— rozete	1-10	0,8-25	da	nu	nu	da	da	pe scala sau numeric
		b) traductoare rezistive cu semiconductoare ²⁾	< 0,01	0,4-25	nu	nu	nu	da	da	pe scală sau numeric
		c) traductoare inductive			nu	nu	nu	da	da	pe scală
		d) traductoare capacitive			nu	nu	nu	da	da	pe scală
3	4	Fotoelasticitatea								
		a) model bidimensional	5		da	da	da	da	nu	în polariscop
		b) model tridimensional	5		da	da	da	da	nu	în polariscop
		c) acoperiri cu pelicule fotoelastice	5		da	da	da	da	nu	în polariscop
4	5	Metode interferometrice								
		a) metoda moiré								
		— cu rețea imprimată pe model	1-100		nu	da	da	da	nu	pe fotografia franjelor
		— prin reflexie	10-100		nu	da	da	da	nu	pe fotografia franjelor
5	6	b) holografia	2		nu	da	da	da	nu	pe hologramă
		Metoda causticilor	< 0,1		da	da	da	da	nu	pe fotografii
6	7	Metoda lacurilor casante								
		a) din rășină (temp. camerei)								
		— macrotehnică	500		0,3	da	da	da	nu	
		— microtehnică	800-1000		0,2	da	da	da	nu	
7	8	b) din ceramică	300		0,2	da	da	da	nu	
		Metoda bazată pe difracția razelor X	2-5		da	nu	nu	nu	nu	pe radiograma
8	8	Metoda cu ultrasunete	5-10		da	nu	nu	nu	nu	pe polariscop
9	8	Metoda electromagnetică	10-100		da	nu	nu	da	da	pe scală
10	9	Analogia electrică	5		da	da	da	da	nu	pe scală

¹ A — tensiunile remanente și B — tensiunile produse de sarcinile exterioare.

² Sensibilitatea, este determinată în principal, de sensibilitatea aparatului de măsură.

METODELOR ȘI TEHNICILOR TENSOMETRICE

Anexa A

Dacă permite automatizarea		Comple- xitatea echipa- mentului utilizat	Gradul de in- struire a opera- torului	Măsură- rile se pot exe- cuta în laborator sau și în exterior (L, E)	Durata calculului pt. inter- pretarea rezulta- telor	Timpul necesar de la pri- ma ope- rație până la prima măsurare h.	Permite măsurarea deformațiilor		Se măsoară tensiunile 1)			Observații
înrezi- strării datelor	prelu- crării datelor						la supra- față	în interi- orul structurii	A	B	A + B	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
nu	nu	1, 2	1, 2	L + E	0	0,2-0,5	da	nu	da	da	nu	
nu	nu	2, 3	2, 3	L + E	0	0,2-1	da	nu	da	da	nu	
nu	nu	2, 3	2, 3	L + E	0	0,2-1	da	nu	da	da	nu	
nu	nu	2, 3	2, 3	L + E	1	0,5-1,5	da	da	da	da	nu	
da	da	3, 4	2, 3	L + E	1	0,25-24	da	nu	da	da	nu	
da	da	3, 4	2, 3	L + E	3	0,25-24	da	nu	da	da	nu	
da	da	3, 4	2, 3	L + E	1	0,25-24	da	nu	da	da	nu	Nu sînt indicate pentru deformații mari, mai ales de încovoiere
da	da	3, 4	2, 3	L + E	1	0,1-1	da	nu	da	da	nu	
da	da	3, 4	2, 3	L + E	1	0,1-1	da	nu	da	da	nu	
da	da	2, 3	3, 4	L	1, 2, 3	1-3	da	nu	da	nu	nu	Permite numai studii pe modele din materiale foto- elastice
da	da	3, 4	3, 4	L	3, 4	48	da	da	da	nu	nu	
da	da	2, 3	3, 4	L + E	1, 2, 3	> 24	da	nu	da	da	nu	
da	da	2	3, 4	L	3, 4	1-2	da	da	da	da	nu	
da	da	2	3, 4	L	3, 4	1-2	da	nu	nu	da	nu	
da	da	4	4	L	4	2-3	da	nu	da	nu	nu	Numai ptr. de- formații sub 50
da	da	2	3, 4	L	3, 4	1-2	da	nu	da	nu	nu	Indicat numai ptr. cîmpuri sin- gulare de tensiune
nu	nu	1, 2	1, 2	L + E		18-24	da	nu	nu	da	nu	
nu	nu	1, 2	3, 4	L		18-24	da	nu	nu	da	nu	
nu	nu	1, 2	2, 3	L + E		10-24	da	nu	nu	da	nu	
nu	nu	4	3, 4	L	2, 3	0,5-1	da	nu	da	da	da	Numai pentru piese mici
nu	nu	3, 4	3, 4	L + E	1, 2	0,5-1	da	da	da	da	nu	
nu	nu	2, 3	2, 3	L	1, 2	1-2	da	da	da	da	nu	Numai pentru metale fero- magnetice
da	da	2, 3, 4	3, 4	L	3, 4	> 48		da	da	nu	nu	

**Alegerea metodelor și tehnicilor tensometrice în funcție de:
starea de tensiune, felul solicitărilor și temperatură**

ANEXA B

Nr. crt.	Metodele și tehnicile tensometrice	Tensiuni uniaxiale		Tensiuni biaxiale		Tensiuni triaxiale	
		Static	Dinamic	Static	Dinamic	Static	Dinamic
		Limită de temp. °C		Limită de temp. °C		Limită de temp. °C	
		2	3	4	5	6	7
0	1						
1	<i>Extensometre mecano-optice</i>						
	a) Mecanice	-20 ÷ 100	-20 ÷ 100	-20 ÷ 100			
	b) Optice	-20 ÷ 100	-20 ÷ 100				
	c) Pneumatice	+20 ÷ 100	+20 ÷ 100				
2	d) Cu coardă vibrantă	+20 ÷ 100	+20 ÷ 100				
	<i>Tensometria electrică</i>						
	a) Traductoare rezistive						
	— Simple	-200 ÷ 800	-200 ÷ 1000			20 ÷ 40	20 ÷ 40
	— Rozete	-200 ÷ 800	-200 ÷ 1000	-200 ÷ 800	-200 ÷ 1000		
	b) Traductoare cu semiconductoare	-20 ÷ 100	-20 ÷ 150				
	c) Traductoare inductive	-20 ÷ 80	-20 ÷ 80				
	d) Traductoare capacitive	-20 ÷ 80	-20 ÷ 80				
	<i>Fotoelasticitatea</i>						
	a) Model bidimensional	15 ÷ 35	15 ÷ 30	15 ÷ 35	15 ÷ 30		
3	b) Model tridimensional	15 ÷ 35	15 ÷ 30	15 ÷ 35	15 ÷ 30	15 ÷ 35	15 ÷ 30
	c) Acoperiri cu pelicule fotoelastice	15—35	15 ÷ 30	15 ÷ 35	15 ÷ 30		

4	<i>Metode interferometrice</i> a) Metoda moiré-urilor — Cu rețeaua imprimată pe model	$-20 \div 1000$	$+20 \div 800$	$+20 \div 1000$	$+20 - 800$	$-20 \div 300$	$-20 \div 300$
	— Prin reflexie	$+20 \div 1000$	$+20 \div 800$	$+20 - 1000$	$+20 \div 800$		
	b) Holografia	$20 \div 800^*)$	$20 \div 800^*)$	$20 \div 800^*$	$20 \div 800^*)$		
5	<i>Metoda causticilor</i>	$+20 \div 500$	$+20 \div 800$	$+20 \div 500$	$+20 \div 800$		
6	<i>Metoda lacurilor casante</i> a) Din rășini — Macrotehnică	$-10 \div 40$	$-10 \div 40$	$-10 \div 40$	$-10 \div 40$		
	— Microtehnică	$20 \div 30$	$20 \div 30$	$20 \div 30$	$20 \div 30$		
	b) Din ceramică	$-20 \div 400$	$-20 \div 400$	$-20 \div 400$	$-20 \div 400$		
7	<i>Metoda bazată pe difracția razelor X</i>	$-20 \div +500$	$-20 \div +800$	$-20 \div +500$			
8	<i>Metoda cu ultrasunete</i>	$20 \div 40$	$20 \div 40$	$20 \div 40$		$20 \div 40$	
9	<i>Metoda electromagnetică</i>	$20 \div 40$	$20 \div 40$	$20 \div 40$		$20 \div 40$	
10	<i>Analogia electrică</i>	$15 \div 25$		$15 \div 25$			

*) Cu măsuri speciale

Condiții de încercare : (1) temperatură normală ; (2) funcționare în aer liber ; (3) încărcarea statică și dinamică și (4) zone largi de explorare.

Potrivit anexei B ar putea fi întrebuințate lacurile casante, traductoarele electrice rezistive, fotoelasticitatea sau extensometrele mecano-optice. Totuși, conform anexei A cercetătorul este limitat, în prima etapă, la fotoelasticitate (tehnică cu lacuri fotosensibile) sau, metoda cu lacuri casante pentru localizarea zonelor cu deformații maxime. Alegerea uneia sau celeilalte din metode depinde de timpul și echipamentul disponibil. În a doua etapă este indicată utilizarea traductoarelor rezistive pentru a obține informații privind mărimea deformațiilor, respectiv a tensiunilor maxime în zonele analizate. Metoda permite efectuarea măsurărilor de la distanță, folosind vagonul laborator încorporat în același tren cu vagonul ce face obiectul cercetării. Dacă s-ar folosi numai tensometria electrică rezistivă, în loc de traductoare simple ar fi necesar să se utilizeze rozete tensometrice într-un număr mult mai mare. Prețul de cost al analizei ar fi sensibil mai ridicat. Încercarea pe modele nu este indicată deoarece :

- confecționarea modelului ridică probleme dificile ;
- încercarea modelului în condițiile de exploatare ale vagonului practic, nu poate fi realizată.

b) *Studiul stării de tensiune din elementele unui filtru de limpezire.* Pentru proiectarea rațională a filtrelor de limpezire utilizate în circuitul de alimentare cu apă din termocentrale, se impune cunoașterea cât mai exactă a stării de tensiune din elementele acestor structuri. Filtrul se execută ca o construcție metalică complet sudată, avînd forma unui recipient cilindric închis la capete prin două capete sferice, prevăzut la interior cu o placă circulară perforată fixată pe contur pe pereții virolei. În zona cilindrică și în capacul superior, există o serie de găuri și racorduri de legătură. Filtrul se montează în poziție verticală sprijinindu-se prin intermediul capacului inferior fie pe trei coloane, fie pe un șorț de rezemare. În timpul funcționării învelișul filtrului este supus la presiune interioară în condiții normale de temperatură, iar placa interioară perforată, la presiune și sarcini concentrate.

Așa cum rezultă din anexa A, pentru determinarea stării de tensiune din elementele care alcătuiesc învelișul filtrului și dispozitivul de rezemare, poate fi utilizată tehnica lacurilor casante combinată cu tensometria electrică rezistivă, fotoelasticitatea și metoda moiré. Pentru analiza stării de tensiune din placă este indicat să se utilizeze tensometria electrică rezistivă, fotoelasticitatea și tehnicile interferometrice (moiré sau holografia). Cercetările experimentale pot fi întreprinse fie direct pe structura reală,

fie pe modele, executate la scară. Prin utilizarea tehnicii lacurilor casante pot fi puse în evidență zonele puternic solicitate, stabilindu-se aproximativ nivelul tensiunilor principale, dar mai ales, direcțiile acestor tensiuni. Pe aceste direcții se aplică apoi traductoare tensometrice rezistive sau mărci moiré, cu ajutorul cărora se determină cu precizie, starea de tensiune în zonele respective. În afară de aceste tehnici mai poate fi folosită și fotoelasticitatea prin reflexie, aplicând pe zonele mai solicitate acoperiri fotoelastice pe suport reflectorizant.

Având în vedere dimensiunile mari pe care le au filtrele de limpezire, utilizarea acestor tehnici direct pe structura reală este costisitoare iar operațiile de pregătire ridică foarte multe dificultăți practice.

De aceea este preferabil ca analiza în acest caz să se facă pe modele executate la scară, utilizând tehnicile amintite mai sus. De multe ori însă, datele experimentale furnizate de aceste tehnici sînt insuficiente pentru ca pe baza lor să se poată face un studiu de optimizare în vederea trecerii la o proiectare rațională a acestor elemente. În asemenea cazuri este recomandabil să se utilizeze fotoelasticitatea pe modele spațiale. Modelul recipientului la scară se confecționează dintr-un material fotoelastic, iar tensiunile produse de încărcare se fixează în elementele modelului folosind tehnica înghețării.

Prin secționarea modelului în felii și subfelii, după diferite plane, se poate determina, cu precizie, starea de tensiune în toate zonele modelului, mai ales în acele cu concentratori (găuri, racorduri, îmbinări, puncte de sprijin, etc.).

Starea de tensiune din placa perforată poate fi, de asemenea comod determinată efectuînd studii pe modele. În cazul că se cere cunoașterea stării de tensiune pe toată suprafața plăcii este indicat să se folosească fotoelasticitatea sau tehnicile interferometrice. Tehnica fotoelasticității în acest caz este mai puțin indicată deoarece necesită mult timp și o serie de pregătiri pentru fixarea tensiunilor, secționarea modelului și chiar pentru prelucrarea datelor. În comparație cu această tehnică, metodele interferometrice de analiză se dovedesc mai practice și mai rapide. Analiza prin interferometrie holografică impune modele cu dimensiuni mici și un echipament experimental mai prețios. De aceea metoda moiré prin reflexie se dovedește cea mai potrivită în acest caz, utilizînd un echipament experimental simplu și puțin pretențios, capabil să furnizeze un număr mare de date, cu precizie suficientă, realizîndu-se totodată și o mare economie de timp.

c) *Determinarea stării de tensiune din bandajul și discul unei roți de vagon produsă de montarea la cald a bandajului pe disc.* Deoarece bandajul,

datorită serajului, se montează pe disc încălzit la o temperatură de peste 300°C, pot fi utilizate pentru determinarea pe cale experimentală a stării de tensiune :

- tensometria electrică rezistivă, sau
- metodele interferometrice (moiré sau holografică).

Din cauza formei complicate pe care o are conturul secțiunii bandajului și a discului, nu este indicată utilizarea metodelor interferometrice deoarece se întâmpină dificultăți deosebite la interpretarea franjelor. În schimb pot fi utilizate, cu bune rezultate traductoarele rezistive. Deoarece direcțiile tensiunilor principale sînt cunoscute (după direcția razei și a tangentei) pot fi utilizate traductoare simple plasate după aceste direcții, utilizînd bineînțeles, adezivi și materiale de protecție corespunzătoare temperaturii la care este încălzit bandajul.

d) *Determinarea stării de deformare și de tensiune într-o placă plană perforată.* Un alt exemplu care ilustrează modul de alegere a metodei tensometrice adecvate îl poate constitui studiul deplasărilor și tensiunilor în plăcile plane perforate efectuate în lucrarea [1].

Inițial problema a fost rezolvată prin metoda elementelor finite care permite determinarea deplasărilor și tensiunilor în orice punct al plăcii, ceea ce era dificil de efectuat prin metodele teoretice uzuale.

Studiul experimental privind determinarea deplasărilor plăcii s-a făcut atît prin metoda *interferometriei holografice* cît și prin metoda *moiré prin reflexie*. Sensibilitatea foarte mare a interferometriei holografice (posibilitatea de a măsura deplasări de ordinul micronilor), obținerea cîmpului deplasărilor pe întreaga suprafață a plăcii și deci a deplasării în orice punct al acesteia precum și faptul că contactul cu placa de studiat nu este necesar, reprezintă avantaje hotărîtoare față de celelalte metode tensometrice. Metoda moiré prin reflexie oferă, de asemenea, posibilitatea determinării deplasării în orice punct al plăcii dar sensibilitatea mai redusă a metodei, comparativ cu interferometria holografică, și necesitatea efectuării unor integrări grafice sau numerice, îi limitează aplicabilitatea la determinarea deplasărilor relativ mari ale plăcilor. În schimb această metodă necesită o instalație mult mai simplă de realizat și permite — derivînd grafic sau numeric curbele de variație a pantelor obținute în lungul a două direcții care trec prin punctul considerat și sînt paralele cu axele OX și OY — determinarea tensiunii în punctul respectiv.

Fotoelasticitatea clasică nu ar fi putut fi utilizată în acest studiu pentru că efectul optic produs în zona de întindere a plăcii asupra razei de

lumină polarizată ce trece prin placă este anulat de efectul de sens contrar din zona de compresiune a plăcii. Depunând un strat de material fotoelastic pe suprafața reflectantă a plăcii se poate studia starea de tensiune din placă dar procedeul necesită o aparatură specială și nu permite și studiul deplasărilor.

Tensometria electrică rezistivă, cu toate că are o mare sensibilitate, nu a fost utilizată de autor pentru că permite obținerea deformațiilor specifice și a tensiunilor numai în punctele unde au fost aplicate rozete tensometrice, deci nu dă o imagine a întregului câmp al deformațiilor și tensiunilor.

CUPRINSUL VOLUMULUI I

	Pag.
1. Bazele tensometriei (prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	17
1.1. Noțiuni introductive	17
1.2. Tensiuni (eforturi unitare). Stări de tensiune	18
1.3. Deformații și deplasări	31
1.4. Relațiile dintre tensiuni și deformațiile specifice	37
1.5. Criterii de rezistență	55
1.6. Influența lungimii și a profilului bazei de măsurare	59
1.7. Efectul perturbator al tensometrelor asupra cîmpului de tensiuni	61
1.8. Caracteristicile de bază ale tensometrelor	63
1.9. Efectul variațiilor de temperatură în tensometrie	65
1.10. Criterii generale privind alegerea metodei sau tehnicii tensometrice	66
1.11. Evoluția și perspectivele metodelor și tehnicilor tensometrice	67
2. Extensometre mecano-optice (prof. dr. doc. D. R. Mocanu)	71
2.1. Generalități	71
2.2. Extensometre mecanice	71
2.3. Extensometre mecano-optice cu oglinzi	79
2.4. Extensometre pneumatice	84
2.5. Tensometre cu coardă vibrantă și acustice	86
2.6. Extensometre cu repere materializate	93
3. Tensometrie electrică	99
3.1. Generalități (prof. dr. ing. M. BUGA)	99
3.2. Traductoarele electrotensometrice (prof. dr. ing. M. BUGA, M. TEODORU)	99
3.3. Principii de măsurare (prof. dr. ing. M. BUGA, prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	124
3.4. Erori de măsurare provocate de influențe perturbatoare exterioare (prof. dr. ing. M. BUGA, dr. ing. C. BURADA)	135
3.5. Captoare pentru măsurarea mărimilor mecanice (dr. ing. I. CONSTANTINESCU)	148
3.6. Lanțuri de măsură utilizate în tensometria electrică (prof. dr. ing. M. BUGA și M. TEODORU)	188
3.7. Tehnica pregătirii și efectuării măsurărilor (prof. dr. ing. M. BUGA și M. TEODORU)	228
3.8. Prelucrarea și interpretarea rezultatelor măsurărilor (prof. dr. ing. M. BUGA)	252
3.9. Exemple de măsurări tensoelectrice (prof. dr. ing. M. BUGA, dr. ing. C. BURADA, prof. dr. doc. ing. D. R. MOCANU)	274

	Pag.
4. Fotoelasticitatea	298
4.1. Noțiuni de optică generală (dr. ing. N. ILIESCU)	298
4.2. Optica polariscopului (dr. ing. N. ILIESCU)	307
4.3. Teoria fotoelasticității (dr. ing. N. ILIESCU)	318
4.4. Înregistrarea datelor fotoelastice (dr. ing. N. ILIESCU)	324
4.5. Separarea tensiunilor principale folosind determinările fotoelastice (prof. dr. ing. I. PĂSTRĂV)	325
4.6. Separarea tensiunilor principale prin alte metode (dr. ing. N. ILIESCU)	355
4.7. Trecerea rezultatelor de la model la piesa reală (dr. ing. N. ILIESCU)	370
4.8. Aplicații ale fotoelasticității pentru soluționarea unor probleme plane (dr. ing. N. ILIESCU)	374
4.9. Fotoelasticitatea spațială (prof. dr. L. BOLEANTU și dr. ing. N. ILIESCU)	382
4.10. Aplicații ale fotoelasticității în soluționarea unor probleme spațiale (dr. ing. N. ILIESCU)	400
4.11. Fotoelasticitatea în regim dinamic (dr. ing. N. ILIESCU)	404
4.12. Lacuri fotoelastice (dr. ing. N. ILIESCU)	417
4.13. Materiale folosite pentru confecționarea modelelor fotoelastice (dr. ing. N. ILIESCU)	452
5. Metode interferometrice	434
5.1. Utilizarea fenomenului moiré în tensometrie (prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	434
5.2. Utilizarea franjelor moiré realizate prin imprimarea rețelei direct pe model (prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	445
5.3. Realizarea rețelelor și efectuarea încercărilor (prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	485
5.4. Precizia metodelor tensometrice bazate pe fenomenul moiré (prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	503
5.5. Utilizarea franjelor moiré obținute prin reflexie (prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	509
5.6. Noi tehnici și metode privind utilizarea franjelor moiré în tensometrie (dr. ing. C. ATANASIU și prof. dr. doc. D. R. MOCANU)	526
5.7. Aplicațiile interferometriei holografice la analiza stării de tensiune și de deformare (dr. ing. C. ATANASIU)	532

CONTENTS

I

1. BASIC CONCEPTS OF EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS

(Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)

- 1.1. Introductory concepts
- 1.2. Stresses. States of stresses.
- 1.3. Strains and displacements.
- 1.4. Relationships between stresses and strains
- 1.5. Strength criteria
- 1.6. Effect born by the measuring base length and outline
- 1.7. The perturbing effect of strain-gages on the stress field
- 1.8. Basic characteristic of strain gages
- 1.9. Effects of temperature changes in stress analysis
- 1.10. General choice criteria for the stress analysis techniques
- 1.11. Development and expectancies of stress analysis techniques

2. MECHANO-OPTICAL STRAIN-GAGES (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)

- 2.1 General comments
- 2.2 Mechanical strain-gages
- 2.3 Mechano-optical strain-gages
- 2.4 Pneumatic strain-gages
- 2.5 Vibrating chord and acoustic strain-gages
- 2.6 Strain-gages with materialized marks

3. ELECTRICAL STRAIN-GAGES

- 3.1 General (Prof. Dr. M. BUGA)
- 3.2 Electrical transducers (Prof. Dr. M. BUGA, M. TEODORU)
- 3.3 Measuring principles (Prof. Dr. M. BUGA, Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 3.4 Measuring errors due to external factors (Prof. Dr. M. BUGA, Dr. C. BURADA)
- 3.5 Strain-gages for measuring mechanical quantities (Dr. I. CONSTANTINESCU)
- 3.6 Measuring chains used in electrical strain-gages (Prof. Dr. M. BUGA, M. TEODORU)
- 3.7 Set-up in view of measurements. Technique of carrying out measurements (Prof. Dr. M. BUGA, M. TEODORU)
- 3.8 Data processing and interpretation (Prof. Dr. M. BUGA)

- 3.9 Examples of measurements in electrical strain-gages (Prof. Dr. M. BUGA, Dr. C. BURADA, Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)

4. PHOTOELASTICITY

- 4.1 Concepts of elementary optics (Dr. N. ILIESCU)
- 4.2 Optics of the polariscope (Dr. N. ILIESCU)
- 4.3 Theory of photoelasticity (Dr. N. ILIESCU)
- 4.4 Recording of photoelastic data (Dr. N. ILIESCU)
- 4.5 Stress separation using photoelastic data (Prof. Dr. I. PĂSTRĂV)
- 4.6 Stress separation using non photoelastic data (Dr. N. ILIESCU)
- 4.7 Scaling between model and prototype stress (Dr. N. ILIESCU)
- 4.8 Two-dimensional applications of the photoelasticity (Dr. N. ILIESCU)
- 4.9 Three-dimensional photoelasticity (Prof. Dr. L. BOLEANȚU, Dr. N. ILIESCU)
- 4.10 Three-dimensional applications of the photoelasticity (Dr. N. ILIESCU)
- 4.11 Dynamic photoelasticity (Dr. N. ILIESCU)
- 4.12 Birefringent coatings (Dr. N. ILIESCU)
- 4.13 Selected materials for photoelastic models. (Dr. N. ILIESCU)

5. INTERFEROMETRY METHODS

- 5.1 Applications of Moré phenomenon in stress analysis technique (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 5.2 Use of Moré fringes obtained by impressing the grid directly on the model (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 5.3 Grid construction and tests carried out (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 5.4 Accuracy of tensometric methods based on moiré phenomenon (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 5.5 Use of moiré fringes obtained by reflexion (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 5.6 New techniques for the use of moiré fringes in stress analysis (Dr. C. ATANASIU, Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)

- 5.7 Applications of holographic interferometry to stress analysis (Dr. C. ATANASIU)

II

6. STUDY OF SINGULAR FIELDS BY MEANS OF CAUSTICS (Acad. Prof. Dr. P. S. THEOCARIS)

- 6.1 Introduction
- 6.2 Principle of the method
- 6.3 Caustic curve generated at the extreme end of a crack in a bi-refrangent plastic plate
- 6.4 Caustic curve generated at the extreme end of a crack in an elastic optically isotropic plate
- 6.5 Characteristic features of caustic curves
- 6.6 Shape of experimental caustics and determination of the stress concentration coefficient
- 6.7 Caustics generated by cracks in the case of singular stress fields
- 6.8 Caustics generated by stress singularities
- 6.9 Pseudo-caustics
- 6.10 Caustics in the case of non singular stress fields
- 6.11 Caustics applications in plasticity
- 6.12 Use of caustics to the study of complex singularities in the case of quasi-isotropic materials

7. BRITTLE COATINGS TECHNIQUE (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU, L. NĂILESCU)

- 7.1 Introductory concepts
- 7.2 Brittle coatings and their use
- 7.3 Brittle coatings standardization
- 7.4 Crack detection within the coating layer
- 7.5 Stresses within the varnish layer
- 7.6 Examples of crack fields
- 7.7 Quantitative interpretation of crack fields
- 7.8 The technique of cracking brittle coatings as an auxiliary to electrical strain gage and to photoelasticity

8. EXPERIMENTAL DETERMINATION OF RESIDUAL STRESSES

- 8.1 Source of residual stresses (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 8.2 Destructive and half-destructive methods (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU, Dr. C. BURADA)
- 8.3 Destructive and non destructive methods applied for testing welded joints (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU, Prof. Dr. Doc. V. POPOVICI, M. BĂLTĂNOIU)
- 8.4 Non destructive methods (Prof. Dr. Doc. D. R. MOCANU)
- 8.5 Measurement of residual stresses in metallic layers built by electrodeposition (Dr. D. HORBANIU)
- 8.6 Use of X-rays in stress analysis (Prof. Dr. M. TRIPA)

9. ELECTRICAL ANALOGIES FOR EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS (Dr. N. ILIESCU)

- 9.1 Elements of model theory
- 9.2 Electrical modelling of a physical field
- 9.3 Applications

10. STRUCTURAL MODELS ANALYSIS (Dr. M. MODIGA, Dr. N. ILIESCU)

- 10.1 Introductory concepts
- 10.2 Modelling basic theory
- 10.3 Modelling in solving of problems of linear elasticity
- 10.4 Bar systems and plates modelling
- 10.5 Model design
- 10.6 Choice of model materials
- 10.7 Model building
- 10.8 Model loading
- 10.9 Model testing
- 10.10 Applications

11. STRAIN-GAGE CALIBRATION (N. FÎNTÎNARU)

- 11.1 Calibration of removable strain-gages
- 11.2 Electrical strain-gage calibration
- 11.3 Tensometric bridges and amplifier calibration

12. STATISTICAL PROCESSING OF EXPERIMENTAL DATA (Prof. Dr. M. BUGA, Dr. I. CONSTANȚINESCU)

- 12.1 General
- 12.2 Measuring errors
- 12.3 Normal scattering of random measuring errors
- 12.4 Technical data and performances of measuring means
- 12.5 Statistical processing of measurement data
- 12.6 The least square method
- 12.7 Experimental data processing for the case of multi-dimensional scatterings
- 12.8 Examples of numerical analysis. Conclusions

13. INTRODUCTION TO STRESS ANALYSIS BY FINITE ELEMENTS (Dr. I. PASCARIU)

- 13.1 Introductory concepts
- 13.2 Elements of matrix algebra useful to the analysis by finite elements
- 13.3 Theoretical bases of stress analysis by finite elements
- 13.4 Steps of stress computation by finite elements
- 13.5 Isoparametric finite elements
- 13.6 Application of finite elements in flat plate bending. A computer program
- 13.7 Problems of eigenvalues (buckling and vibrations)

CONCLUSIONS. Recommendations on the choice of stress analysis methods and techniques

- 1. Main characteristic features of stress analysis methods and techniques
- 2. Recommendations on the choice of stress analysis methods and techniques
- 3. Choice of methods of experimental stress analysis.